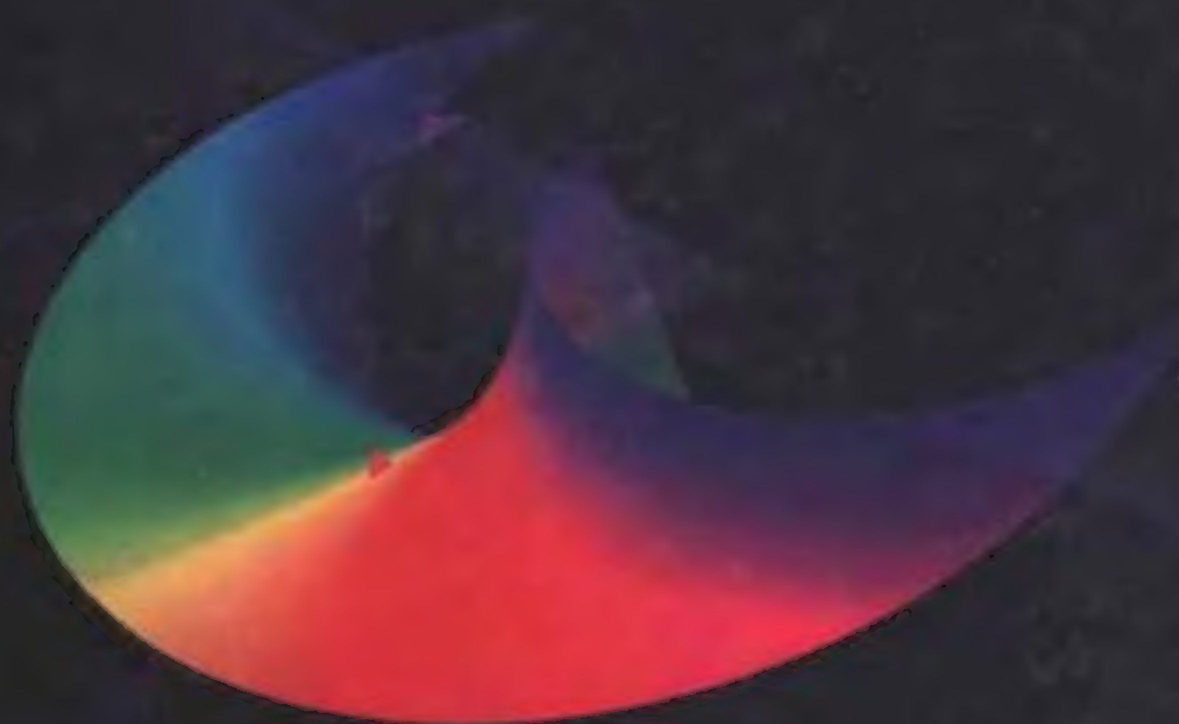
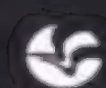
嘉当域到

华罗庚域

Cartan Domain to Hua Domain

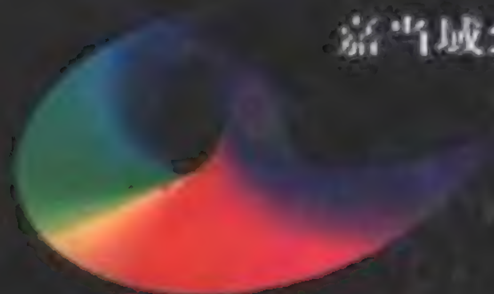
殷慰萍 著



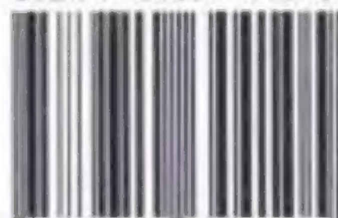


首都师范大学出版社

责任编辑 吉丽亚 傅作梅
封面设计 王凌波



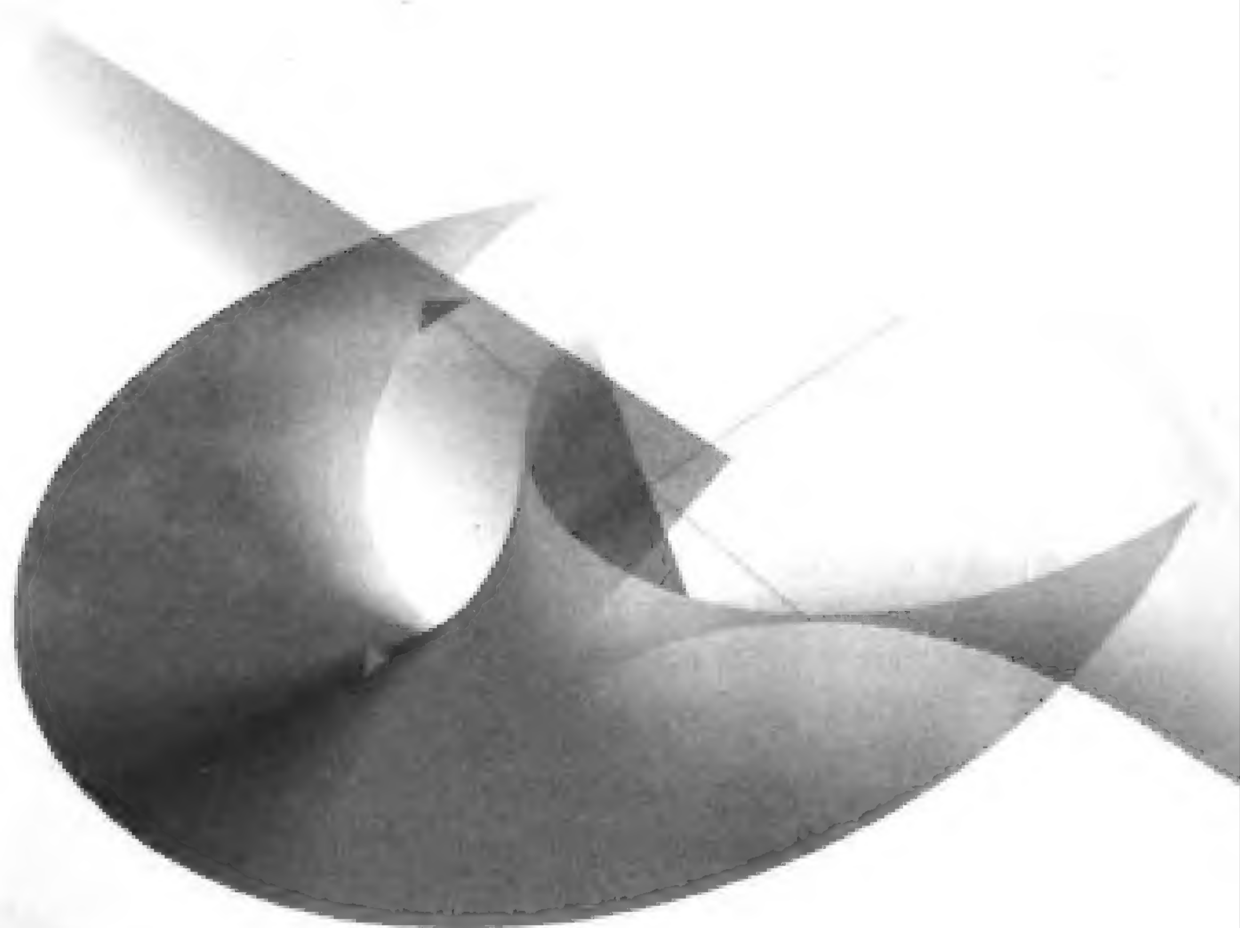
嘉当域到
华罗庚域
Cartan Domain to Hua Domain


ISBN 7-81064-410-6
9 787810 644105 >

ISBN 7-81064-410-6/O・16
定价：88.00 元

嘉当域到
华罗庚域
Cartan Domain to Hua Domain

■ 殷慰萍 著



首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

嘉当域到华罗庚域/殷慰萍著. —北京:首都师范大学出版社,2002.8
ISBN 7-81064-410-6

Ⅰ. 嘉… Ⅱ. 庚… Ⅲ. 域(数学) Ⅳ. 0153.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056162 号

嘉当域到华罗庚域

责任编辑 古丽亚 傅作梅
首都师范大学出版社出版发行
地 址 北京市西三环北路 105 号
邮 编 100037
电 话 68418523(总编室) 68982468(发行部)
网 址 www.cnup.cnu.cn
E-mail cnup@mail.cnu.edu.cn
北京嘉实印刷有限公司印刷
全国新华书店发行
版 次 2003 年 8 月第 1 版
印 次 2003 年 8 月第 1 次印刷
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 34
字 数 561 千
印 数 0 001~1 000 册
定 价 88.00 元



作者像



2002年10月26日首都师范大学数学研究所成立15周年庆典（简称庆典）在北京金域万豪酒店宴会厅举行，应邀出席的有14位中科院院士等校外数学界精英80人，校领导以及数学系全体人员共计近200人。图为所长殷慰萍教授在主持庆典。



中科院王元院士（左立者）在庆典上应主持人殷慰萍教授（右立者）的要求，对首都师范大学数学系的发展表示意见。



北京大学姜伯驹院士（左立者）在庆典上应主持人殷慰萍教授（右立者）的要求，发表对首都师范大学数学系和数学研究所的看法。



北京师范大学王梓坤院士（左立者）在庆典上应主持人殷慰萍教授（右立者）的要求，阐述对首都师范大学数学系的看法。



在庆典上主持人殷慰萍教授（左立者）请清华大学文志英教授（右立者）发表意见。



在庆典上，主持人殷慰萍教授（右一）向北京市教委副主任张国华（左二）、首都师范大学副校长王万良教授（右二）、首都师范大学副校长刘新成教授（左一）介绍出席庆典的贵宾名单。



在庆典上，首都师范大学校长许祥源教授（中）和数学系主任李庆忠教授（右一），数学系党总支书记唐其钰（左二）高工，北京市特聘教授吴可（右二）以及数学所所长殷慰萍教授（左一）一起交谈。



1997年9月15日至9月30日由法国纯数学与应用数学国际中心（CIMPA）、中国国家自然科学基金委员会、联合国教科文组织和首都师范大学资助的CIMPA SCHOOL在首都师范大学举行。主题为"复齐性域上的分析与几何"，由陆启铿院士等5位教授各作8–10小时的系列报告。图为作者在主持开幕式。



1984 年作者访问意大利 Trieste 的国际理论物理中心（ICTP）时，在亚德里亚海边留影。左边第一人为复旦大学李大潜院士，中间为南开大学葛墨林教授，右边第一人为作者。



1997 年作者主持 CIMPA SCHOOL 时，与全体与会者合影。前排自左至右为：日本上智大学教授 Kaneyuki 夫妇、同济大学陈志华教授、作者、中科院数学所陆启铿院士、法国普瓦捷大学 Roos 教授、美国 Koranyi 教授、复旦大学张锦豪教授、法国教授 Faraut 夫妇。



1984年作者访问意大利Trieste的国际理论物理中心（ICTP）时，中心主任、诺贝尔物理学奖获得者Abdus Salam（前排中间）与来自中国的学者合影。前排右起：作者、熊金城教授、葛墨林教授、李大潜院士。



1993年在兰州参加国家自然科学基金评审和自然科学奖复审会时合影。前左二为作者，前左五为刘应明院士，前左九和十分别为郭柏灵院士和石钟慈院士，后右二为陈希孺院士，后右五为丁石孙副委员长，后左二为周作领教授。



1999年在北京教师疗养院审查《复变函数》教材时各位教授合影。前排左起：陈怀惠、作者、陈志华、李忠、张锦豪、张顺燕，后排左起：王安、禹宝聪、李庆忠



1983年访问美国马里兰大学时合影。左二为作者，右三为刘人平教授，左四为龚升教授，右二为吴兰成教授，右一为熊金城教授。



法国教授G.Roos（前排中间）应作者邀请2000年在首都师范大学讲学时与多复分析研究组合影。前排左二为作者。



1997年10月国家教委数学和力学教学指导委员会基础数学教学指导组在广西大学举行工作会议时合影。前右二至右七分别为徐森林、陈翰馨、伍卓群、张鸿林、马维声、孙善利诸教授。后左二至左四分别为高智民、王泉扬、林金坤诸教授。



1983年7月8日在成都的多复变会议期间陆启铿院士（中）与其学生合影，前排右起：叶芳卑、作者、文涛、陈志华；后排右起：石赫、钟家庆、曾宪立、陈志鹤



作者应邀参加2002年南京师范大学百年校庆活动“纯粹数学与应用数学论坛”时留影。后左起：杨乐、作者、孙继广、黎厚德、梁文沛、吴平、傅鼎祥、王东华、曹润基、刘仲强、苏永乐、张顺燕、汤健儿；前右起：高淑达、郑雪萤、陈怀惠、庄人俊、陆亚彦、徐承绪、杨明伦、张学莲、黄旦润、张锡光、孟宪同、顾志东。



1992年多复变会议期间作者（右二）、史济怀教授（左三）、卢克平教授（左一）、刘太顺教授（右一）与陆启铿院士（前坐者）合影。



1990年第一届亚洲数学家大会时，作者与北大校友合影。后排左起：作者、杨乐、戴自强、吕以辇、张顺燕；前排右起：邓东皋、顾国栋、李忠



陆启铿院士获第一届华罗庚数学奖时，作者（右一）在授奖大会上介绍陆院士的得奖工作。左二为宋健院士



1989年作者访问日本三重大学时与数学家座谈，左二为作者。



作者（左一）与张寿武院士在中国科技大学的一次学术活动期间的冷餐会上合影



1990年8月在香港参加第一届亚洲数学会时，作者（右一）与杨乐院士（中间）和刘应明院士合影



在第一届华罗庚数学奖授奖大会上作者（站立者）与得奖人陆启铿院士合影



2002年10月26日作者与万哲先院士（右）在首都师范大学数学所成立15周年庆典上交谈



1993年在兰州参加国家自然科学基金评审和自然科学奖复审会时，作者（右一）与石钟慈院士（左一）和陈希孺院士合影。

1990年2月在西德的Wuppertal举行庆贺H.Grauert大寿的国际复分析会议时，作者与哈佛大学萧荫堂教授（右）合影。



1996年5月在贵阳举行的国家教委数学与力学教学指导委员会期间作者（右）与李忠教授（左一）、郑东阜教授合影。



1989年访问日本时，作者（右）在神户的六甲山牧场与大阪大学村上信吾教授合影。



1997年9月举行CIMPA SCHOOL时，作者会见作系列报告的日本Sophia Univ.的Soji Kaneyuki（金行壮二）教授及其夫人（右边二位）。



1997年9月举行CIMPA SCHOOL时，作者会见作系列报告的法国Univ. of Poitiers教授G. Roos（右）。



1997年9月举行CIMPA SCHOOL时，作者会见作系列报告的美国教授A. Koranyi（右）。



1997 年 9 月举行 CIMPA SCHOOL 时，作者（右）与 CIMPA 的亚洲地区负责人 A.Pinou 教授合影。



1997年9月举行CIMPA SCHOOL时，作者会见作系列报告的法国教授J. Faraut（左）



1989年5月30日访问日本富山（Toyama）大学时与K. Azukawa教授（左）合影。



1989年4月访问韩国科学技术院时，院长李相洙（Sang Soo Lee）教授会见作者（右一）。



1989年作者（后左）访问日本仙台的东北大学时与邀请人I. Sadake教授（前右）合影。



1989年作者（右）与日本三重大学教授Tsuji合影。



在ICM 2002期间，作者与瑞典Uppsala大学C.O. Kiselman教授（右）合影。



1997年9月作者（右）与越南教授Tran Tin Kiet校长会见。



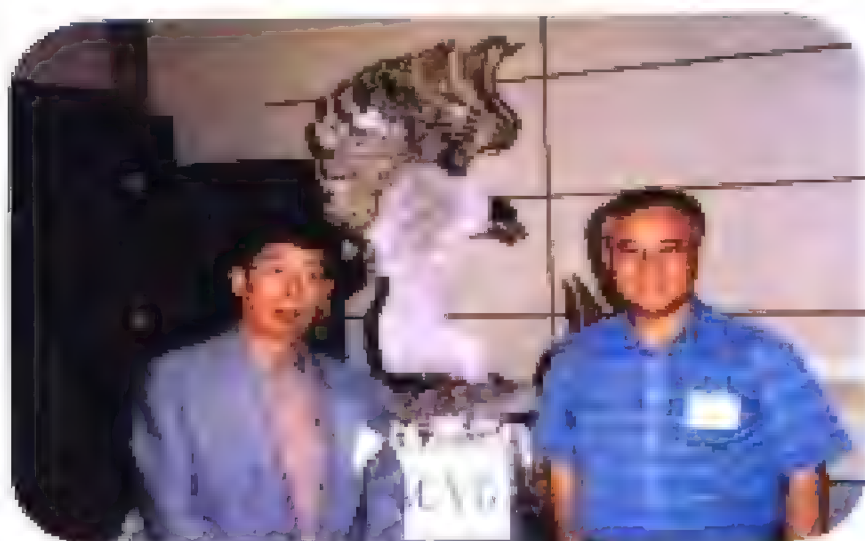
2002年8月作者与美国Columbia大学Masatake Kuranishi教授（右）合影。



作者（左）与加州大学Berkeley分校Shoshichi Kobayashi教授（中）、复旦大学张锦豪教授2002年8月在韩国庆州多复变会议期间合影。



作者（左）与美国Indiana大学Eric Bedford教授（中）、东京大学Junjiro Noguchi教授2002年8月在韩国庆州多复变会议期间合影。



2002年8月作者（左）与KSCV6会议的组织者浦项工业大学（Pohang Univ. of Sci. & Tech.）金康泰（Kang-Tae Kim）教授合影。



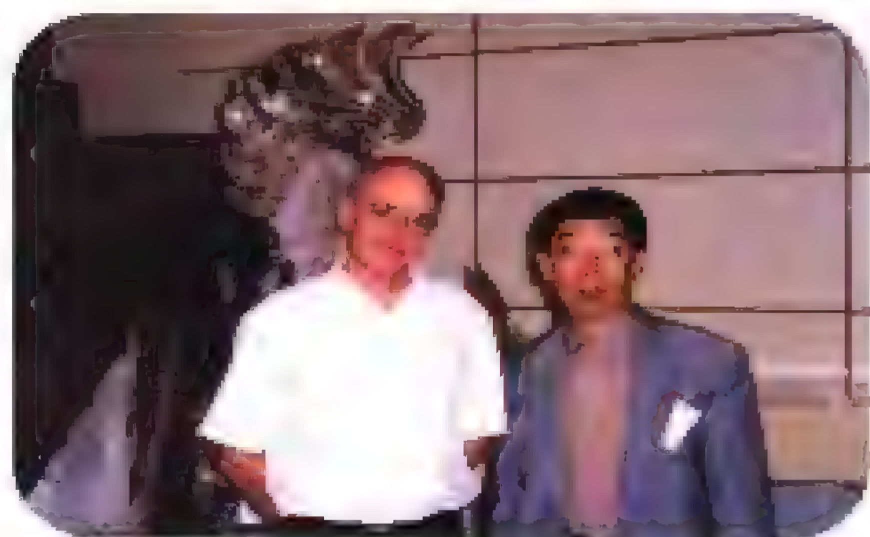
作者（右）与德国Oldenburg大学 Peter Pflug 教授2002年在韩国庆州的KSCV6会议上合影。



作者（左）与美国圣路易斯的华盛顿大学 Steven G. Krantz 教授2002年在KSCV6会议期间合影。



作者（右）与加拿大Toronto大学的John Bland教授2002年在KSCV6会议期间合影。



作者（右）与美国Purdue大学Laszlo Lempert教授2002年在KSCV6会议期间合影。



在KSCV6会议期间合影，右起：马道玮（Daowei Ma）、作者、符斯奇（Siqi Fu）、张锦豪。



庆贺苏步青院士 90 华诞在上海锦江饭店于 1991 年 9 月 23 日举行的宴会上作者与南开大学教授侯自新（右）合影。



1996 年 5 月 4 日在"五四"活动后，作者（前左）与南京师范大学教授陈怀惠（前右）、北京大学教授张顺燕（后左）、中科院数学所杨乐院士合影。此时，杨乐院士单独告知作者，他与张恭庆院士已联名写报告给国务院学位委员会，建议增补首都师范大学基础数学专业和上海交通大学应用数学专业为博士学位授权点，后经专家通讯评议通过。



1992 年 5 月在合肥召开多复变函数论会议期间，作者（左一）在开幕式上讲话，左二为龚昇林教授。



1996年5月在贵阳举行的数学与力学教学指导委员会期间作者（左）与复旦大学忻元龙教授合影



1983年圣诞节期间作者与钟家庆教授（左一）在美国普林斯顿高级研究院合影



1990年4月访问瑞典于默尔（Umea）大学时留影。



作者的博士生赵晓霞进行博士论文答辩后与答辩委员会全体成员合影。前左起谭小江、作者、李忠、周向宇、郑泰友，后左起：林萍、王安、李庆忠、赵晓霞。



2002 年作者与其博士生王安（后右）、赵振刚（后左）在博士论文答辩后合影。



人民大会堂宴会厅的2002年国际数学家大会开幕式宴会上作者与北京大学张顺燕教授（左）合影。



2000年王男硕士论文答辩后的合影，前左起：郑崇友、作者、杨洪苍，后左起：管冰辛、王男、焦宝聪。



1983年访问法国高等科学研究院（IHES）期间，参观罗浮宫时在维纳斯雕像真迹前留影。



1998年作者与北大教授郑忠国（左）商谈完后亲切握手



1989年作者访问日本北海道大学时留影



1988年9月作者在法国Univ. of Portiers数学大楼前留影。



作者1999年9月参加波兰的经典复分析国际会议时在一次晚宴上留影。



1989年作为Membership访问位于美国加州Berkeley的数学科学研究所（MSRI）时在该所大楼前留影。



1983年冬作者访问西德波恩的马普数学所（Max-Planch-Institut fur Mathematik）时，在该所大楼前留影。



1983年作者访问法国高等科学研究院（IHES）时，在法国凡尔赛宫前留影。



1990年作者访问西德哥丁根大学数学研究所时，在该所大楼前留影.



作者（中间）60岁生日与其妻[illegible]彩华及其子[illegible]晓岚合影.



作者与其子殷建岚1994年在中国科学技术大学合影



作者爱人[illegible]彩华在1996年。

作者介绍

殷慰萍，男，汉族，1937年11月1日（农历九月二十九日）午时生于江苏省江阴县澄江镇，父亲殷九畴，母亲刘泽湘．由于日寇侵华，在殷慰萍出世的第三天全家就逃难到乡下，以后一直定居于江阴县申港镇．1951年7月毕业于申港中心小学，失学2年，自学初中课程，以同等学历报考江苏省南菁中学，数学成绩满分，而且是全体考生中惟一的满分，从而引起有关方面的注意．由于无初中学历，故报请江苏省教育厅批准后才于1953年10月15日就读于南菁中学高中部．1956年录取于北京大学数学力学系．1962年毕业随即到中国科学院数学研究所工作．1966年9月与薛彩华女士结婚，有一子名殷晓岚．1973年6月调至中国科学技术大学，经杨乐、王元、陆启铿、丁夏畦、程民德、廖山涛六位院士联名推荐，于1992年12月调至首都师范大学．1987年10月获教授职称，1993年12月11日被国务院学位委员会批准为第五批博士生导师，1994年任首都师范大学数学研究所所长，1985年起为美国“数学评论”评论员．1992年被聘为意大利国际理论物理中心的 Associate Member．1990年到2000年为国家教委第一、第二届高等学校理科数学与力学教学指导委员会基础数学教学指导组成员．1994年起被聘为北京大学兼职教授．1992年开始享受政府特殊津贴．1999年11月被中共北京市委和北京市政府批准为北京市有突出贡献的科学、技术、管理专家．

殷慰萍教授的专业为基础数学，研究方向为多复变函数论．他继承和发展了华罗庚院士和陆启铿院士在中国所开创的多复变函数论研究的经典理论，并将此推进到一个崭新的领域——华罗庚域的研究，是我国多复变函数论研究领域的学术带头人．至今已完成学术论文110余篇．主要成果为：定出两个例外典型域上的 Bergman 核，Cauchy 核和 Poisson 核，从而解决了这两个域上的函数论基本问题；给出了16维例外典型域的有界实现和其上的对合变换；用统一的方法给出了四大类典型域和几类 Reinhardt 域的全纯自同构最大群；构造了几类新的非对称齐性域及其扩充空间，并给出了 $\mathbf{C}^n$ 中有界齐性域为对称域的 $(n-1)$ 个判别准则；对几类拟凸域发现了其上的群不变函数及全部不变 Kahler 度量，并得到了 Bergman 度量和 Kobayashi 度量的比较定理．最近他引进了华罗庚域的概

念并显式给出了它们的 Bergman 核函数、完备的 Einstein－Kähler 度量的显表达式以及度量比较定理和典型域的特征性质等等.这些成果受到国际同行的高度重视,由对方出资,应邀到美国、法国、重国、德国、日本、瑞典、韩国、印度、波兰等九个国家的 32 个研究中心和高等院校访问,进行国际合作研究和学术交流,作了 30 多个国际学术报告.美国宾州州立大学(The Pennsylvania State University)Kyong T. Hahn 教授 1991 年 4 月 19 日在给美国政府机构 NSF 的报告中称"Professor Weiping Yin is one of the outstanding mathematicians in China today who has an expertise both in Several Complex Variables and Partial Differential Equations. He is well-known international in those fields." "Professor Yin has recently made some important contributions in this proposed field, hy introducing an insightful technique"(其报告在 NSF 的编号为:INT-9115252).其研究成果《一类灵哈特(Reinhardt)域的研究》获 1995 年国家教委科技进步奖(甲类).《Siegel 域与蛋型拟凸域的研究》获 2000 年北京市科技进步奖二等奖.1997 年 9 月 15 日至 9 月 30 日作为学术主席在首都师范大学主持了主题为"Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains and Related Topics"的 CIMPA-UNSA-UNESCO-CHINA SCHOOL,并组织出版了《Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains》一书.1999 年 9 月在波兰举行的"第十届国际经典分析研讨会"上作了 2 个小时的大会邀请报告,并收到 2001 年 8 月 8 日到 12 日在越南河内举行的"The 9th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications"的组织委员会以及 2001 年 8 月 18 日到 23 日在保加利亚的普罗夫迪夫举行的"12th International Colloquium on Differential Equations"的组织委员会关于做 1 小时大会报告的邀请.

殷慰萍教授迄今为止所指导过的硕士研究生有:欧军,刘伟明,姚加贤(1987～1990,与陆启铿合带);丁莉,赵晓霞(1995～1998);寇明,赵振刚(1996～1999);王男,赵玲(1997～2000);张文娟(2001～2004);王贵霞,李宏杰(2002～2005).他至今所指导的博士研究生有:邹本腾(1996～1999,在北京大学与闻国椿合带);赵晓霞(1998～2001);赵振刚(1999～2002);赵玲,苏简兵(2000～2003);王安(1999～2002,在职博士生).

殷慰萍教授至今已完成国家自然科学基金委员会基金、北京市自然科学基金委员会基金、中国科学院基金和国家教委博士点基金以及北京市教改基金等 11 个项目,其中包括重大项目"复分析"、"八·五"数学重点项目"多复变的全纯映照理论"、"九·五"数学重点项目"多复变函数论",

以及北京市自然科学基金委员会项目“当代复几何分析的若干问题”和北京市教改项目“高师院校复变函数课程教学内容与体系的改革”.现在正主持国家自然科学基金委员会的面上项目“拟凸域上的复几何分析”和北京市自然科学基金委员会的项目“现代复几何分析”的研究.

他入编于《世界名人录》、《国际知识分子名人录》、《中国教育专家名典》、《中华科技精英大典》、《中国专家大辞典》、《中外名人辞典》、《科学中国人中国专家人才库》、《科学中国人——中国专家人才大典》、《当代中国科学家传略》、《当代中国科学家与发明家大辞典》和《当代育才精英辞典》等十多种名典.他将于 2007 年 12 月退休.

目　　录

开　篇

原书空白页

本书属于多复变函数论范畴，也属于复几何分析的范畴.我们从对称的齐性域(也称典型域和嘉当(Cartan)域)开始，然后研究非对称的齐性域，再扩展到非齐性的蛋型域，最后研究我们自己引进的华罗庚域，这组成了前四章的内容.第五章则研究与此有关的特殊函数和偏微分方程.本书的一个主题是如何显式求出一些域的 Bergman 核函数.因此在开篇中，我们除了阐述多复变和单复变有本质的不同及简单叙述一下中国多复变队伍的发展简史外，还叙述一下 $\mathbf{C}^n$ 中有界域的 Bergman 核函数的显式表示的最新进展.

首先引进一些记号和基本概念.多复变函数是在复数空间 $\mathbf{C}$ 本身的 n 次直乘积

$$\mathbf{C}\times\cdots\times\mathbf{C}:=\mathbf{C}^n$$

上考虑的.对于 $\mathbf{C}^n$ 的元素可以表示为

$$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n.$$

$\mathbf{C}^n$ 中的点与 $2n$ 维实空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 的点的对应关系为

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^n\ni z&=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\\&\leftrightarrow(x_1+\mathrm{i}y_1,\cdots,x_n+\mathrm{i}y_n)\\&\leftrightarrow(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n)\in\mathbf{R}^{2n}.\end{aligned}$$

$\mathbf{C}^n$ 中两点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 与 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 之间的距离为

$$|z-w|=(|z_1-w_1|^2+\cdots+|z_n-w_n|^2)^{1/2}.$$

有时，$\mathbf{C}^n$ 也可看为是复数域 $\mathbf{C}$ 上的向量空间.$\mathbf{C}^n$ 中两元素 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 与 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 之内积为

$$\langle z,w\rangle=z_1\overline{w}_1+\cdots+z_n\overline{w}_n.$$

在 $\mathbf{C}^n$ 的运算中，我们常常用的是

$$\frac{\partial}{\partial z_j}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

这比用 $\partial/\partial x_j$ 和 $\partial/\partial y_j$ 更方便.

容易验证下式成立：

$$\frac{\partial}{\partial z_j}z_k=\delta_{jk},\quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\overline{z}_k=\delta_{jk},\quad \frac{\partial}{\partial z_j}\overline{z}_k=0,\quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}z_k=0.$$

在解析函数(也称全纯函数)的定义中运用这新的符号显得更为简便.

在单复变中有多种方法定义解析函数(或称全纯函数). 其中用柯西 黎曼方程和用幂级数来定义解析是两个重要的方法. 在多复变中也可用这种观点来定义解析(全纯). 但是,我们介绍一个容易理解并易于运作的定义:

若 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个域(即连通开集),若函数 $f:\Omega\to\mathbf{C}$ 对每一个固定的点 $p=(p_1,\cdots,p_n)\in\Omega$ 和每一个固定的 $j\in\{1,\cdots,n\}$,单变量函数

$$\mathbf{C}\ni z\to f(p_1,\cdots,p_{j-1},p_j+z,p_{j+1},\cdots,p_n)$$

对充分小的 z 是解析的,则称 f 在域 Ω 解析. 换句话说,若 f 分别对每一个变数(在单变数意义下)是解析的,则它在域 Ω 解析(或称为全纯).

若 f 在 $\Omega\subseteq\mathbf{C}^n$ 全纯,则 f 对每一个变数都满足柯西-黎曼方程,即若 $f=u+\mathrm{i}v$ 则有

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\partial v}{\partial y_j},\quad \frac{\partial u}{\partial y_j}=-\frac{\partial v}{\partial x_j},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

在我们新引进的符号下,上述柯西-黎曼方程组可简写为

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

事实上,这是由于:

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=\frac{\partial(u+\mathrm{i}v)}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(u+\mathrm{i}v)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}+\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)\end{aligned}$$

将实部和虚部分开,就得到上述柯西-黎曼方程组. 因此一个连续可微的多复变函数 f 是全纯的充分和必要条件为:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

多复变全纯函数的典型例子是多项式、有理函数和收敛的幂级数,例如

$$p(z_1,z_2,z_3)=z_1z_2-(z_3)^2,$$

$$r(z_1,z_2)=\frac{z_1}{(z_2)^2+1},$$

$$q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z_1z_2)^k.$$

在第一个例子中,对所有的 $z=(z_1,z_2,z_3)$ 都全纯. 第二个例子中,当 $z_2\neq\pm\mathrm{i}$ 时都全纯. 在第三个例子中,当 $|z_1z_2|<1$ 时全纯. 单复变中强有力的东西,例如 Mittag-Leffler 定理,Weieratrass 定理,Blaschke 乘积,

Riemann 映照定理等等在多复变中不成立.这些现象充斥于多复变中,但也促使人们去发现一些更强有力的且不同于单复变的结果和方法.

一、多复变函数论的特点

多复变与单复变完全不同的方面很多,我们只讲很重要的两点:Hartogs 现象的发现和 Riemann 映照定理在多复变中不成立.

1.Hartogs 现象

1906 年,Hartogs 在解析开拓(或称为全纯开拓)方面发现了一个与单复变完全不同的现象,后来称为 Hartogs 现象.这使得多复变独立于单复变,自己成为一门独立的学科的开始.因此,Hartogs 现象的发现在多复变的发展中是具有历史意义的一件大事.

先讲一下解析开拓(全纯开拓).设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个域,f 是 D 上的全纯函数.如果存在域 $G\supset D$ 和 G 上的全纯函数 F,使得当 $z\in D$ 时,有 $F(z)=f(z)$.我们就称 F 是 f 在域 G 上的全纯开拓(解析开拓),或者说 f 能全纯开拓到更大的域 G 上去.在单复变中,对复数平面中的任意一个域 D,并不是每一个在 D 全纯的函数都能全纯开拓到比 D 更大的域上去.也就是说,至少存在一个在 D 全纯的函数,它不能全纯开拓到 D 外.这时,我们称 D 的边界为此全纯函数的自然边界,而称 D 为此全纯函数的自然域.例如,在单复变中,函数 $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} z^{n!}$ 在单位圆盘解析,但不能解析开拓到单位圆盘外,则此圆盘的边界单位圆周 $|z|=1$ 称为此函数 $f(z)$ 的自然边界,而单位圆盘称为此函数 $f(z)$ 的自然域.

但在多复变中,却存在这样一种域,其上的所有全纯函数都可以全纯开拓到比它更大的域上去.这种现象是 Hartogs 在 1906 年发现的,我们称为 Hartogs 现象.在单复变中不存在 Hartogs 现象,这现象是多复变所特有的.为了说得更详细一点,先引进一些记号.

设 $P\in\mathbf{C}$,$r>0$,则令

$$D(P,r):=\{z\in\mathbf{C}:|z-P|<r\},$$
$$D(P,r):=\{z\in\mathbf{C}:|z-P|\leqslant r\},$$
$$D:=D(0,1),\quad \bar{D}:=\bar{D}(0,1).$$

若 $P=(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbf{C}^n$,$r>0$,则

$$D^n(P,r):=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_j-p_j|<r,j=1,\cdots,n\},$$
$$\bar{D}^n(P,r):=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_j-p_j|\leqslant r,j=1,\cdots,n\},$$
$$B(P,r):=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\},$$
$$\bar{B}(P,r):=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\leqslant 1\}.$$

现在继续我们的讨论：

定理 0.1(Hartogs). 令 $r>0$，并设

$$\Omega=D^2(0,r)-\bar{D}^2(0,r/2),$$

若 f 在 Ω 上全纯，则存在一个在 $D^2(0,r)$ 上全纯的函数 F，使得 $F|_\Omega=f$.

这就是说，任意一个在 Ω 全纯的函数总可以全纯开拓出去，即 Ω 不可能是某个全纯函数的自然域. 另外一方面，令 φ 为在 D 全纯的不可再全纯开拓的函数. 令 $\Omega=D^2(0,1)$. 在 Ω 定义一个全纯函数

$$f(z_1,z_2)=\varphi(z_1)\varphi(z_2),$$

则 f 是定义于 Ω 上的两个复变数的不可全纯开拓的全纯函数：不存在包含 Ω 的较大的开集使得 f 可以解析开拓到此开集上. 同样道理，$\mathbf{C}^2$ 中的直乘积的域，都具有不可开拓性. 因此，在高维时，我们没花什么力气，找到了一个大类的域，它们像单复变那样，是某个全纯函数的自然域，这样的域我们称为全纯域(正则域). 当然，正则域也不全是乘积域的情况，例如超球就是正则域. 我们有：

定理 0.2. 存在一个在超球 $B=B(0,1)$ 全纯的函数 f，使得 f 不可能从 B 解析开拓到更大的开集上去.

因此，在多复变的情况，既存在全纯域也存在非全纯域. 一个很自然的问题就是：如何区分它们？或者说全纯域的特征性质是什么？这个问题是多复变函数论早期发展中的一个基本问题. 许多数学家在几何性质方面，特别在凸性方面考虑全纯域的特征性质. Levi 给出了拟凸域的定义，并容易地证明了全纯域一定是拟凸域，反过来，拟凸域是不是全纯域呢？这就是多复变发展历史上有名的 Levi 猜想. 1942 年由 Oka 解决了 $n=2$ 的情况；一般的情况，由 Oka, Nrguet 和 Bremermann 在 1953 年，1954 年同时独立地解决；而复流形的情形，1958 年由 H. Grauert 用层解决；在 20 世纪 60 年代中期，经由 Andreatti, Vesentini, Morrey, Kohn, Hormander 等人的工作，发展了 L^2 估计的方法，将 Levi 问题的研究归结为 $\bar{\partial}$ 问题的可解性及解的估计，这本质上是一种微分算子的理论. 这样多复变和偏微分方程紧密地联系了起来. 以上是 Hartogs 理象影响多复变发展的一个方面. 另外，从 Hartogs 现象还可以直接推出一些重要的与单复变截然不同的结论.

在单复变中，我们知道，非常数的全纯函数 F 的零点是孤立的；其零点的集合是一个离散的集合；假如 F 的零点集合在 F 的定义域内有一个聚点，则 $F\equiv0$；而且，由 Weierstrass 定理，任何一个离散的点集都可以是

某一个非常数全纯函数的零点集合．这些在多复变中都不成立．

定理 0.3． 若 f 在 $\mathbf{C}^n$ 的域 G 全纯$(n>1)$，则 F 无孤立的零点．

证：设 $P\in G$ 是 f 的一个孤立零点，则存在 $D^n(P,r)\in G$，使得

$$\{z\in\mathbf{C}^n: f(z)=0\}\cap D^n(P,r)=P.$$

令 $1/f(z)\equiv g(z)$，则 $g(z)$在 $D^n(P,r)-\overline{D^n(P,r/2)}$上是全纯的，由定理 0.1，$g(z)$可以全纯开拓到 $D^n(P,r)$．特别，$g(z)$在点 P 是全纯的，因而 f 不可能在 P 取零值．

用同样的方法可以证明：多复变中的全纯函数不存在孤立的奇点．这与单复变是完全不同的．比这个证明稍难一点，但同样是用到 Hartogs 定理，我们有：

定理 0.4． 设 F 在 $\mathbf{C}^n$ 的有界域 G 全纯$(n>1)$，令 $L=\{z\in G: F(z)=0\}$，则 L 或是空集或是 G 中的非紧集合．(略去证明)

推论：若 F 在 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域 G 全纯$(n>1)$，则 F 的每一个等值集合都延绵到 G 的边界．

证：设 α 是 F 的一个函数值，令 $g(z)=F(z)-\alpha$，则对 $g(z)$应用定理 0.4 就得证．

在单复变中，若 F 在域 G 全纯而且在 $\bar{G}$ 连续，则集合 $F(\partial G)$无内点．在多复变中情况正好相反．

定理 0.5． 若域 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界域$(n>1)$，F 在 G 全纯，在 $\bar{G}$ 连续．则 $F(\partial G)=F(\bar{G})$．

证：设 $P\in G$．若 $F(P)\notin F(\partial G)$，令 $\alpha=F(P)$，则 α 在 F 下的原像点的集合是一个有界闭集，且与 G 的边界有某一距离，因而是在 G 内紧致，这与定理 0.4 相矛盾．

与此有关的推论还有很多，例如 $\mathbf{C}^n$ 中的非常数全纯函数零点的组成复维数为$(n-1)$的集合，其奇点集合的复维数为$(n-1)$，则其为可去奇点等等，在此就不多讲了．

2．*在多复变中不存在相应的 Riemann 映照定理*

单复变函数把平面点集映成平面点集，面 n 个复变数的函数则是把 $\mathbf{C}^n$ 中的点集映成平面点集．我们考虑下面的函数组：

$$F=(f_1,\cdots,f_m),$$

其中每一个分量 f_i 都是域$G\subset\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数，这样 F 就把G 映为 $\mathbf{C}^m$ 中的点集，这时称 F 为 $G\to\mathbf{C}^m$ 的全纯映照．若 $m=n$，而且 F 有全纯的逆映照，则称 F 为双全纯映照．这时，域 G 在双全纯映照 F 下被映成域 $\Omega=F(G)$，我们就称 G 全纯等价于Ω，或称 G 与 Ω 是全纯等价的．$n=1$

时,双全纯映照就是保形变换.而当 $n>1$ 时,双全纯映照就不再保形了,除非 $f_j(j-1,\cdots,n)$都是有理函数.在单复变的保形变换中,最惊人的结果就是 Riemann 映照定理:**C** 中的单连通区域若不是 **C** 本身,一定全纯等价于单位圆盘.但类似的结果在多复变中不成立.Poincare 在 1906 年证明:

定理 0.6. 在 $\mathbf{C}^2$ 中的超球 B 与双圆柱 $D^2(0,1)$不全纯等价.

只要计算一下全纯不变量,就可证明其不全纯等价.由此引起的一个重要问题就是:什么时候 $\mathbf{C}^n$ 中的两个域是全纯等价的? 这就是域的分类问题.根据 Poincare 纲领,对具有光滑边界的有界域,计算其边界的几何不变量能用于 $\mathbf{C}^n$ 中域的分类,因此就必须考虑双全纯映照光滑延拓到边界的问题,这在单复变中也是一个难题.在多复变中近 20 年来才对某几类特殊的域有些结果,对一般的域目前尚未解决.

考虑域的等价问题的另一个思路就是对域多加一些条件后进行分类.20 世纪 30 年代,E. Cartan 对域增加了有界和对称的条件后进行了分类.域 G 称为对称的是指:对域 G 内的每一点 P,存在域 G 的全纯自同构变换 F 使得此变换连续进行两次后等于恒同变换,即 $F^2=I$,而且 P 是此变换 F 的惟一不动点.根据 E. Cartan 的结果,不可分解的有界对称域共有四大类:

$$R_{\mathrm{I}}(m,n):=\{Z\in\mathbf{C}^{mn}:I\quad ZZ^{\mathrm{T}}>0,\},$$

$$R_{\mathrm{II}}(p):=\{Z\in\mathbf{C}^{p(p+1)/2}:I\quad ZZ^{\mathrm{T}}>0,\},$$

$$R_{\mathrm{III}}(q):=\{Z\in\mathbf{C}^{q(q-1)/2}:I-ZZ^{\mathrm{T}}>0,\},$$

$$R_{\mathrm{IV}}(n):=\{Z\in\mathbf{C}^n:1+|ZZ'|^2-2ZZ^{\mathrm{T}}>0,1-|ZZ'|^2>0\}.$$

上述式子中的 Z 分别表示 $m\times n$ 复矩阵,p 阶对称方阵,q 阶斜对称方阵和 n 维复向量,Z^{T} 表示矩阵 Z 的共轭转置,即 $Z^{\mathrm{T}}=\bar{Z}'$.

另外还有两个复维数为 16 和 27 的例外域.这些域,华罗庚称之为典型域.

E. Cartan 发现所有有界对称域都是齐性域(或称可递域).所谓一个域 G 是可递的是指:对 G 中的任意一点 Z_0 总存在 G 的一个全纯自同构 $F(Z)$将 Z_0 映为域 G 的一个固定点 P,即 $F(Z_0)=P$,而且当 $n\leqslant 3$ 时,$\mathbf{C}^n$ 中的有界可递域都是对称域.因而 E. Cartan 猜想"有界可递域一定是对称域".这是在 1936 年提出来的.当时的许多大数学家都相信这个猜想是对的,都向肯定的方向去做.直到 1959 年,前苏联的数学家 I. I. Pyateckii-Shapiro(此人为犹太人,后来移居以色列,现在美国工作,20 世纪 90 年代获 Wolf 奖)分别在复维数为 4 和 5 的情况举出两个有界可递

而不对称的域的例子，否定了 E. Cartan 猜想. 事实上，非对称可递域要比对称可递域多得多. 当 $n\geqslant7$ 时，$\mathbf{C}^n$ 中的不可约的彼此不等价的有界可递域不是可数多个，而是有"连续统"那么多个. I. I. Pyateckii Shapiro 又引进了一类新的域，他为纪念 C. L. Siegel 而称这类新的域为 Siegel 域，并与其他两位前苏联数学家一起证明如下的重要定理.

定理 0.7. 有界可递域一定全纯等价于某个 Siegel 域.

由于 Siegel 域已相当具体，因而上述定理在一定范围内可以看作是 Riemann 映照定理的推广.

由上述可见，多复变与单复变有本质的区别，多复变研究的内容与单复变完全不同，而且在方法上也完全不同. 单复变的重要内容和结果推广到多复变中去，会遇到种种障碍. 这些障碍的克服，就形成了多复变的特有的内容与结果并创造了新的工具与方法. 多复变就是这样发展起来的. 顺便说一句，单复变的平行推广，是没有多大意义的.

二、中国多复变函数论队伍的发展简史

中国多复变函数论的开山祖师是华罗庚. 在华罗庚的要求下，1951 年陆启铿从中山大学调到中国科学院数学研究所研究多复变函数论. 1952 - 1953 年，华罗庚先生在北京大学主持了一个多复变函数讨论班，讨论华先生从莫斯科带回来的 B. A. Fuks 所写的《多复变函数论》俄文书. 参加者有 10 人，除陆启铿外，还包括程民德、庄圻泰、闵嗣鹤、许宝騄等著名数学家. 1954 年，钟同德先生从厦门大学到中国科学院数学研究所作为时两年的访问学者. 其后，龚升先生也从复旦大学调到数学所，这样就形成了研究多复变函数论的四人群体. 1954 - 1955 年举行多复变讨论班，学习和讨论陆启铿写的讲义《多复变函数与酉几何》，此讲义发表于《数学进展》1956 年第 4 期. 当时北大的董怀允先生和陈杰先生也是参加者. 但是真正从事多复变研究的也就是华罗庚、陆启铿、钟同德和龚升. 这一时期是中国多复变研究的开创时期. 陆启铿从 1951 年就开始了多复变的研究，比钟同德和龚升要早 3 - 4 年，而且他们研究多复变是学习陆启铿的讲义《多复变函数与酉几何》开始的. 因此，应当是华罗庚和陆启铿一起开创了中国多复变函数论的研究.

1959 年秋，在北京大学程民德教授的建议下，陆启铿先生在北京大学开设了多复变函数论专门化，参加学习的有 10 人，除作者外，还有钟家庆、孙继广、陈志华、石赫、文涛、陈志鹤、江润富、王大明、曾宪立，并与 13 位单复变函数论专门化的同学（杨乐、张广厚、陈怀惠、吕以辇、顾永兴、张顺燕、张南岳、周连弟、戴自雄、于臣、陈锡智、王惠民、陈祖浩）以及泛函分

析的4位同学(蔡愉祖、吴海蓉、王文娟、沈镜心)组成函数论班."文革"前,钟同德先生在厦门大学也开设了几届多复变专门化,叶芳草、姚宗元、林良裕、陈叔谨等都出自其门下."文革"后,中国多复变函数论得到了恢复和发展,陆启铿、龚升、钟同德、陈志华、殷慰萍、钟家庆都招收了研究生.杨洪苍、谭小江、洪毅、周向宇、卢克平、李庆忠是陆启铿的研究生;王世坤、余其煌、贺祖祺、董道珍、陈广晓、刘太顺、郑学安是龚升的研究生(前5人是和华老合招的);现在华罗庚的学生的学生都在招收多复变的研究生."文革"后,还有不少人改行研究多复变,例如复旦的张锦豪(先后在Princeton和Stanford各进修1年),中国科学技术大学的史济怀(在Wisconsin进修1年)等等,并在多复变方向上培养了一批研究生.也有一些人离开了多复变队伍,例如孙继广改行研究计算数学,现为瑞典于默尔(Umeå)大学教授,并定居于斯;石赫则改投吴文俊门下,研究数学机械化证明,也颇具知名度.另外,路见可、余家荣、王斯雷、姚璧芸、任福尧、许以超等也培养了一批多复变的研究生.这些就不一一列举了.以上是中国多复变研究队伍的简单情况.中国多复变的研究内容也不断扩大,现在涉及的研究方向有:复几何、拟凸域上的复几何分析、积分表示、函数空间、多复变函数几何理论、域的分类、形变理论、$\bar{\partial}$问题、不变度量、调和分析、对称空间中的偏微分方程等等.

三、C^n中有界域的Bergman核函数显式表示的最新进展

波兰著名数学家M.Skwarczynski(他第一个把陆启铿在[Lu]中所提出的一个问题称之为陆启铿猜想[Sk])在[SK1]中透露,Bergman核函数的理论渊源于1921年在德国柏林的一个数学讨论班.该讨论班由E.Schmidt主持,S.Bergamn和S.Bochner都是该讨论班的成员.而S.Bergman当时还在柏林大学攻读博士学位.M.Schiffer于1981年在纪念S.Bergman(1895~1977)的文章[Sc]中谈到,当时给S.Bergman的任务是研究实区间上的正交展开,而他研究了复数平面中的区域D上的正交展开,其研究结果就导出了一个核函数$K_D(z,t)$,$(z,t)\in D\times D$.这就是现在称之为Bergman核函数的起始点,至今已有80年的历史了.

Bergman核函数理论的基本思想很容易推广到多个复变数的情况,它在多复变函数论发展的初期扮演一个非常重要的角色,而且十分不同于单复变.它的思想与方法激励与促进了数学中很多领域的发展,这不属于本文综述的范围.但有兴趣的读者可参阅以下文献:它对泛函分析的影响可见[Ar]与[Me];在经典位势理论中,Bergman核函数与格林函数有一个重要的关系[BS];Bergman度量在微分几何中有十分重要的地位,它

已是复几何中公认的 3 个经典的不变度量之一[Ko,Li];对函数论方面的影响可见[Br];直到 1970 年为止的有关文献可见[Be]的参考文献目录;至于 1970 年以后的有关文献,特别是有关全纯几何方面的文献,可见[Sk1];在中国的相关发展可见[Lu1].

众所周知,$\mathbf{C}^n$ 中的有界域都存在 Bergman 核函数.但哪些域的 Bergman 核函数能显式求出来呢?这是一个很自然的也是一个很重要的问题.而且一些重要问题的解决也依赖于 Bergman 核函数的显式表达.例如,Mostow 和 Siu 对负截曲率的紧致 Kahler 流形的万有覆盖一定双全纯等价于超球的重要猜想给出的反例中,蛋型域 $\{z\in\mathbf{C}^2:|z_1|^2+|z_2|^{14}<1\}$ 的 Bergman 核函数的显表达式起了关键作用[MS];在给陆启铿猜想以反例时,常常用到 Bergman 核函数的显表达式[Bo].因此,如何求 Bergman 核函数的显表达式便成了多复变的一个重要研究方向,至今还一直吸引数学家进行研究[BS,Ch,CG,DA,DA1,Eg,FH,FH1,GS,Han,Nag,YL,YL1,TW,LP,LP1,GBGW,WT,BFS,OPY],常盛不衰.

设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域,令 $L_a^2(D)$ 表示在 D 全纯且平方可积的所有函数形成的空间,即若 $H(D)$ 表示所有在 D 全纯的函数的集合,则

$$L_a^2(D)=\{f(Z)\in H(D):\int_D|f(Z)|^2\mathrm{d}V<\infty\}$$

这里 $\mathrm{d}V$ 表示域 D 的欧氏测度.$L_a^2(D)$ 是一个 Hilbert 空间,其内积为:

$$\langle f,g\rangle=\int_D f(Z)\overline{g(Z)}\mathrm{d}V,f,g\in L_a^2(D).$$

它具有可数基.设 $\{\phi_k(Z)\},k=1,2,\cdots$ 是 $L_a^2(D)$ 的一组完备的标准正交基,则

$$K_D(Z,T)=\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k(Z)\overline{\phi_k(T)},(Z,T)\in D\times \mathrm{D} \tag{0.1}$$

称为域 D 的 Bergman 核函数,它是惟一的,且不依赖于域 D 的完备标准正交基的选择.它又称为域 D 的再生核,即它有如下的再生性质:对任意的 $f\in L_a^2(D)$,我们有

$$f(Z)=\int_D f(T)K_D(Z,\overline{T})\mathrm{d}V_T,Z\in \mathrm{D}. \tag{0.2}$$

这是域 D 的 Bergman 函数的一个特征性质,也就是说,式子(0.2)可以作为域 D 的 Bergman 核函数的定义.

由于从 $K_D(Z,\overline{Z})$ 很容易得到 $K_D(Z,T)$,因而下面我们只考虑 $K_D(Z,\overline{Z})$.

设 T_0 是 D 的一个固定点,$W=F(Z)$是域 D 的全纯自同构变换,它

把 Z_0 映为 T_0，设 $J_F(Z)$ 是此变换的 Jacobian 矩阵，令 det 表示行列式，则有

$$K_D(Z_0,\overline{Z_0})=K_D(T_0,\overline{T_0})|\det J_F(Z_0)|^2, \tag{0.3}$$

若 D 是一个可递域，则 Z_0 可以是 D 内任意一点而再以 Z 表之，就得到如何求可递域 D 的 Bergman 核函数的公式，即

$$K_D(Z,\bar{Z})=c|\det J_F(Z_0)|^2|_{Z_0=Z} \tag{0.4}$$

以上各式都可用来寻求 Bergman 核函数的显表达式.

1. 有界齐性域的 Bergman 核函数

对有界齐性域（或称有界可递域）而言，若其全纯自同构可递群已知，则由(0.4)式即可求得其 Bergman 核函数的显表达式. 华罗庚[Hua]用此方法求出了以下四大类典型域（也称对称典型域或 Cartan 域）的 Bergman 核函数：

$$R_{\mathrm{I}}(m,n):=\{Z\in\mathbf{C}^{mn}:I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}}>0,\},$$

$$R_{\mathrm{II}}(p):=\{Z\in\mathbf{C}^{p(p+1)/2}:I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}}>0,\},$$

$$R_{\mathrm{III}}(q):=\{Z\in\mathbf{C}^{q(q-1)/2}:I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}}>0,\},$$

$$R_{\mathrm{IV}}(n):=\{Z\in\mathbf{C}^{n}:1+|ZZ'|^2-2Z\bar{Z}^{\mathrm{T}}>0,1-|ZZ'|^2>0\}.$$

上述式子中的 Z 分别表示 $m\times n$ 复矩阵，p 阶对称方阵，q 阶斜对称方阵和 n 维复向量，$\bar{Z}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 Z 的共轭转置. 它们的 Bergman 核函数分别为：

$$K_{R_{\mathrm{I}}(m,n)}(Z,\bar{Z}):=[V(R_{\mathrm{I}})\det(I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}})^{m+n}]^{-1},$$

$$K_{R_{\mathrm{II}}(p)}(Z,\bar{Z}):=[V(R_{\mathrm{II}})\det(I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}})^{p+1}]^{-1},$$

$$K_{R_{\mathrm{III}}(q)}(Z,\bar{Z}):=[V(R_{\mathrm{III}})\det(I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}})^{q-1}]^{-1},$$

$$K_{R_{\mathrm{IV}}(n)}(Z,\bar{Z}):=[V(R_{\mathrm{IV}})(1+|ZZ'|^2-2Z\bar{Z}^{\mathrm{T}})^{n}]^{-1}.$$

因而用(0.4)式求 Bergman 核函数的显表达式的方法称为求 Bergman 核函数的华罗庚方法.

众所周知，Cartan 域除了上述四大类之外，还有两个复维数分别为 16 和 27 的例外的 Cartan 域，分别记为 $R_{\mathrm{V}}(16)$ 与 $R_{\mathrm{VI}}(27)$，其矩阵表示分别为[XY,YW]：

$$\begin{aligned}R_{\mathrm{V}}(16):=&\{(Z,U):(Z-\bar{Z}^{\mathrm{T}})/(2\mathrm{i})-(U\bar{U}^{\mathrm{T}}+\bar{U}U')/2>0\}\\=&\{(z_7,z_8,z_1,\cdots,z_6,t,u)\in\mathbf{C}^{16}:(\operatorname{Im}z_7-|t|^2)(\operatorname{Im}z_8-|u|^2)\\&-\textstyle\sum_{j=1}^{6}[\operatorname{Im}z_j-2^{-1}(tQ_j^{\mathrm{T}}\bar{u}^{\mathrm{T}}+uQ_j\bar{t}^{\mathrm{T}})]^2>0,\operatorname{Im}z_7-|t|^2>0\},\end{aligned} \tag{0.4'}$$

这里

$$z=(z_1,\cdots,z_6),t=(t_1,\cdots,t_4)\in \mathbf{C}^4,u=(u_1,\cdots,u_4)\in \mathbf{C}^4,$$

$$I(-1)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},J=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},J(-1)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$Z=\begin{bmatrix}z_7&z\\z'&z_8I^{(6)}\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}t\\uQ_1\\\vdots\\uQ_6\end{bmatrix},Q_1=I^{(4)},Q_2=\mathrm{i}\begin{bmatrix}I^{(2)}&0\\0&-I^{(2)}\end{bmatrix},$$

$$Q_3=\begin{bmatrix}0&I^{(2)}\\-I^{(2)}&0\end{bmatrix},Q_4=\mathrm{i}\begin{bmatrix}0&I(-1)\\I(-1)&0\end{bmatrix},$$

$$Q_5=\begin{bmatrix}0&J(-1)\\J(-1)&0\end{bmatrix},Q_6=\mathrm{i}\begin{bmatrix}0&J\\J&0\end{bmatrix}.$$

同时,满足如下关系:

$$Q_\alpha Q_\beta^{\mathrm{T}}+Q_\beta Q_\alpha^{\mathrm{T}}=2\delta_{\alpha\beta}I^{(4)},\alpha,\beta=1,2,\cdots,6.$$

$$R_{\mathrm{VI}}(27)=\{(z_{11},z_{12},z_{13},z_{22},z_{23},z_{33})\\ \in \mathbf{C}^1\times\mathbf{C}^8\times\mathbf{C}^8\times\mathbf{C}^1\times\mathbf{C}^8\times\mathbf{C}^1:(2\mathrm{i})^{-1}(Z-Z^{\mathrm{T}})>0\},\quad (0.4'')$$

这里

$$Z=\begin{bmatrix}z_{11}&z_{12}&z_{13}\\z_{12}'&z_{22}I^{(8)}&z_{23}\\z_{13}'&z_{23}'&z_{33}I^{(8)}\end{bmatrix},\ z_{23}=\begin{bmatrix}zP_1\\\vdots\\zP_8\end{bmatrix},\ z=(z_1,\cdots,z_8)\in\mathbf{C}^8,$$

$$P_1=\begin{bmatrix}I(-1)&0\\0&-I^{(6)}\end{bmatrix},$$

$$P_2=\begin{bmatrix}J&0&0&0\\0&-J(-1)&0&0\\0&0&-J(-1)&0\\0&0&0&J(-1)\end{bmatrix},$$

$$P_3=\begin{bmatrix}0&I&0&0\\I(-1)&0&0&0\\0&0&0&-I\\0&0&I&0\end{bmatrix},$$

$$P_4=\begin{bmatrix}0&J(-1)&0&0\\I&0&0&0\\0&0&0&-J(-1)\\0&0&-J(-1)&0\end{bmatrix},$$

$$P_5=\begin{bmatrix}0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\\ I(-1) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -I & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$P_6=\begin{bmatrix}0 & 0 & J(-1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & J(-1)\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & J(-1) & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$P_7=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & I(-1)\\ 0 & 0 & -I(-1) & 0\\ 0 & I(-1) & 0 & 0\\ I & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$P_8=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & J\\ 0 & 0 & -J & 0\\ 0 & J & 0 & 0\\ -J(-1) & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

而且满足关系：

$$P_\alpha P_\beta'+P_\beta P_\alpha'=2\delta_{\alpha\beta}I^{(8)},\ \alpha,\beta=1,2,\cdots,8.$$

殷慰萍[YW]直接用华罗庚方法给出了它们的 Bergman 核函数的显表达式，分别为：

$$K_{R_{\mathrm{V}}}=c\,\frac{[(2\mathrm{i})^{-1}(z_8-\overline{z_8})-uu^{\mathrm{T}}]^{60}}{\det[(2\mathrm{i})^{-1}(Z-Z^{\mathrm{T}})-2^{-1}(UU^{\mathrm{T}}+\overline{U}U')]^{12}},$$

$$K_{R_{\mathrm{VI}}}=c\,\frac{[-4^{-1}(z_{22}-\overline{z_{22}})(z_{33}-\overline{z_{33}})+4^{-1}(z-\overline{z})(z-\overline{z})^{\mathrm{T}}]^{126}}{\det[(2\mathrm{i})^{-1}(Z-Z^{\mathrm{T}})]^{18}}.$$

这样，所有 Cartan 域（即对称域）的 Bergman 核函数的显表达式都能给出. 对称域都是齐性域，但齐性域是不是对称域呢？Cartan 证明了当 $n\leqslant 3$ 时所有 $\mathbf{C}^n$ 中的有界齐性域都是对称域，因而他猜想齐性域也是对称域，这就是著名的 Cartan 猜想. 当时几乎所有的数学家都相信这个猜想是对的，因而都致力于这个方向去证明之，但都没有获得成功. 原因是这个猜想并不对. 直到 1959 年，前苏联数学家 I. I. Pjatetski Shapiro 举出反例，否定了 Cartan 猜想. 他指出

$$\left\{(z_1,\cdots,z_4)\in\mathbf{C}^4:(2\mathrm{i})^{-1}\left[\begin{pmatrix}z_1 & z_2\\ z_2 & z_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{z}_1 & \overline{z}_2\\ \overline{z}_2 & \overline{z}_3\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}z_4\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_4\\ 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}>0\right\}$$

及

$$\{(z_1,\cdots,z_5)\in\mathbf{C}^5:(2i)^{-1}\left[\begin{pmatrix}z_1 & z_2\\ z_2 & z_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\bar z_1 & \bar z_2\\ \bar z_2 & \bar z_3\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}z_4\\ z_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_4\\ z_5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}>0\}$$

是两个不可分解的非对称齐性域并解析等价于有界域.在此基础上,他引进了 Siegel 域的概念,并与 S.S.Gindikin, E.B.Vinberg 一起证明了任何有界齐性域都解析等价于 Siegel 域的这一重要定理.下面引进 Siegel 域的概念.

设 V 是空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开凸锥且不包含任何整条直线,映照 $F(u,v):\mathbf{C}^m\times\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^n$ 称为 V-爱尔密形式,如果它满足下列 4 个条件:

(1) $F(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,v)=\lambda_1F(u_1,v)+\lambda_2F(u_2,v),\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{C}$,

(2) $F(u,v)=\overline{F(v,u)}$,

(3) $F(u,v)\in\overline{V}$,

(4) $F(u,v)=0\Rightarrow u=0$.

这里 $\overline{V}$ 是锥 V 的闭包,则集合

$$\{\xi=(z,u)\in\mathbf{C}^{n+m}:[\mathrm{Im}\,z-F(u,u)]\in V\}$$

称为第二类 Siegel 域,若 $m=0,F\equiv0$,则称为第一类 Siegel 域.

S.G. Gindikin 利用复幂函数的概念,给出了齐性 Siegel 域的 Bergman 核函数的显表达式[Gin]:

$$B(\xi,\bar\xi)=\frac{\Gamma_{V^*}(q^*-2d)}{4^n\pi^{m+n}\Gamma_V(-d)}[\mathrm{Im}\,z-F(u,u)]^{2d-q}.$$

许以超[XY1]用满足一组矩阵方程的一组矩阵来定义 N-Sigel 域.关于 N-Siegel 域的确切定义,不用两个以上的印刷页是说不清的,因而就不能写在这里了.许以超[XY]也得到了 N-Siegel 域的 Bergman 核函数的显表达式:

$$K(z,u;\bar z,u)=c_0\prod_{j=1}^{N}\Delta_j[\mathrm{Im}(z)-F(u,u)]^{\mu_j},$$

这里 c_0 是正实常数,$(\mu_1,\cdots,\mu_N)=-(\psi_1,\cdots,\psi_N)M^{-1},\psi_j=n_j+n_j'+m_j$, $1\leqslant j\leqslant N$.总而言之,对齐性域而言,若其全纯自同构可递群能求得,则其 Bergman 核函数的显表达式就能用华罗庚方法得到.

2. 蛋型域的 Bergman 核函数

除了齐性域外,能求得 Bergman 核函数的显表达式的域不多.其中较早被研究并受重视的当推蛋型域(egg domain)或称为广义复椭球(complex ellipsoid),也有人称为复卵形域(complex oval).它一般是指如下形式的域.

$$E(p_1,\cdots,p_n)=\{z_1,\cdots,z_n\}\in\mathbf{C}^n:|z_1|^{2p_1}+\cdots+|z_n|^{2p_n}<1\},$$

这里 $p_1,\cdots,p_n$ 都是正实数，而且 $z_j(j=1,\cdots,n)$ 都是复数. 更广泛的情形是每一个 z_j 都是复向量的情况，即 $z_j=(z_{j1},\cdots,z_{jm_j})$ 而 $|z_j|^{2p_j}=[\sum_{k=1}^{m_j}|z_{jk}|^2]^{p_j}$，这种更一般的域记为 $E(p_1,\cdots,p_n;m_1,\cdots,m_n)$ 或简记为 $E_{p;m}$. 由于这两种域都是包含原点为中心的 Reinhardt 域，而 $\mathbf{C}^n$ 中的这种 Reinhardt 域(记为 D)的完备标准正交函数系为

$$\left\{\frac{z_1^{j_1}z_2^{j_2}\cdots z_n^{j_n}}{\| z_1^{j_1}z_2^{j_2}\cdots z_n^{j_n}\|}\right\}, j_1,\cdots,j_n=0,1,2,\cdots$$

其中

$$\| z_1^{j_1}z_2^{j_2}\cdots z_n^{j_n}\| = \left[\int_D |z_1^{j_1}z_2^{j_2}\cdots z_n^{j_n}|^2\mathrm{d}V\right]^{1/2}.$$

只要求出上式的值，由(0.1)式可知，再将其无穷级数求出和函数便得到 D 的 Bergman 核函数的显表达式. 这种求 Bergman 核函数的方法称为级数法. 对上述两种域，一般都试图用级数法得到其 Bergman 核函数的显表达式. 首先 S. Bergman[Be2, p. 82]用这种方法求得域 $E(1,K)$ 的 Bergman 核函数的显表达式为：

$$\pi^{-2}K^{-1}[2Y^3+(K-1)Y^2], \tag{0.5}$$

其中

$$Y=(1-|z_1|^2)^{1/K}[(1-|z_1|^2)^{1/K}-|z_2|^2]^{-1}.$$

当 $p_1=p_2=\cdots=p_{n-1}=1$ 时，并令 $z=(z_1,\cdots,z_{n-1}), z_n=w, p_n=K$，则域 $E(1,\cdots,1,K)$ 的 Bergman 核函数由 D'Angelo[DA]用级数法得到其表达式为：

$$\pi^{-n}KF(Y)(1-|z|^2)^{-(nK+1)/K}, \tag{0.6}$$

其中

$$F(Y)=\sum_{j=1}^{n}b_j\Gamma(j+1)Y^{1+j}, Y=[1-|w|^2(1-|z|^2)^{-1/K}]^{-1}.$$

时隔 16 年，D'Angelo[DA1]把上述域 $E(1,\cdots,1,K)$ 中的 w 推广为 m 维复向量，即 $w=(w_1,\cdots,w_m)$. 用同样的方法得到其Bergman 核函数的显表达式为：

$$K^{-(n-1)}\pi^{-(m+n-1)}G(Y)(1-|z|^2)^{-(n+m/K)}, \tag{0.7}$$

其中

$$G(Y)=\sum_{j=1}^{n}b_j\Gamma(j+m)Y^{m+j},$$

Y 的形式与 $F(Y)$ 中的相同，但是 $|w|^2=\sum_{j=1}^{m}|w_j|^2$. 事实上，这种域的 Bergman 核函数早在 1969 年就由 Chalmers[Cha, 定理 1.1]求出，不过方

法不同而已．当 $1/p_1,\cdots,1/p_n$ 为正整数时，Zinovev[Zin]用级数法得到了域 $E(p_1,\cdots,p_n)$的 Bergman 核函数的显表达式为：

$$\frac{p_1,\cdots,p_n}{\pi^n}\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}\sum_{j_1=1}^{p_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{p_n}\frac{1}{1-y_{j_1,1}-\cdots-y_{j_n,n}}\Big|_{x_v=|z_v|^2},\quad(0.8)$$

其中 $y_{j,i}=x_i^{1/p_i}\epsilon_{j,i}$，$1\leqslant j\leqslant p_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant v\leqslant n$．这里，$\epsilon_{j,i}$都是 $1/p_i$ 次单位本原根．

当$(p_1)^{-1},\cdots,(p_{n-1})^{-1}$为正整数，$(p_n)^{-1}=p$ 为正实数时，Francsics 和 Hanges[FH2，定理 3]也用级数法求出了域 $E(p_1,\cdots,p_n)$的 Bergman 核函数的显表达式为：

$$\frac{p}{\pi^n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{p_k^2}{|z_k|^{2((p_k)^{-1}-1)}}\sum_{j_1=1}^{1/p_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{1/p_{n-1}}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{\bar{\omega}_1^{j_1}\cdots\omega_{n-1}^{j_{n-1}}}{(1-t)^p-|z_n|^2}\right]\Big|_{t=\sum_{r=1}^{n-1}|z_r|^2\bar{\omega}_r^{j_r}},$$

$$(0.9)$$

其中 ω_j 是 $1/p_j$ 次单位本原根．当 $1/p_1,\cdots,1/p_{n-1}$为正整数，$1/p_n=p$ 为正实数时，文[FH2]指出域 $E_{p;m}$的 Bergman 核函数能用同样的级数方法求出．

当 $p_1,\cdots,p_n$ 都是正整数时，域 $E(p_1,\cdots,p_n)$的 Bergman 核函数能被超几何函数表示出来[FH2，定理 1]．但高维的超几何函数是一个收敛的无穷级数，不能用有限和的形式表示出来．这种情况，我们认为其显表达式尚未求得，因而其结果就略去不提．

求 Bergman 核函数的华罗庚方法，只对齐性域适用；而级数法只对 Reinhardt 域适用．在寻求 Bergman 核函数的显表达式的过程中，至今为止，得到了三个很有用的原理，被称之为紧缩(deflation)原理、膨胀(inflation)原理和折迭(folding)原理．利用这三个原理可以从已知的 Bergman 核函数的显表达式而得到新的域的 Bergman 核函数的显表达式，并能简化计算[BFS]．我们先将这三个原理叙述如下[BFS]．

紧缩原理：设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中由不等式$\phi(z)<1$ 所界定的域，这里 $\phi(z)$ 是在 Ω 的闭包的某一邻域连续的非负函数．令 K_1 表示 $\mathbf{C}^{n+2}$中的域 Ω_1 的 Bergman 核函数，Ω_1 由不等式 $\phi(z)+|\xi_1|^{2/p}+|\xi_2|^{2/q}<1$ 所界定，p 与 q 都是正实数．令 K_2 表示 $\mathbf{C}^{n+1}$中由不等式 $\phi(z)+|\xi|^{2/(p+q)}<1$ 所界定的域 Ω_2 的 Bergman 核函数，则下述等式就称为紧缩原理：

$$\pi K_2(z,0;w,0)=\frac{\pi^2\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}K_1(z,0,0;w,0,0).$$

膨胀原理：设 D 是 $\mathbf{C}^{n+1}$中的有界完备 Hartogs 域，由不等式 $|\xi|^2<\phi(z)$所界定，这里 $\xi\in\mathbf{C}$，$z\in\mathbf{C}^n$，而 $\phi(z)$在 $\mathbf{C}^n$ 中的某一个有界域的内部

是有界的、正的和连续的函数；G 是 $\mathbf{C}^{n+m}$ 中的由不等式 $|Z|^2<\phi(z)$ 所界定的域，这里 $Z=(Z_1,\cdots,Z_m)$，$|Z|^2=|Z_1|^2+\cdots+|Z_m|^2$. 由于存在函数 $L(z,w,s)$，使得 D 的 Bergman 核函数 $K_D(z,\xi;w,\eta)$ 能表为 $L(z,w,\xi\bar{\eta})$，因而域 G 的 Bergman 核函数 $K_G(z,Z;w,W)$ 能由下列关系式给出：

$$K_G(z,Z;w,W)=\pi^{-(m-1)}[\partial^{m-1}L(z,w,s)/\partial s^{m-1}]_{s=\langle Z,W\rangle}, \quad (0.10)$$

这里 $\langle Z,W\rangle=Z_1\overline{W}_1+\cdots+Z_m\overline{W}_m$.

折叠原理：折叠原理就是 Bell[Bl1]的关于 Bergman 核函数在逆紧映照下的变换公式，即

设 G 与 D 都是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$F:G\to D$ 是映 G 为 D 的阶为 m 的逆紧映照. 令 $u:=\det F'$，令 $\Phi_1,\cdots,\Phi_m$ 表示定义于 $D-V$ 上的 F 的 m 个局部的逆映照，这里 $V:=\{F(z):z\in G,u(z)=0\}$. 再令 $U_k:=\det\Phi_k'$，则 G 的 Bergman 核 K_G 与 D 的 Bergman 核 K_D 的变换公式为[JaP]：

$$\sum_{k=1}^{m}K_G(z,\Phi_k(w))\overline{U_k(w)}=u(z)K_D(F(z),w),z\in G,$$
$$w\in D-V.$$

从 $\mathbf{C}^2$ 中的域 $E(1,K)$ 的 Bergman 核函数显表达式(0.5)出发，对 z_1 用膨胀原理就得到 $\mathbf{C}^n$ 中的域 $E(1,\cdots,1,K)$ 的 Bergman 核函数的显表达式(0.6). 再对 z_2 用膨胀原理就得到 $\mathbf{C}^{n+m}$ 中的域 $E(1,\cdots,1,K;m)$ 的 Bergman 核函数的显表达式(0.7). 应用膨胀原理事实上就是按(0.10)式求偏微商，因而 D'Angelo 的文[DA,DA1]的结果，只要用(0.5)的结果连续用两次膨胀原理而已，非常简单，在草稿上用不了几行就得出结果，比大学低年级的微积分习题还容易. 同样，从(0.9)出发，连续用膨胀原理就可以得到域 $E_{p;m}$ 的 Bergman 核函数的显表达式，当然，此时 $1/p_1,\cdots,1/p_{n-1}$ 都是正整数，而 $1/p_n=K$ 为任意正实数. 重复使用膨胀原理和折迭原理，容易给出更一般的域的 Bergman 核函数的显表达式. 并不是所有蛋型域的 Bergman 核函数的显表达式都能求出，当 $E(p_1,\cdots,p_n)$ 或 $E_{p;m}$ 中的 $p_1,\cdots,p_n$ 有两个或两个以上的数是正实数又不为整数时，其相应的域的 Bergman 核函数的显表达式就求不出来，至少到目前为止是这样，因而就需要对蛋型域的 Bergman 核函数进行估计. 龚升和郑学安做了这方面的工作，他们论文的中文文本发表于《中国科学》[GZ]，而其英文文本则发表于《Trans. of AMS》[GZ1]. Chieh-hsien Tiao 在美国普渡大学(Purdue Univ.)1997～1998 年度的博士论文[Tia]中，在其导师 D. W. Catlin 的指导下，对一般的 Reinhardt 域的 Bergman 核函数进行了估计.

3. 华罗庚域的 Bergman 核函数

除了有界齐性域和上述蛋型域能显式求出其 Bergman 核函数外，1998 年 2 月，当殷慰萍访问法国高等科学研究院(IHES)时，讨论中受 Roos 的启发而引进了四类可以显式求出其 Bergman 核函数的域，并称之为 Cartan-Hartogs 域或超 Cartan 域.

$$Y_{\mathrm{I}}(N,m,n;K)=\{W\in\mathbf{C}^N,Z\in R_{\mathrm{I}}(m,n):|W|^{2K}<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}),K>0\},$$

$$Y_{\mathrm{II}}(N,p;K)=\{W\in\mathbf{C}^N,Z\in R_{\mathrm{II}}(p):|W|^{2K}<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}),K>0\},$$

$$Y_{\mathrm{III}}(N,q;K)=\{W\in\mathbf{C}^N,Z\in R_{\mathrm{III}}(q):|W|^{2K}<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}),K>0\},$$

$$Y_{\mathrm{IV}}(N,n;K):=\{W\in\mathbf{C}^N,Z\in R_{\mathrm{IV}}(n):|W|^{2K}<1-2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}+|ZZ'|^2,K>0\},$$

这里 $R_{\mathrm{I}}(m,n)$,$R_{\mathrm{II}}(p)$,$R_{\mathrm{III}}(q)$和 $R_{\mathrm{IV}}(n)$分别表示华罗庚意义下的第一、第二、第三、第四类 Cartan 域. $\overline{Z}^{\mathrm{T}}$ 表示 Z 的共轭转置. det 表示行列式. N,m,n 都是自然数. 这四类 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核函数都可以显式求出[YW1-YW8,GY].

作者还进一步引进以下四类域，称之为 Cartan-egg 域：

$$CE_{\mathrm{I}}(N_1,N_2,m,n;K):=\{W_1\in\mathbf{C}^{N_1},W_2\in\mathbf{C}^{N_2},Z\in R_{\mathrm{I}}(m,n):$$
$$|W_1|^2+|W_2|^{2K}<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})\},$$

$$CE_{\mathrm{II}}(N_1,N_2,p;K):=\{W_1\in\mathbf{C}^{N_1},W_2\in\mathbf{C}^{N_2},Z\in R_{\mathrm{II}}(p):$$
$$|W_1|^2+|W_2|^{2K}<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})\},$$

$$CE_{\mathrm{III}}(N_1,N_2,q;K):=\{W_1\in\mathbf{C}^{N_1},W_2\in\mathbf{C}^{N_2},Z\in R_{\mathrm{III}}(q):$$
$$|W_1|^2+|W_2|^{2K}<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})\},$$

$$CE_{\mathrm{IV}}(N_1,N_2,n;K):=\{W_1\in\mathbf{C}^{N_1},W_2\in\mathbf{C}^{N_2},Z\in R_{\mathrm{IV}}(n):$$
$$|W_1|^2+|W_2|^{2K}<1-2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}+|ZZ'|^2\}.$$

其中，$K>0$，$|W_j|^2=\sum_{k=1}^{N_j}|w_{jk}|^2$. 这些 Cartan-egg 域的 Bergman 核函数的显表达式也能够求出[YW9,YW10,YWZG].

其后，殷慰萍又进一步引进了更为一般的域，称之为华罗庚域：

$$HE_{\mathrm{I}}(N_1,\cdots,N_r,m,n;p_1,\cdots,p_r):$$
$$=\{W_j\in\mathbf{C}^{N_j},Z\in R_{\mathrm{I}}(m,n):\textstyle\sum_{j=1}^{r}\|W_j\|^{2p_j}<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}),$$
$$p_j>0,j=1,\cdots,r\},$$

$$HE_{\mathrm{II}}(N_1,\cdots,N_r,p;p_1,\cdots,p_r):$$
$$=\{W_j\in\mathbf{C}^{N_j},Z\in R_{\mathrm{II}}(p):\textstyle\sum_{j=1}^{r}\|W_j\|^{2p_j}<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}),$$
$$p_j>0,j=1,\cdots,r\},$$

$$HE_{\mathrm{III}}(N_1,\cdots,N_r,q;p_1,\cdots,p_r):$$
$$=\{W_j\in\mathbf{C}^{N_j},Z\in R_{\mathrm{III}}(p):\textstyle\sum_{j=1}^{r}\|W_j\|^{2p_j}<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}),$$

$p_j>0, j=1,\cdots,r\}$,

$HE_{\mathrm{IV}}(N_1,\cdots,N_r,n;p_1,\cdots,p_r)$:

$=\{W_j\in\mathbf{C}^{N_j}, Z\in R_{\mathrm{IV}}(p): \sum_{j=1}^{r}\|W_j\|^{2p_j}<1-2ZZ^{\mathrm{T}}+|ZZ'|^2,$

$p_j>0, j=1,\cdots,r\}$,

其中，$\|W_j\|^2=\sum_{k=1}^{N_j}|w_{jk}|^2$.

下列五种情况下的华罗庚域的 Bergman 核函数能以显式表达：

(0) $r=1$, $p_r=p_1=K$. 这就是 Cartan-Hartogs 域.

(Ⅰ) $p_1=p_2=\cdots=p_{r-1}=1$, $p_r=K>0$. 这就是 Cartan-egg 域.

(Ⅱ) $1/p_1,\cdots,1/p_r$ 都是正整数.

(Ⅲ) $1/p_1,\cdots,1/p_{r-1}$都是正整数，而 $p_r=K>0$ 是正实数.

(Ⅳ) $p_1,\cdots,p_r$ 都是正整数.

若在华罗庚域的定义中，将不等式右边的式子加上一个正幂次 K，这样得到的域称为广义华罗庚域. 他们在上述五种情况下也可以得到其 Bergman 核函数的显表达式. 很显然，广义华罗庚域最为广泛，它包含了 Cartan-Hartogs 域、Cartan-egg 域和华罗庚域. 如何求这些域的 Bergman 核函数的显表达式是本书第 4 章的主要内容. 上述第一部份材料选自文献[Kral]，第三部份材料来自文献[YW45].

第一章

对称典型域

原书空白页

第一章 对称典型域

有界对称典型域又称 Cartan 域，它一定是齐性的(也叫可递的)，其不可约的形式共有四大类和复维数为 16 和 27 的两个例外域. 其四大类的矩阵形式如下：

$R_{\mathrm{I}}(m,n):=\{Z\in\mathbf{C}^{mn}:I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}}>0\}$，

$R_{\mathrm{II}}(p):=\{Z\in\mathbf{C}^{p(p+1)/2}:I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}}>0\}$，

$R_{\mathrm{III}}(q):=\{Z\in\mathbf{C}^{q(q-1)/2}:I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}}>0\}$，

$R_{\mathrm{IV}}(n):=\{Z\in\mathbf{C}^{n}:1+|ZZ'|^2-2Z\bar{Z}^{\mathrm{T}}>0,1-|ZZ'|^2>0\}$.

上述式子中的 Z 分别表示 $m\times n$ 复矩阵，p 阶对称方阵，q 阶斜对称方阵和 n 维复向量. 两个例外域的表示式见第一章第 3 节. 这些域是 E. Cartan 在 1936 年对复对称域进行分类时发现的，故又称 Cartan 域. 华罗庚则称其为典型域. 华罗庚对多复变的研究主要集中在典型域的研究上，其研究成果获得第一届国家自然科学奖一等奖，并总结在其经典著作《多复变函数论中的典型域上的调和分析》一书中. 主要结果是显式求出了四大类典型域的 Bergman 核、Cauchy 核和 Poisson 核，建立了其上的多复变函数论的基本理论. 但是华罗庚对两个例外典型域并未进行研究. 本章则对两个例外典型域直接利用其全纯自同构可递群显式求出了它们的 Bergman 核、Cauchy 核和 Poisson 核，并给出了四大类典型域的全纯自同构最大群以及由 Caratheodory 测度和 Eisenman-Kobayashi 测度刻画的典型域的特征性质等等. 第一类、第二类、第三类和第四类典型域华罗庚又分别称它们为矩阵双曲空间、对称矩阵双曲空间、斜对称矩阵双曲空间和超球双曲空间，其中超球双曲空间又特别称之为李球.

1. 斜对称双曲空间的解析自同胚最大群

在北京大学程民德教授的建议下，中国科学院数学研究所陆启铿先生于 1959 年秋季为当时大学 3 年级的 10 位同学开设了多复变函数论专门化，为时 3 年. 这 10 位同学除作者外，还有钟家庆、孙继广、陈志华、石赫、文涛、陈志鹤、江润富、王大明、曾宪立，并与 13 位单复变函数论专门化的同学(杨乐、张广厚、陈怀惠、吕以辇、顾永兴、张顺燕、张南岳、周连

弟、戴自雄、于臣、陈锡智、王惠民、陈祖浩)以及泛函分析的 4 位同学(蔡愉祖、吴海蓉、王文娟、沈镜心)组成函数论班.上了半年的专业基础课《多复变函数引论》后,由于各种政治运动而停课.到 1961 年秋季才恢复正常的教学秩序.陆启铿在讲授《典型流形与典型域》时,在课堂上指出第三类典型域当其中的斜对称矩阵为奇数阶时,其全纯自同构最大群尚未定出.那时所有 10 位同学都在各自考虑这个问题,由于我和钟家庆进行了讨论,相互交流,顺利地各自都定出了第三类典型域的解析自同胚最大群,合作写成大学毕业论文,并在北京大学学报(自然科学版)1962 年第 3 期上发表.

习知,四类典型域分别容许以下的解析自同胚群,通常称之为运动群:

Γ^{I}:
$$W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$
其中矩阵 $A=A^{(m)}, B=B^{(m,n)}, C=C^{(n,m)}, D=D^{(n)}$ 适合:
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I^{(m)} & 0 \\ 0 & -I^{(n)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I^{(m)} & 0 \\ 0 & -I^{(n)} \end{bmatrix}.$$
Γ^{II}:
$$W=(AZ+B)(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}.$$
其中 A, B 为 p 阶方阵,适合:
$$\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I^{(p)} & 0 \\ 0 & -I^{(p)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I^{(p)} & 0 \\ 0 & -I^{(p)} \end{bmatrix}.$$
Γ^{III}:
$$W=(AZ+B)(-\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}.$$
其中 A, B 为 q 阶方阵,适合:
$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I^{(q)} & 0 \\ 0 & -I^{(q)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I^{(q)} & 0 \\ 0 & -I^{(q)} \end{bmatrix}.$$
Γ^{IV}:
$$w=\rho^{-1}\left\{\left(\frac{zz'+1}{2}, \mathrm{i}\,\frac{zz'-1}{2}\right)C'+zD'\right\},$$
其中
$$\rho=\begin{cases} \left[\left(\dfrac{zz'+1}{2}, \mathrm{i}\,\dfrac{zz'-1}{2}\right)A'+zB'\right]\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} & \text{当 } \det A>0, \\ \left[\left(\dfrac{zz'+1}{2}, \mathrm{i}\,\dfrac{zz'-1}{2}\right)A'+zB'\right]\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{当 } \det A<0, \end{cases}$$
而且,矩阵 $A=A^{(2)}, B=B^{(2,N)}, C=C^{(N,2)}, D=D^{(N)}$ 皆为实数矩阵,适合:
$$AA'-BB'=I^{(2)}, AC'=BD', CC'-DD'=-I^{(N)}.$$
特别,保持原点不变的子群分别是:

Γ_0^{I}: $W = UZV$, $UU' = U'U = I^{(m)}$, $VV' = V'V = I^{(n)}$.

Γ_0^{II}: $W = U'ZU$, $U\overline{U}' = \overline{U}'U = I^{(p)}$.

Γ_0^{III}: $W = U'ZU$, $UU' = U'U = I^{(q)}$.

Γ_0^{IV}: $w = e^{i\theta}zD$, $\overline{D} = D$, $DD' = D'D = I^{(N)}$, θ 为实数.

一个重要问题是上述运动群是否已经包含了其所对应的域的全部可能的解析自同胚？这一问题在单复变函数论中早已解决：任何一个将单位圆变成自己的一一的解析变换一定是满足一定条件的分式线性变换. 但在多复变函数论中情况远为复杂，1943 年 C. L. Siegel[Si]证明域 R_{II} 的解析自同胚最大群就是运动群 Γ^{II}，直到 1955 年 H. Klingen[Ki]利用类似于 C. L. Siegel 的方法证明：对域 R_{I}，当 $m \neq n$ 时，其解析自同胚最大群就是 Γ^{II}，而当 $m = n$ 时，还要加上一个形为 $W = Z'$ 的变换. 稍后，在 1956 年[Ki1]，他又证明：对域 R_{III}，当 q 为偶数时，其解析自同胚最大群就是运动群 Γ^{III}（当 $q = 4$ 时有一个例外情形）. 但是，当 q 为奇数的情形和对域 R_{IV} 一直没有得到解决. 事实上，域 R_{III} 当 q 为奇数时其问题之所以留下，是因为上两位的作者的方法基本上都要利用自变量方阵 Z 的行列式可以不为零的事实，而对域 R_{III} 当 q 为奇数时，恒有 $|Z| = 0$.

作者的导师陆启铿先生曾经指出，在 H. Klingen 的方法中自始至终没有利用 Bergmann 度量方阵，并预测若用及度量方阵则问题可能解决. 果然，在利用了 Bergmann 度量方阵后，作者对域 R_{III}（不分奇偶的）解决了上面提出的问题.

I.1 记号和引理

I.1.1 因为域 R_{III} 是可递域，因此为了证明域 R_{III} 的解析自同胚最大群 G 就是运动群 Γ^{III}（当 $q = 4$ 时有一个例外），只要证明域 R_{III} 的所有保持原点不变的解析自同胚所成的 G 的子群 G_0 就是 Γ_0^{III} 就够了. 事实上，若 $g \in G$，则 g 必将域 R_{III} 内某一点 a 变为 0，即 $g(a) = 0$. 可知，存在 $h \in \Gamma^{\mathrm{III}}$ 使得 $h(a) = 0$，则变换 $\tau = gh^{-1}$ 为保持原点不变的域 R_{III} 的解析自同胚，故 $\tau \in \Gamma_0^{\mathrm{III}}$，$g = \tau h$，故 $g \in \Gamma^{\mathrm{III}}$.

I.1.2 设解析变换 $w = (f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z))$ 把有界可递域 D 一一映为 D^*，则有[Lu4]：

$$T_D(z, \bar{z}) = \frac{\partial w}{\partial z} T_{D^*}(w, \bar{w}) \overline{\frac{\partial w'}{\partial z}},$$

其中 $T_D(z, \bar{z})$ 和 $T_{D^*}(w, \bar{w})$ 分别表示 D 和 D^* 的 Bergmann 度量方阵.

$\frac{\partial w}{\partial z}$是变换 $w=f(z)$在点 z 处的函数行列阵.

Ⅰ.1.3 域 R_{III}是圆型域,对圆型域有以下事实:任何一个把以原点为中心的有界圆型域一一映为自己而使中心不变的解析变换必为线性变换[Lu4],并且由于 $T_{R_{\mathrm{III}}}(0,0)=2(q-1)I$,故对 R_{III}是酉线性变换.

Ⅰ.1.4 由 1.3 易知,若 S 是将域R_{III}一一映为自己且保持原点不变的解析变换,则 S 具有形式:

$$w=zA, \tag{1.1.1}$$

其中

$$z=(z_{12},z_{13},\cdots,z_{1q},z_{23},\cdots,z_{2q},\cdots,z_{q-2\,q-1},z_{q-2\,q},z_{q-1\,q}),$$

$$w=(w_{12},w_{13},\cdots,w_{1q},w_{23},\cdots,w_{2q},\cdots,w_{q-2\,q-1},w_{q-2\,q},w_{q-1\,q}).$$

$A=\frac{\partial w}{\partial z}$是$\frac{1}{2}q(q-1)$阶常数酉方阵.今后,双指标$(i,j)$的出现次序总是:

$(1,2),(1,3),\cdots,(1,q),(2,3),\cdots,(2,q),\cdots,(q-1,q)$.

把向量 w 排成下列反对称矩阵 W:

$$W=\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1q} \\ & 0 & w_{23} & \cdots & w_{2q} \\ & & \ddots & \cdots & \\ -w_{ij} & & & \ddots & w_{q-1\,q} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1.2}$$

则(1.1.1)可以写成

$$W=\sum_{i<j}z_{ij}D_{ij}, \tag{1.1.3}$$

其中 D_{ij}实为由方阵A 中第(i,j)行的元素按(1.1.2)方法所排成的 q 阶反对称常数矩阵.例如,若令:

$$A=\begin{pmatrix} a_{12}\ a_{13} & \cdots & a_{1q}\ a_{23} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{q-1\,q} \\ b_{12}\ b_{13} & \cdots & b_{1q}\ b_{23} & \cdots & b_{2q} & \cdots & b_{q-1\,q} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix},$$

则

$$D_{12}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1q} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2q} \\ & & \ddots & \cdots & \\ -a_{ij} & & & \ddots & a_{q-1\,q} \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{13}=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1q} \\ & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2q} \\ & & \ddots & \cdots & \\ -b_{ij} & & & \ddots & b_{q-1\,q} \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其余仿此类推.以后遇有 D_{ij} 均作此理解.

Ⅰ.1.5 今后我们用 I_{ij} 表示 (i,j) 位置 $(i<j)$ 的元素是 1,而 (j,i) 处元素是 -1,其余皆为 0 的 q 阶斜对称方阵.

Ⅰ.1.6 本文主要利用 Bergmann 度量方阵.习知,域 $R_{Ⅲ}$ 的度量方阵 $T_{Ⅲ}(Z,\bar{Z})$ 有以下表示式[Lu5]:

$$T_{Ⅲ}(Z,\bar{Z})=2(q-1)[(I+\bar{Z}Z)^{-1}\times\cdot(I+\bar{Z}Z)^{-1}]_{sk}$$

其中 $[C\times\cdot C]_{sk}$ 表示方阵 C 的斜对称值乘积.其定义如下[Lu5]:

设 $C=(c_{ij})$ 为 q 阶方阵,双指标 (ij) 出现次序见Ⅰ.1.4,则 $[C\times\cdot C]_{sk}$ 表示 $\frac{1}{2}q(q-1)$ 阶方阵,其第 (i,j) 行与第 (k,l) 列交点处元素 $C_{(i,j)(k,l)}$ 是:

$$C_{(i,j)(k,l)}=C_{ik}C_{jl}-C_{il}C_{jk}.$$

Ⅰ.1.7 一些引理 在主要结果的证明中,需要用到一些事实,为了证明的方便与清楚,我们把它们写成引理.

引理 1 设 $W=f(Z)$ 为域 $R_{Ⅲ}$ 的保持原点不变的解析自同胚变换,则像点 W 和原像点 Z 有相同的秩,而且 $\bar{Z}Z$ 和相应的 $\overline{W}W$ 有相同的特征根.

证: 以 $T_{Ⅲ}(Z,\bar{Z})$ 表域 $R_{Ⅲ}$ 的度量方阵,由Ⅰ.1.2 有

$$T_{Ⅲ}(Z,\bar{Z})=\frac{\partial W}{\partial Z}T_{Ⅲ}(W,\overline{W})\overline{\frac{\partial W'}{\partial Z}}=AT_{Ⅲ}(W,\overline{W})\bar{A}'.\tag{1.1.4}$$

由于(见Ⅰ.1.6) $T_{Ⅲ}(Z,\bar{Z})=2(q-1)[(I+\bar{Z}Z)\times\cdot(I+\bar{Z}Z)]_{sk}$.以此代入(1.1.1)整理即得:

$$[(I+\bar{Z}Z)\times\cdot(I+\bar{Z}Z)]_{sk}=A[(I+\overline{W}W)\times\cdot(I+\overline{W}W)]_{sk}\bar{A}'.\tag{1.1.5}$$

由于 Z 和相应的 W 都是反对称的,故存在酉方阵 U 和 V 使:

$$Z=U\Lambda U'$$
$$W=V\Gamma V'.$$

其中

$$\Lambda=\begin{cases}\begin{bmatrix}0 & \lambda_1\\ -\lambda_1 & 0\end{bmatrix}\dotplus\begin{bmatrix}0 & \lambda_2\\ -\lambda_2 & 0\end{bmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{bmatrix}0 & \lambda_{[\frac{q}{2}]}\\ -\lambda_{[\frac{q}{2}]} & 0\end{bmatrix} & \text{当 } q \text{ 为偶数.}\\[2ex] \begin{bmatrix}0 & \lambda_1\\ -\lambda_1 & 0\end{bmatrix}\dotplus\begin{bmatrix}0 & \lambda_2\\ -\lambda_2 & 0\end{bmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{bmatrix}0 & \lambda_{[\frac{q}{2}]}\\ -\lambda_{[\frac{q}{2}]} & 0\end{bmatrix}\dotplus 0 & \text{当 } q \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

$$\Gamma=\begin{cases}\begin{bmatrix}0 & \mu_1\\ -\mu_1 & 0\end{bmatrix}\dotplus\begin{bmatrix}0 & \mu_2\\ -\mu_2 & 0\end{bmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{bmatrix}0 & \mu_{[\frac{q}{2}]}\\ -\mu_{[\frac{q}{2}]} & 0\end{bmatrix} & \text{当 } q \text{ 为偶数.}\\[2ex] \begin{bmatrix}0 & \mu_1\\ -\mu_1 & 0\end{bmatrix}\dotplus\begin{bmatrix}0 & \mu_2\\ -\mu_2 & 0\end{bmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{bmatrix}0 & \mu_{[\frac{q}{2}]}\\ -\mu_{[\frac{q}{2}]} & 0\end{bmatrix}\dotplus 0 & \text{当 } q \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

$\left[\frac{q}{2}\right]$表$\frac{q}{2}$的整数部分. $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{[\frac{q}{2}]}\geqslant 0$, $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_{[\frac{q}{2}]}\geqslant 0$.

由此,

$$\begin{aligned}&[(I+\bar{Z}Z)\times\cdot(I+\bar{Z}Z)]_{sk}\\ \sim&[(I+\bar{U}\bar{\Lambda}\Lambda U')\times\cdot(I+\bar{U}\bar{\Lambda}\Lambda U')]_{sk}\\ =&[\bar{U}\times\cdot U]_{sk}[(I+\bar{\Lambda}\Lambda)\times\cdot(I+\bar{\Lambda}\Lambda)]_{sk}[U'\times\cdot U']_{sk}\\ &[(I+\bar{W}W)\times\cdot(I+\bar{W}W)]_{sk}\\ =&(V\times\cdot V)_{sk}[(I+\bar{\Gamma}\Gamma)\times\cdot(I+\bar{\Gamma}\Gamma)]_{sk}(V'\times\cdot V')_{sk}\end{aligned}$$

而$[(I+\bar{\Lambda}\Lambda)\times\cdot(I+\bar{\Lambda}\Lambda)]_{sk}$与$[(I+\bar{\Gamma}\Gamma)\times\cdot(I+\bar{\Gamma}\Gamma)]_{sk}$都是$\frac{1}{2}q(q-1)$阶的对角形矩阵,其分别为(是 q 为偶数时的情形,q 为奇数时相似):

$$\begin{aligned}&[(1-\lambda_1^2)^2,(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2),(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2),\cdots,\\ &\ (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_{[\frac{q}{2}]}^2),(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_{[\frac{q}{2}]}^2),(1-\lambda_2^2)^2,\\ &\ (1-\lambda_2^2)(1-\lambda_3^2),(1-\lambda_2^2)(1-\lambda_3^2),\cdots,(1-\lambda_2^2)(1-\lambda_{[\frac{q}{2}]}^2),\\ &\ (1-\lambda_2^2)(1-\lambda_{[\frac{q}{2}]}^2),\cdots,(1-\lambda_{[\frac{q}{2}]}^2)^2],\\ &[(1-\mu_1^2)^2,(1-\mu_1^2)(1-\mu_2^2),(1-\mu_1^2)(1-\mu_2^2),\cdots,\\ &\ (1-\mu_1^2)(1-\mu_{[\frac{q}{2}]}^2),(1-\mu_1^2)(1-\mu_{[\frac{q}{2}]}^2),(1-\mu_2^2)^2,\\ &\ (1-\mu_2^2)(1-\mu_3^2),(1-\mu_2^2)(1-\mu_3^2),\cdots,(1-\mu_2^2)(1-\mu_{[\frac{q}{2}]}^2),\\ &\ (1-\mu_2^2)(1-\mu_{[\frac{q}{2}]}^2),\cdots,(1-\mu_{[\frac{q}{2}]-1}^2)^2,(1-\mu_{[\frac{q}{2}]-1}^2)(1-\mu_{[\frac{q}{2}]}^2),\\ &\ (1-\mu_{[\frac{q}{2}]-1}^2)(1-\mu_{[\frac{q}{2}]}^2),(1-\mu_{[\frac{q}{2}]}^2)^2].\end{aligned}$$

以此代入(1.1.5)并注意到 $A,(U\times\cdot\overline{U})_{sk},(U'\times\cdot U')_{sk},(\overline{V}\times\cdot\overline{V})_{sk}$, $(V'\times\cdot V')_{sk}$都是酉方阵,因此新得等式两端取特征多项式,由此就有 $\lambda_1=\mu_1,\cdots,\lambda_{[\frac{q}{2}]}=\mu_{[\frac{q}{2}]}$.

由此,自然有 Z 和相应的 W 有相同的秩,引理证明.

引理 2 设 $S\in G_0$(见 Ⅰ.1.1)且写成(1.1.3)的形式,则所有 D_{ij}之秩都为 2.

证:任取 $Z=z_{ij}I_{ij}\neq 0$ 而属于域 $R_{Ⅲ}$,显然,其秩为 2,然其经变换 S 后变为 $W=z_{ij}D_{ij}$.由引理 1 故 D_{ij}之秩为 2.且由于 D_{ij} 为酉方阵 A 中第 (ij)行向量按(1.1.2)方法所排成的反对称方阵,故 $\overline{D}_{ij}'D_{ij}$ 之特征根为 1,1,0,…,0.

引理 3 当 $q=3$ 时,域 $R_{Ⅲ}$的 G_0 就是 $\Gamma_0^{Ⅲ}$.

证:设 $w=(w_{12},w_{13},w_{23})=(z_{12},z_{13},z_{23})A$.

A 是 3 阶酉方阵.只需证明 A 可以分解成两个酉方阵的斜对称直乘积就行了.

不妨假定(见下节定理 1 证明中的 1°):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & A_1\end{pmatrix},\quad A_1\overline{A}_1'=\overline{A}_1'A=I^{(2)}.$$

则:

$$A_1=R\Gamma\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & 0\\0 & e^{i\theta_2}\end{pmatrix}\Gamma^{-1},$$

其中 R 和 Γ 是 2 阶实正交方阵.由此有:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & e^{i\theta_1} & 0\\0 & 0 & e^{i\theta_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \Gamma^{-1}\end{pmatrix}.$$

因此,只需证明这四个因子能够分解就行.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & \sin\theta\\0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
$$=\left[\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]_{sk}.$$

而当 R 为下列形式时:

$$R=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{sk}.$$

但此时:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma^{-1} \end{pmatrix}.$$

第二、四个因子同第一个,而第二个有:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \end{pmatrix} \times \cdot \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \end{pmatrix}\right]_{sk} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta_1-\theta_2+\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta_2-\theta_1+\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\theta_2+\theta_1-\pi}{2}} \end{pmatrix} \times \cdot \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta_1-\theta_2+\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta_2-\theta_1+\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\theta_2+\theta_1-\pi}{2}} \end{pmatrix}\right]_{sk},$$

因此,引理证明.

引理 4 设 $S \in G_0$,写成(1.1.3)式,当 $D_{12} = I_{12}$ 时,对任意 D_{ij} $(j > 2)$:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1q} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2q} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3q} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & a_{q-1\,q} \\ -a_{1q} & a_{2q} & a_{3q} & \cdots & -a_{q-1\,q} & 0 \end{pmatrix}$$

有性质:

1°. $$\sum_{i=3}^{q} |a_{1i}|^2 + \sum_{i=3}^{q} |a_{2i}|^2 = 1.$$

2°. $$a_{ij} = 0 \quad 当\ i > 2\ 时.$$

证:取 $Z = z_1 I_{12} + z_2 I_{1r}$ 不为零且属于域 R_{III},其经变换 S 变为点

$W = z_1 I_{12} + z_2 D_{1i}$. 由于 $D_{12} = I_{12}$,故此时:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_1' A_1 = A_1 \bar{A}_1' = I^{(\frac{q}{2}(q-1)-1)}.$$

由 D_{ij}之构造可知 $a_{12} = 0$. 因此有:

$$I + \bar{Z}Z = \begin{pmatrix} 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - |z_2|^2 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

$$I + \bar{W}W = \begin{pmatrix} 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \sum_{i=3}^{q} |a_{1i}|^2 & |z_2|^2 \sum_{i=3}^{q} \bar{a}_{1i} a_{2i} & * \\ -|z_2|^2 \sum_{i=3}^{q} a_{1i} a_{2i} & 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \sum_{i=3}^{q} |a_{2i}|^2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

应有

$$[(I + \bar{Z}Z) \times \cdot (I + \bar{Z}Z)]_{sk} = A[(I + \bar{W}W) \times \cdot (I + \bar{W}W)]_{sk} \bar{A}'.$$

比较(12,12)处元素得:

$$\begin{aligned} & (1 - |z_1|^2 - |z_2|^2)(1 - |z_1|^2) \\ = & \left(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \sum_{i=3}^{q} |a_{1i}|^2\right)\left(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \sum_{i=3}^{q} |a_{2i}|^2\right) \\ & - |z_2|^4 \left| \sum_{i=3}^{q} a_{2i} \bar{a}_{1i} \right|^2. \end{aligned}$$

因而有: $\sum_{i=3}^{q} |a_{1i}|^2 + \sum_{i=3}^{q} |a_{2i}|^2 = 1$. 此即 1°.

又因 A 为酉方阵,从 D_{ij}之构造可知此时有: $a_{ij} = 0$, 当 $i > 2$ 时,此即 2°,引理证明.

引理 5 若 $S \in G_0$ 又可写成(1.1.3),若 $D_{1i} = I_{1i}$, $(i = 2, 3, \cdots, j-1)$,又

$$D_{1j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{1j} & \cdots & d_{1q} \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ -d_{1j} & & & 0^{(q-1)} & & & \\ \vdots & & & & & & \\ d_{1q} & & & & & & \end{pmatrix}.$$

且 $\sum_{i=j}^{q} |d_{1i}|^2 = 1$. 则存在酉方阵 U 使得:

$$UD_{1i}\overline{U}' = I_{1i} \quad (i=2,3,\cdots,j).$$

证： 取 U 为下列形式就行：

$$U = \begin{pmatrix} I^{(j-1)} & 0 \\ 0 & U_1^{(q-j+1)} \end{pmatrix}.$$

其中 U_1 为酉方阵，其第一行元素为 $(d_{1j}, d_{1,j+1}, \cdots, d_{1q})$.

I.2 域 $R_{\text{Ⅲ}}$ 的解析自同胚最大群

在本节我们将证明域 $R_{\text{Ⅲ}}$ 的解析自同胚最大群就是域 $R_{\text{Ⅲ}}$ 的运动群 $\Gamma^{\text{Ⅲ}}$（当 $q=4$ 时有一个例外）. 由于 $q=3$ 时已是引理 3 的结果. 下面只就 $q\geqslant 4$ 的情形给出证明. 由 I.1.1 我们只需证明域 $R_{\text{Ⅲ}}$ 的任一保持原点不变的解析自同胚变换 S 总有形式（$q=4$ 的情形除外）：

$$S: \qquad W = U'ZU, \quad \overline{U}'U = U\overline{U}' = I.$$

而由 I.1.4 得知，S 总可写为形式(1.1.3). 我们的证明主要是找一个常数酉方阵 V，用 V' 和 V 分别左乘和右乘(1.1.3)式两端，从而化成：

$$V'WV = \sum z_{ij} V'D_{ij}V = \sum z_{ij} I_{ij} = Z.$$

I.2.1 定理 1. 设 S 为域 $R_{\text{Ⅲ}}$ 的保持原点不变的任一解析自同胚变换：

$$S: \qquad W = \sum_{i<j} z_{ij} D_{ij}, \tag{1.1.6}$$

则当 $q>4$ 时，存在常数酉方阵 $U^{(q)}$，使对一切 $(i,j)\, i<j$ 有：

$$U'D_{ij}U = I_{ij}.$$

证：

1°. 化 D_{12} 为 I_{12}.

由于 D_{12} 为斜对称方阵，由引理 2 得知其秩为 2，且 $\overline{D}_{12}D_{12}$ 之特征根为 $1,1,0,\cdots,0$. 故存在酉方阵 U_{12} 使

$$U'_{12}D_{12}U_{12} = I_{12}.$$

此时，(1.1.6)成为：

$$W^* = U'_{12}WU_{12} = \sum_{i<j} z_{ij} U'_{12} D_{ij} U_{12} = \sum_{i<j} z_{ij} D^*_{ij}.$$

从我们的目的看，自然不妨把 W^* 仍记为 W，D^*_{ij} 仍记为 D_{ij}，而此时变换函数行列阵 A 成为：

$$A^* = \frac{\partial W^*}{\partial W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

B 为 $\frac{1}{2}q(q-1)-1$ 阶常数酉方阵. 同样记 A^* 为 A，今后还要多次以酉

方阵乘(1.1.6)式两端,因此约定今后提到(1.1.6)式总是指最近一次变换后的新形式.

2°. 化 D_{13} 为 I_{13}. 即要找酉方阵 U_{13} 使

$$U_{13}' D_{13} U_{13} = I_{13}, \quad U_{13}' I_{12} U_{13} = I_{12}.$$

此时,$D_{12}=I_{12}$,由引理 4,D_{13} 有形式:

$$D_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{13} & \cdots & d_{1q} \\ 0 & 0 & d_{23} & \cdots & d_{2q} \\ -d_{13} & -d_{23} & & & \\ \vdots & \vdots & & 0^{(q-2)} & \\ -d_{1q} & -d_{2q} & & & \end{pmatrix}.$$

且
$$\sum_{i=3}^{q} |d_{1i}|^2+\sum_{i=3}^{q} |d_{2i}|^2=1.$$

假定 $\sum |d_{1i}|^2=|\alpha|^2>0$(否则假定 $\sum |d_{2i}|^2>0$ 也一样),作酉方阵 $V_1^{(q-2)}$:

$$V_1=\begin{pmatrix} \dfrac{\bar{d}_{13}}{|\alpha|} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\bar{d}_{1q}}{|\alpha|} & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

令:

$$U_1=\begin{pmatrix} I^{(2)} & 0 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}.$$

由于 D_{13} 的秩为 2,所以有:

$$(d_{23}, d_{24}, \cdots, d_{2q})=k(d_{13}, d_{14}, \cdots, d_{1q}).$$

因此:

$$U_1' D_{13} U_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & |\alpha| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k|\alpha| & 0 & \cdots & 0 \\ -|\alpha| & k|\alpha| & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0^{(q-3)} & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

考虑二阶酉方阵 A_1:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & |\alpha| & k|\alpha| \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

则由引理 3 知存在酉方阵 V 使 $A_1=(V\times\cdot V)_{sk}$. 再考虑变换：

$$W_1=\begin{pmatrix}0 & w_{12} & w_{13}\\ -w_{12} & 0 & w_{23}\\ -w_{13} & -w_{23} & 0\end{pmatrix}=VZ_1V'.$$

容易验证：

当 $Z_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 时， $W_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

当 $Z_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ 时， $W_1=\begin{pmatrix}0&0&|\alpha|\\0&0&k|\alpha|\\-|\alpha|&-k|\alpha|&0\end{pmatrix}$.

最后作酉方阵

$$U_{13}=\begin{pmatrix}\overline{V}' & 0\\ 0 & I^{(q-3)}\end{pmatrix}.$$

就有 $U'_{13}D_{13}U_{13}=I_{13}$. $U'_{13}D_{12}U_{13}=I_{12}$.

3°. 化 $D_{14}=I_{14}$.（当 $q>4$ 时）

此时，$D_{12}=I_{12}$，$D_{13}=I_{13}$，A 有形式：

$$A=\begin{pmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & B^{(\frac{q}{2}(q-1)-2)}\end{pmatrix}.$$

由引理 4 和 A 的形式故 D_{14} 有形式：

$$D_{14}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & d_{14} & \cdots & d_{1q}\\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24} & \cdots & d_{2q}\\ 0 & -d_{23} & & & & \\ -d_{14} & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & 0^{(q-2)} & \\ -d_{1q} & -d_{2q} & & & & \end{pmatrix}.$$

取 $Z=z_1I_{12}+z_2I_{14}$ 不为零且属于域 $R_{Ⅲ}$. 其经 S 变为点 $W=z_1I_{12}+z_2D_{14}$. 而：

$$I+\bar{Z}Z=\begin{pmatrix}1-|z_1|^2-|z_2|^2 & 0 & 0 & *\\ 0 & 1-|z_1|^2 & 0 & *\\ 0 & 0 & 1 & *\\ * & * & * & *\end{pmatrix}.$$

$$I+\overline{W}W=\begin{pmatrix} 1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum|d_{1i}|^2 & -|z_2|^2\sum\bar{d}_{1i}d_{2i} & \bar{z}_1z_2d_{23} & * \\ -|z_2|^2\sum d_{1i}\bar{d}_{2i} & 1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum|d_{2i}|^2 & 0 & * \\ -z_1\overline{z_2d_{23}} & 0 & 1-|z_2|^2|d_{23}|^2 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

其应满足：

$$[(I+\bar{Z}Z)\times\cdot(I+\bar{Z}Z)]_{sk}=A[(I+\overline{W}W)\times\cdot(I+\overline{W}W)]_{sk}\bar{A}'.$$

比较(13,13)处元素有：

$$(1-|z_1|^2-|z_2|^2)=(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum|d_{1i}|^2)(1-|z_2|^2|d_{23}|^2)-|z_1z_2d_{23}|^2.$$

因而有：

$$\sum|d_{1i}|^2+|d_{23}|^2=1,\quad |d_{23}|^2\cdot\sum|d_{1i}|^2=0.$$

可以证明，当 $q>4$ 时 $d_{23}=0$. 事实上，若 $d_{23}\neq0$，则 $\sum|d_{1i}|^2=0$，从而 $|d_{23}|^2=1$，$d_{23}=e^{i\theta}$. 于是 $D_{14}=e^{i\theta}I_{23}$. 由引理 4 知 D_{15} 有形式：

$$D_{15}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & \cdots & a_{1q} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2q} \\ 0 & -a_{23} & & & & \\ -a_{14} & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & 0^{(q-2)} & \\ -a_{1q} & -a_{2q} & & & & \end{pmatrix}.$$

由于 $D_{14}=e^{i\theta}I_{23}$，故 $a_{23}=0$. 取 $Z=z_1I_{12}+z_2I_{15}$ 属于域 $R_{Ⅲ}$ 且异于零，其像点 $W=z_1I_{12}+z_2D_{15}$. 重复上述步骤同样有：$\sum|a_{1i}|^2+|a_{23}|^2=1$，$|a_{23}|^2\cdot\sum|d_{1i}|^2=0$. 而因 $a_{23}=0$，故

$$\sum|a_{1i}|^2=1，且\ a_{2i}=0\ (i=3,4,\cdots,q).$$

再取 $Z=z_1I_{12}+z_2I_{14}+z_3I_{15}$ 不为零且属于域 $R_{Ⅲ}$，显然其秩为 2，然而其像点 $W=z_1I_{12}+z_2e^{i\theta}I_{23}+z_3D_{15}$：

$$W=\begin{pmatrix} 0 & z_1 & 0 & z_3(a_{14}\cdots a_{1q}) \\ -z_1 & 0 & z_2e^{i\theta} & 0\ \cdots\ 0 \\ 0 & -z_2e^{i\theta} & & \\ -z_3a_{14} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & 0^{(q-2)} & \\ -z_3a_{1q} & 0 & & \end{pmatrix}.$$

其秩显然大于 2，这与引理 1 矛盾，因此，当 $q>4$ 时 $d_{23}=0$，由此得

$\sum|d_{1i}|^2=1$，又因 A 为酉方阵，故 $d_{2i}=0\ (i=3,\cdots,q)$，再由引理 5，故存在酉方阵 U_{14} 使有：

$$U_{14}'I_{1i}U_{14}=I_{1i}\ (i=2,3).\quad U_{14}'D_{14}U_{14}=I_{14}.$$

当 $q=4$ 时，可能有 $|d_{23}|=1$，$\sum|d_{1i}|^2=0$，这留待以后（定理 2）讨论.

4°. 化所有 D_{1j} 为 I_{1j}.

因为已知 $D_{1j}=I_{1j}\ (j=2,3,4)$. 利用归纳法，设 $D_{1i}=I_{1i}\ (i=2,3,\cdots,j-1)$，要证 D_{1j} 可化成 $I_{1j}\ (4<j\leqslant q)$.

事实上，此时由引理 4，D_{1j} 有形式：

$$D_{1j}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1j} & \cdots & b_{1q}\\ 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2q}\\ \vdots & -b_{23} & & & & & \\ 0 & \vdots & & & & & \\ -b_{1j} & -b_{2j} & & & 0^{(q-2)} & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ -b_{1q} & -b_{2q} & & & & & \end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix} I^{(j-2)} & 0\\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

取 $Z=z_1I_{12}+z_2I_{1j}$ 不为零且属于域 R_{III}，其经(1.1.6)变为点 $W=z_1I_{12}+z_2D_{1j}\ (j>4)$. 而有：

$$I+\bar{Z}Z=\begin{pmatrix} 1-|z_1|^2-|z_2|^2 & 0 & 0 & 0 & *\\ 0 & 1-|z_1|^2 & 0 & 0 & *\\ 0 & 0 & 1 & 0 & *\\ 0 & 0 & 0 & 1 & *\\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

$$I+\overline{W}W=\begin{pmatrix} 1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum|b_{1i}|^2 & -|z_2|^2\sum b_{1i}b_{2i} & \bar{z}_1z_2b_{23} & \bar{z}_1z_2b_{24} & *\\ -|z_2|^2\sum b_{1i}b_{2i} & 1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum|b_{2i}|^2 & * & * & *\\ -z_1\bar{z}_2\bar{b}_{23} & * & 1-|z_2b_{23}|^2 & * & *\\ -z_1\overline{z_2b_{24}} & * & * & 1-|z_2b_{24}|^2 & *\\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

应满足：

$$[(I+ZZ)\times\cdot(I+\bar{Z}Z)]_{sk}=A[(I+WW)\times\cdot(I+\overline{W}W)]_{sk}\bar{A}'.$$

比较(13,13)处元素有:

$$(1-|z_1|^2-|z_2|^2)=(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum|b_{1i}|^2)(1-|z_2|^2|b_{23}|^2)-|z_1z_2b_{23}|^2.$$

由此有:

$$\sum|b_{1i}|^2+|b_{23}|^2=1,\quad |b_{23}|^2\cdot\sum|b_{1i}|^2=0.$$

比较(14,14)处元素有:

$$(1-|z_1|^2-|z_2|^2)$$
$$=(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum|b_{1i}|^2)(1-|z_2|^2|b_{24}|^2)-|z_1z_2b_{24}|^2.$$

由此有:

$$\sum|b_{1i}|^2+|b_{24}|^2=1,\quad |b_{24}|^2\cdot\sum|b_{1i}|^2=0.$$

由此可见$\sum|b_{1i}|^2\neq0$,否则由上两式可得 $b_{23}=b_{24}=1$,这不可能.因此$\sum|b_{1i}|^2\neq0$,因而 $b_{23}=b_{24}=0$,而得$\sum|b_{1i}|^2=1$.又因 A 为酉方阵,故 $b_{2i}=0$ $(i=3,\cdots,q)$.再由引理5可知 D_{1j}可化为I_{1j}.

至此有:$D_{1j}=I_{1j}(j=2,3,\cdots,q)$.

5°. 用归纳法完成定理的证明.

此时,变换 S 已化成形式:

$$W=\sum z_{ij}D_{ij},\quad D_{1j}=I_{1j}(j=2,3,\cdots,q).$$

与此相应

$$A=\begin{pmatrix} I^{(q-1)} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

A_1 为$\frac{1}{2}(q-1)(q-1-1)$阶常数酉方阵.

可证明:

$$\begin{aligned} w_1&=(w_{23},w_{24},\cdots,w_{2q},w_{34},\cdots,w_{3q},\cdots,w_{q-1\,q})\\ &=(z_{23},z_{24},\cdots,z_{2q},z_{34},\cdots,z_{3q},\cdots,z_{q-1\,q})A_1. \end{aligned}\tag{1.1.7}$$

是域 $R_{\mathrm{III}}(q-1)$: $I+Z_1\overline{Z}_1>0$ 的保持原点不变的解析自同胚.而且:

$$Z_1=\begin{pmatrix} 0 & z_{23} & z_{24} & \cdots & z_{2q} \\ -z_{23} & 0 & z_{34} & \cdots & z_{3q} \\ \vdots & -z_{34} & \cdot & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & z_{q-1\,q} \\ -z_{2q} & -z_{3q} & \cdots & -z_{q-1\,q} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$W_1=\begin{pmatrix} 0 & w_{23} & w_{24} & \cdots & w_{2q} \\ -w_{23} & 0 & w_{34} & \cdots & w_{3q} \\ -w_{24} & -w_{34} & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & w_{q-1\,q} \\ -w_{2q} & -w_{3q} & \cdots & -w_{q-1\,q} & 0 \end{pmatrix}.$$

满足式子:

$$\begin{aligned}&[(I+\bar{Z}_1Z_1)\times\cdot(I+\bar{Z}_1Z_1)]_{sk}\\ &=A_1[(I+\overline{W}_1W_1)\times\cdot(I+\overline{W}_1W_1)]_{sk}\bar{A}_1'.\end{aligned}\tag{1.1.8}$$

事实上,在 $W=\sum_{i<j}z_{ij}D_{ij}$, $D_{1j}=I_{1j}$, $(j=2,3,\cdots,q)$ 中令:$z_{1j}=0$ $(j=2,3,\cdots,q)$,则有:

$$W_1=\sum_{1<i<j}z_{ij}D_{ij}.$$

写成向量形式,即(1.1.7). 而且对每一点 $W\in R_{\mathrm{III}}(q)$:

$$W=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & W_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

有 $W_1\in R_{\mathrm{III}}(q-1)$. 并且 $R_{\mathrm{III}}(q-1)$中的任何点 W_1 都有

$$W=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & W_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}\text{属于 } R_{\mathrm{III}}(q),$$

而且是域 $R_{\mathrm{III}}(q)$的某一点 Z:

$$Z=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & Z_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

的像点.

至于等式(1.1.8),因为

$$A=\begin{pmatrix} I^{(q-1)} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

所以:

$$Z=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & Z_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

相应于

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & W_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

以此代入：

$$[(I+\bar{Z}Z)\times\cdot(I+\bar{Z}Z)]_{sk} = A'_{\cdot}(I+\overline{W}W)\times\cdot(I+\overline{W}W)]_{sk}\bar{A}',$$

即得(1.1.8)式.

因此，重复证明中 1°到 4°的步骤，可以把 A_1 化成：

$$A_1 = \begin{pmatrix} I^{(q-2)} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

此时 A 为：

$$A = \begin{pmatrix} I^{(2q-3)} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

同样可以化简 A_2，如此继续下去，最后有：

$$A = \begin{pmatrix} I^{(q-1+q-2+\cdots+5)} & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

其中 A_0 是$\frac{1}{2}q(q-1)-(q-1+q-2+\cdots+5)=6$ 阶常数酉方阵. 和 A_0 相应的域 $R_{Ⅲ}(4)$的保持原点不变的解析自同胚为：

$$(w_{q-3\,q-2}, w_{q-3\,q-1}, w_{q-3\,q}, w_{q-2\,q-1}, w_{q-2\,q}, w_{q-1\,q})$$
$$=(z_{q-3\,q-2}, z_{q-3\,q-1}, \cdots, z_{q-1\,q})A_0.$$

如同 1°,2°一样可以使相应于 A_0 的 $D_{12}=I_{12}$, $D_{13}=I_{13}$. 但是相应 A_0 的 D_{14}有两种可能(见 3°)：或者化为 I_{14}或者化为 $e^{i\theta}I_{23}$. 可以证明在 $q>4$ 时，第二种情形是不可能的. 事实上，假设其可能，则此时：

$$A = \begin{pmatrix} I^{(q-1+\cdots+5)} & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{(q-1+\cdots+5+2)} & & 0 & & \\ & 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & * \\ & * & 0 & * & * \\ & * & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

相应于 A_0 的 $D_{12}=I_{12}$, $D_{13}=I_{13}$, $D_{14}=e^{i\theta}I_{23}$对 A 而言即分别为：$D_{q-3\,q-2}=I_{q-3\,q-2}$, $D_{q-3\,q-1}=I_{q-3\,q-1}$, $D_{q-3\,q}=e^{i\theta}I_{q-2\,q-1}$. 因而相应于 A 的域 $R_{Ⅲ}(q)$的保持原点不变的解析自同胚有形式：

$$W = \sum_{i<j} z_{ij}D_{ij}. \tag{1.1.9}$$

其中 $D_{ij}=I_{ij}$ 当 $i=1,2,\cdots,q-2$. $i<j=i+1,i+2,\cdots,q$. $D_{q-3\,j}=$

$I_{q-3\,j}$, $j=q-2,q-1$. $D_{q-3\,q}=e^{i\theta}I_{q-2\,q-1}$.

取 $Z=z_1I_{q-4\,q}+z_2I_{q-3\,q}$属于域$R_{\mathrm{III}}(q)$且$z_1z_2\neq 0$. 易见其秩为 2，然而其经(1.1.9)变为 $W=z_1I_{q-4\,q}+z_2e^{i\theta}I_{q-2\,q-1}$. 显然 W 之秩大于 2 此与引理 1 矛盾. 因此，只可能有 $D_{q-3\,q}=I_{q-3\,q}$. 这样，

$$A_0=\begin{pmatrix} I^{(3)} & 0 \\ 0 & \widetilde{A} \end{pmatrix}.$$

即：

$$A=\begin{pmatrix} I^{(q-1+q-2+\cdots+4)} & 0 \\ 0 & \widetilde{A} \end{pmatrix}.$$

其中 $\widetilde{A}$ 为三阶酉方阵，对应着域 $R_{\mathrm{III}}(3)$的原点不变的解析自同胚，根据引理 3 它总可以写成酉方阵的斜对称值乘积. 换言之 $\widetilde{A}$ 总可化为

$$\widetilde{A}=I^{(3)}.$$

此时：

$$A=I^{\frac{1}{2}(q-1)q},\quad D_{ij}=I_{ij}.$$

至此，本定理证完.

I.2.2　定理 2　设 $S\in G_0$ 且写成(1.1.8)式. 则当 $q=4$ 时，存在酉方阵 U，或者对所有(ij)有：

$$U'D_{ij}U=I_{ij}.$$

或者：

$$U'D_{ij}U=\begin{cases} I_{ij}, & (i,j)=(1,2),(1,3),(2,4),(3,4). \\ I_{14}, & (i,j)=(2,3). \\ I_{23}, & (i,j)=(1,4). \end{cases}$$

证：在定理 1 的证明中，已经说明，当 $D_{12}=I_{12}$, $D_{13}=I_{13}$时，或者有 $D_{14}=I_{14}$，那么重复定理 1 的证明便得本定理的第一部分，或者有 $D_{14}=e^{i\theta}I_{23}$. 此时，我们可证明有本定理之第二部分.

事实上，当 $D_{12}=I_{12}$, $D_{13}=I_{13}$, $D_{14}=e^{i\theta}I_{23}$时，有：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{14} & 0 & b_{24} & b_{34} \\ 0 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

$$D_{23}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & b_{14}\\ 0 & 0 & 0 & b_{24}\\ 0 & 0 & 0 & b_{34}\\ -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0\end{pmatrix}.$$

取 $Z=z_1I_{12}+z_2I_{23}$属于域 R_{III}，且 $z_1\cdot z_2\neq0$，其对应像点为 $W=z_1I_{12}+z_2D_{23}$.

而：

$$I+ZZ=\begin{pmatrix}1-|z_1|^2 & 0 & -z_1z_2 & 0\\ 0 & 1-|z_1|^2-|z_2|^2 & 0 & 0\\ z_1z_2 & 0 & 1-|z_2|^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$I+WW=\begin{pmatrix}1-|z_1|^2-|z_2b_{14}|^2 & * & -|z_2|^2b_{14}b_{34} & *\\ * & * & * & *\\ -|z_2|^2b_{14}b_{34} & * & 1-|z_2b_{34}|^2 & *\\ * & * & * & *\end{pmatrix}.$$

应满足：

$$[(I+ZZ)\times\cdot(I+ZZ)]_k=A[(I+WW)\times\cdot(I+WW)]_kA'.$$

比较(13,13)处元素：

$$(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)-|z_1z_2|^2$$
$$=(1-|z_1|^2-|z_2b_{14}|^2)(1-|z_2b_{34}|^2)-|z_2|^4|b_{14}b_{34}|^2.$$

由此有 $b_{34}=0$，$|b_{14}|=1$，$b_{14}=\mathrm{e}^{i\theta_1}$. 所以 $D_{23}=\mathrm{e}^{i\theta_1}I_{14}$.

此时，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{i\theta} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{i\theta_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & *\end{pmatrix}.$$

$$D_{24}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_{24}\\ 0 & 0 & 0 & d_{34}\\ 0 & d_{24} & d_{34} & 0\end{pmatrix}.$$

取 $Z = z_1 I_{12} + z_2 I_{24}$ 属于域 R_{III}，且 $z_1 \cdot z_2 \neq 0$，其像点为 $W = z_1 I_{12} + z_2 D_{24}$，且有：

$$
I + \bar{Z}Z = \begin{pmatrix} 1 - |z_1|^2 & 0 & * & * \\ 0 & 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.
$$

$$
I + \bar{W}W = \begin{pmatrix} 1 - |z_1|^2 & 0 & * & * \\ 0 & 1 - |z_1|^2 - |z_2 d_{24}|^2 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.
$$

应有方程：

$$
[(I + ZZ) \times \cdot (I + ZZ)]_{jk} = A[(I + \bar{W}W) \times \cdot (I + WW)]_{jk} A'
$$

比较(12,12)处的元素有：

$$
(1 - |z_1|^2)(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2) = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_1|^2 - |z_2 d_{24}|^2).
$$

由此得 $|d_{24}| = 1$，$d_{24} = e^{i\theta_2}$，所以 $D_{24} = e^{i\theta_2} I_{24}$。

因 A 为酉方阵，故此时 A 成为：

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix}.
$$

可以证明 $e^{i\theta} = e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} = e^{i\theta_3} = 1$。

事实上，任取域 R_{III} 中一点 Z：

$$
Z = \begin{pmatrix} 0 & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ -z_{12} & 0 & z_{23} & z_{24} \\ -z_{13} & -z_{23} & 0 & z_{34} \\ z_{14} & -z_{24} & z_{34} & 0 \end{pmatrix}.
$$

此时相应之 W 为：

$$
W = \begin{pmatrix} 0 & z_{12} & z_{13} & z_{23} e^{i\theta} \\ -z_{12} & 0 & z_{14} e^{i\theta_1} & z_{24} e^{i\theta_2} \\ -z_{13} & -z_{14} e^{i\theta_1} & 0 & z_{34} e^{i\theta_3} \\ z_{23} e^{i\theta} & -z_{24} e^{i\theta_2} & -z_{34} e^{i\theta_3} & 0 \end{pmatrix}.
$$

而有：

$I+\bar{Z}Z=$

$$\begin{pmatrix} 1-|z_{12}|^2-|z_{13}|^2-|z_{14}|^2 & \bar{z}_{13}z_{23}+\bar{z}_{14}z_{24} & \bar{z}_{12}z_{23}-\bar{z}_{34}z_{14} & \bar{z}_{12}z_{24}+\bar{z}_{13}z_{34} \\ -* & 1-|z_{12}|^2-|z_{23}|^2-|z_{24}|^2 & \bar{z}_{12}z_{13}-\bar{z}_{24}z_{34} & \bar{z}_{12}z_{14}+\bar{z}_{23}z_{34} \\ -* & * & 1-|z_{13}|^2-|z_{23}|^2-|z_{34}|^2 & \bar{z}_{13}z_{14}-\bar{z}_{23}z_{24} \\ -* & * & -* & 1-|z_{14}|^2-|z_{24}|^2-|z_{34}|^2 \end{pmatrix}$$

此处 * 表示其对称之共轭数. 在上列方阵中分别将 $z_{14}, z_{23}, z_{24}, z_{34}$ 改为 $e^{i\theta}z_{23}, e^{i\theta_1}z_{14}, e^{i\theta_2}z_{24}, e^{i\theta_3}z_{34}$，则得 $I+\overline{W}W$ 之表示式，其有关系：

$$[(I+\bar{Z}Z)\times\cdot(I+\bar{Z}Z)]_{sk}=A[(I+WW)\times\cdot(I+\overline{W}W)]_{sk}\bar{A}'.$$

比较(12,12)处元素得：

$$(1-|z_{12}|^2-|z_{13}|^2-|z_{14}|^2)(1-|z_{12}|^2-|z_{23}|^2-|z_{24}|^2)$$
$$-|z_{13}z_{23}+\bar{z}_{14}z_{24}|^2$$
$$=(1-|z_{12}|^2-|z_{13}|^2-|z_{23}|^2)(1-|z_{12}|^2-|z_{14}|^2-|z_{24}|^2)$$
$$-|\bar{z}_{13}z_{14}e^{i\theta}+\bar{z}_{23}z_{24}e^{i(\theta_2-\theta_1)}|^2.$$

展开之即有 $\theta_2=\theta_1+\theta+2m\pi$. $(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

比较(13,13)处元素有 $\theta_3=\theta_1+\theta+2n\pi$. $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

比较(12,13)处元素有 $\theta_1=2k\pi$. $(k=0,+1,+2,\cdots)$.

比较(24,34)处元素有 $\theta=2\nu\pi$. $(\nu-0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

故最后有：$e^{i\theta}-e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}-1$.

最后还需证明本定理第二部分所述的变换，即：

$$W=\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ -w_{12} & 0 & w_{23} & w_{24} \\ -w_{13} & -w_{23} & 0 & w_{34} \\ w_{14} & w_{24} & -w_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & z_{12} & z_{13} & z_{23} \\ -z_{12} & 0 & z_{14} & z_{24} \\ -z_{13} & -z_{14} & 0 & z_{34} \\ -z_{23} & -z_{24} & -z_{34} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.10}$$

其中：

$$\begin{pmatrix} 0 & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ -z_{12} & 0 & z_{23} & z_{24} \\ -z_{13} & -z_{23} & 0 & z_{34} \\ -z_{14} & -z_{24} & -z_{34} & 0 \end{pmatrix} \quad Z. \tag{1.1.11}$$

Z 属于 $R_{\mathrm{III}}(4)$，确是域 $R_{\mathrm{III}}(4)$的解析自同胚.

事实上，在现在这种情况下为了给出肯定的回答，只要注意到以下这点就足够了：即形式为(1.1.11)的点 Z 的特征根与其对应像点形式为(1.1.10)的 W 之特征根完全相同，即它们有相同的特征方程：

$$\lambda^4+\lambda^2(z_{12}^2+z_{13}^2+z_{14}^2+z_{23}^2+z_{24}^2+z_{34}^2)+2(z_{12}z_{14}z_{23}z_{34}$$
$$-z_{12}z_{13}z_{24}z_{34}-z_{13}z_{14}z_{23}z_{24})+z_{12}^2z_{34}^2+z_{13}^2z_{24}^2+z_{14}^2z_{23}^2=0.$$

定理证毕.

本节内容来自文[YJ].

Ⅱ. 对称典型域的解析自同胚最大群

由于给出对称典型域的全纯自同构群的显式表示的方法各异，有没有一种统一的方法呢？这一节说明上述求斜对称双曲空间的解析自同胚最大群的方法适用于四大类的所有对称典型域. 也就是说，第一、第二、第四类典型域的解析自同胚最大群分别是上节开头所述的群 Γ^{I}、Γ^{II}、Γ^{IV}.

Ⅱ.1 基本事实

Ⅱ.1.1 由Ⅰ.1.3知，若 S 是 R_{I} 的保持原点不变的解析自同胚，则 S 可写为

$$w=zA, \tag{1.2.1}$$

其中 $z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n},z_{21},z_{22},\cdots,z_{2n},\cdots,w_{m1},w_{m2},\cdots,w_{mn})$,

$w=(w_{11},w_{12},\cdots,w_{1n},w_{21},w_{22},\cdots,w_{2n},\cdots,w_{m1},w_{m2},\cdots,w_{mn})$,

$A=\dfrac{\partial w}{\partial z}$是 mn 阶常数酉方阵.

将向量 w 排成下列 $m\times n$ 矩阵

$$W=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n}\\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn}\end{pmatrix}, \tag{1.2.2}$$

则(1.2.1)式可写为

$$W=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}z_{ij}A_{ij}, \tag{1.2.3}$$

其中 A_{ij} 为方阵 A 中的第(ij)行向量按(1.2.2)的方法所排成的 $m\times n$ 矩阵.

Ⅱ.1.2 由Ⅰ.1.3知,若 S 为 $R_{Ⅱ}$ 的保持原点不变的解析自同胚,则 S 可写为

$$w = zB, \tag{1.2.4}$$

其中 $z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1p},z_{22},z_{23},\cdots,z_{2p},\cdots,z_{p-1\,p-1},z_{p-1\,p},z_{pp})$,

$w=(w_{11},w_{12},\cdots,w_{1p},w_{22},w_{23},\cdots,w_{2p},\cdots,w_{p-1\,p-1},w_{p-1\,p},w_{pp})$,

$B=\dfrac{\partial w}{\partial z}$ 为 $\dfrac{1}{2}p(p+1)$ 阶常数酉方阵.

将上述 w 排成 p 阶对称方阵如下:

$$W=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1p} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{1p} & w_{2p} & \cdots & w_{pp} \end{pmatrix}, \tag{1.2.5}$$

则(1.2.4)式可写为

$$W = \sum_{i\leqslant j=1}^{p} z_{ij}B_{ij}, \tag{1.2.6}$$

其中 B_{ij} 为 B 中第 (ij) 行向量按(1.2.5)的方法排成的 p 阶对称方阵.

Ⅱ.1.3 今后,在论述 $R_{Ⅰ}$ 时,I_{ij} 总表示 (i,j) 处的元素为1,其余元素为0的 $m\times n$ 矩阵.在论述 $R_{Ⅱ}$ 时,总以 I_{ij} 表示 (i,j) 处和 (j,i) 处元素都为1,其余元素都为0的 p 阶对称方阵.

Ⅱ.2 预 备 定 理

Ⅱ.2.1 引理1. 设 $W=f(Z)$ 为 $R_{Ⅰ}$ 的保持原点不变的解析自同胚,则点 Z 和像点 W 有相同的秩,而且 $Z\bar{Z}'$ 和相应的 $W\bar{W}'$ 有相同的特征根.

证: 设 $T_{Ⅰ}(Z\bar{Z})$ 为 $R_{Ⅰ}$ 的 Bergman 度量方阵,则有

$$T_{Ⅰ}(Z,\bar{Z})=\frac{\partial W}{\partial Z}T_{Ⅰ}(W,\bar{W})\overline{\frac{\partial W'}{\partial Z}}=AT_{Ⅰ}(W,\bar{W})\bar{A}'. \tag{1.2.7}$$

由于 $T_{Ⅰ}(Z,\bar{Z})=(m+n)(I-\bar{Z}Z')^{-1}\times(I-\bar{Z}'Z)^{-1}$,$A$ 为酉方阵,因此有

$$(I-\bar{Z}Z')\times(I-\bar{Z}'Z)=A[(I-\bar{W}W')\times(I-\bar{W}'W)]\bar{A}' \tag{1.2.8}$$

对 $Z\in R_{Ⅰ}$,存在酉方阵 U 和 V 使得

$$Z=U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_m & \end{pmatrix}V, \tag{1.2.9}$$

其中 $1>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\geqslant0$,$\lambda_1^2,\cdots,\lambda_m^2$ 为 $Z\bar{Z}'$ 之特征根.对相应的 W 也

存在酉方阵 U_1 与 V_1，使

$$W = U_1 \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \mu_m & \end{pmatrix} V_1, \tag{1.2.10}$$

其中 $1 > \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_m \geqslant 0$，$\mu_1^2, \cdots, \mu_m^2$ 为 $W\overline{W}'$ 之特征根. 以(1.2.9)、(1.2.10)两式代入(1.2.8)式即易得 $\lambda_i = \mu_i (j = 1, \cdots, m)$.

Ⅱ.2.2 引理 2. 设 $W = f(Z)$ 是 R_{II} 的保持原点不变的解析自同胚，则点 Z 与像点 W 有相同的秩，而 $Z\overline{Z}'$ 和相应的 $W\overline{W}'$ 有相同的特征根.

证：与引理 1 相似.

Ⅱ.2.3 引理 3. (1.2.3)式中所有 A_{ij} 之秩为 1.

证：任取 $z_{ij} I_{ij} \neq 0$ 而属于 R_{I}，则显然其秩为 1. 经变换 S 变为 $z_{ij} A_{ij}$，由引理 1 得 A_{ij} 之秩为 1.

Ⅱ.2.4 引理 4. (1.2.6)式中 B_{jj} 之秩为 1，而 B_{ij} 之秩$(i \neq j)$为 2.

证：任取 $z_{jj} I_{jj} \in R_{\mathrm{II}}$，且不为 0，其秩显然为 1，经 S 变为 $z_{jj} B_{jj}$，由引理 2 可知 B_{jj} 之秩也为 1. 再取 $z_{ij} I_{ij} (i < j) \in R_{\mathrm{II}}$ 且不为 0，其秩显然为 2. 经 S 变为 $z_{ij} B_{ij}$，由引理 2 知 B_{ij} 之秩为 2.

Ⅱ.2.5 引理 5. 在(1.2.3)式中，当 $A_{11} = I_{11}$，$A_{12} = I_{12}$ 时，对任意 $A_{1j} = (a_{kl})$ $(2 < j = 3, 4, \cdots, n)$ 及 $A_{j1} = (b_{\alpha\beta})$ $(j = 2, 3, \cdots, m)$，

有性质

1°. $\sum_{l=1}^{n} |a_{1l}|^2 = 1$;　　2°. $a_{kl} = 0$ (当 $k > 1$ 时);

3°. $\sum_{\alpha=1}^{m} |b_{\alpha 1}|^2 = 1$;　　4°. $b_{\alpha\beta} = 0$ (当 $\beta > 1$ 时).

证：由于 $A_{11} = I_{11}$，$A_{12} = I_{12}$，故 A 为以下形式：

$$A = \begin{pmatrix} I^{(2)} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

因而 $a_{11} = a_{12} = b_{11} = b_{12} = 0$. 取 $Z = z_1 I_{11} + z_2 I_{1j} \in R_{\mathrm{I}}$ 且不为 0，经(1.2.3)变为点 $W = z_1 I_{11} + z_2 A_{1j} (j = 3, 4, \cdots, n)$. 这时有

$$I - \overline{Z}Z' = \begin{pmatrix} 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

$$I - \overline{Z}'Z = \begin{pmatrix} 1 - |z_1|^2 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

$$I - \bar{W}W' = \begin{pmatrix} 1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{t=3}^{n}|a_{1t}|^2 & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$I - \bar{W}'W = \begin{pmatrix} 1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{t=2}^{m}|a_{t1}|^2 & * & * \\ * & 1-|z_2|^2\sum_{t=2}^{m}|a_{t1}|^2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

以此代入(1.2.8)式.比较第(1,1)行第(1,1)列处的元素得$(1-|z_1|^2-|z_2|^2)(1-|z_2|^2)=(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{t=3}^{n}|a_{1t}|^2)(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{t=2}^{m}|a_{t1}|^2)$, 展开后即得 $\sum_{t=3}^{n}|a_{1t}|^2+\sum_{t=2}^{m}|a_{t1}|^2=1$, $\sum_{t=3}^{n}|a_{1t}|^2\cdot\sum_{t=2}^{m}|a_{t1}|^2=0$. 比较第(1,2)行第(1,2)列处的元素得

$$(1-|z_1|^2-|z_2|^2)$$
$$=((1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{t=3}^{n}|a_{1t}|^2)(1-|z_2|^2\sum_{t=2}^{m}|a_{t2}|^2)),$$

展开后得$\sum_{t=2}^{m}|a_{t2}|^2=1$,因此有$\sum_{t=3}^{n}|a_{1t}|^2=1$.由于$A$为酉方阵,因此,当$i>1$时有$a_{ij}=0$.性质1°与2°得证.

取$(z_1I_{11}+z_2I_{t1})\in R_I$且不为0,经(1.2.3)变为$z_1I_{11}+z_2A_{t1}$,类似于上述步骤可得3°与4°.

Ⅱ.2.6 引理6. 在(1.2.3)式中,当$A_{1j}=I_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$, $A_{j1}=I_{j1}(j=1,2,\cdots,m)$时,对任意$A_{ij}=(a_{\alpha\beta})(i=2,\cdots,m;j=2,\cdots,n)$有性质1°. $\sum_{l=2}^{m}|a_{lj}|^2=1$; 2°. $a_{\alpha\beta}=0$(当$\alpha\neq\beta$时).

证:此时$A=\mathrm{diag}[I^{(n)},*^{(mn-n)}]$.而且$a_{1j}=0$, $a_{l1}=0$ $(j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,m)$.取$Z=z_1I_{11}+z_2I_{ij}\neq0$,但$Z\in R_I(i=2,\cdots,m;j=2,\cdots,n)$;则$Z$经(1.2.3)后变为$W=z_1I_{11}+z_2A_{ij}$,而$I-\bar{Z}Z'=\mathrm{diag}[1-|z_1|^2,*]$, $I-\bar{Z}'Z=\mathrm{diag}[1-|z_1|^2,I^{(j-2)},1-|z_2|^2,I^{(n-j)}]$,而$I-\bar{W}W'$的(1,1)元素为$(1-|z_1|^2)$. $I-\bar{W}'W$的(1,1)处元素为$(1-|z_1|)^2$,(j,j)处元素为$(1-|z_2|^2\sum_{l=2}^{m}|a_{lj}|^2$.以此代入(1.2.8)式并比较

等式两端第$(1,j)$行第$(1,j)$列处的元素，得到

$$(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2\cdot\sum_{l=2}^{m}|a_{lj}|^2).$$

因此，$\sum_{l=2}^{m}|a_{lj}|^2=1$. 由于 A 为酉方阵，故得性质 $2°$.

Ⅱ.2.7　引理 7.　在(1.2.6)式中当 $B_{11}=I_{11}$ 时，对任意 $B_{1j}=(b_{\alpha\beta})$ $(j=2,\cdots,p)$ 有性质 $1°$. $\sum_{i=2}^{p}|b_{1i}|^2=1$; $2°$. $b_{ij}=0$ $(i\neq 1)$.

证： 此时 $B=\mathrm{diag}[1,D]$，D 为$\frac{1}{2}p(p+1)-1$阶方阵，而且 $D'\bar{D}=\bar{D}D'=I$. 取 $Z=z_1I_{11}+z_2I_{1j}\in R_{\text{Ⅱ}}$，$z_2\cdot z_1\neq 0$，则对应像点为 $W=z_1I_{11}+z_2B_{1j}$. 而且 $I-Z\bar{Z}$ 与 $I-\overline{W}W$ 的$(1,1)$处的元素分别为$(1-|z_1|^2-|z_2|^2)$与$(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{i=2}^{p}|b_{1i}|^2)$. 应满足$[(I-\bar{Z}Z)\times(I-\bar{Z}Z)]_s=B[(I-\overline{W}W)\times(I-\overline{W}W)]_sB'$. 比较此式两端第$(1,1)$行第$(1,1)$列处的元素得

$$(1-|z_1|^2-|z_2|^2)^2=(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{i=2}^{p}|b_{1i}|)^2.$$

因此得$\sum_{i=2}^{p}|b_{1i}|^2=1$，此即性质 $1°$. 由于 B 为酉方阵，故有$b_{ij}=0$ $(i\neq 1)$，此即性质 $2°$.

Ⅱ.3　$R_{\text{Ⅰ}}(m,n)$的解析自同胚最大群

由Ⅰ.1.1我们只要确定 $R_{\text{Ⅰ}}(m,n)$的原点的固定分群 $\Gamma_0^{\text{Ⅰ}}$ 就行了. 我们有

Ⅱ.3.1　定理 1.　设 $S\in\Gamma_0^{\text{Ⅰ}}$，即 S 可写为

$$W=\sum z_{ij}A_{ij},\tag{1.2.11}$$

则存在常数酉方阵 U 和 V 使得$UA_{ij}V=I_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$或者(当 $m=n$ 时)$UA_{ij}V=I_{ji}(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n)$.

证： 1) 由引理 1 知 A_{11} 之秩为 1，其特征根为 $1,0,\cdots,0$. 所以存在酉方阵 U_{11},V_{11} 使 $U_{11}A_{11}V_{11}=I_{11}$. 此时(1.2.11)式成为 $W^*=U_{11}WV_{11}=\sum z_{ij}U_{11}A_{ij}V_{11}=\sum z_{ij}A_{ij}^*$. 从我们的目的看，不妨把 W^* 仍记为 W，A_{ij}^* 仍记为A_{ij}. 而此时变换函数矩阵 A 变为$\begin{pmatrix}1&0\\0&B\end{pmatrix}=A^*$，$B$ 为酉方阵. 同样记 A^* 为 A. 今后还要多次以酉方阵乘(1.2.11)式之两

端.因此约定此后提到(1.2.11)式,总是指最近一次以酉方阵相乘以后的形式,而且总以 A 记最近一次变换的函数矩阵.至此,$A_{11}=I_{11}$.

2)此时 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&*\end{pmatrix}$,而 $A_{12}=(a_{ij})$ 中 $a_{11}=0$.取 $Z=z_1I_{11}+z_2I_{12}\in R_1$ 且 $z_1\cdot z_2\neq 0$.经计算,有 $I-\bar{Z}Z=\mathrm{diag}[1-|z_1|^2-|z_2|^2, I^{(m-1)}]$. $I-\bar{Z}'Z, I-\overline{W}W', I-\overline{W}'W$ 的(1,1)处的元素分别为

$$(1-|z_1|^2-|z_2|^2),(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{i=2}^{n}|a_{1i}|^2),$$

$$(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{i=2}^{m}|a_{i1}|^2).$$

以此代入(1.2.8)式,并比较两端第(1,1)行第(1,1)列处的元素得

$$(1-|z_1|^2-|z_2|^2)^2$$

$$=(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{i=2}^{n}|a_{1i}|^2)(1-|z_1|^2-|z_2|^2\sum_{i=2}^{m}|a_{i1}|^2).$$

展开后得 $\sum_{i=1}^{n}|a_{1i}|^2+\sum_{i=1}^{m}|a_{i1}|^2=1$, $\sum_{i=2}^{n}|a_{1i}|^2\cdot\sum_{i=2}^{m}|a_{i1}|^2=0$.由于 A 为酉方阵,故只可能有两种情形:1°. $\sum_{i=2}^{n}|a_{1i}|^2=1$, $\sum_{i=2}^{m}|a_{i1}|^2=0$, $a_{kl}=0\ (k\neq 1)$,或者 2°. $\sum_{i=2}^{m}|a_{i1}|^2=1$, $\sum_{i=2}^{n}|a_{1i}|^2=0$, $a_{ij}=0$ $(j\neq 1)$. 当 $m\neq n$ 时 2° 不可能发生.而 $m=n$ 时,两者皆可发生.然而 2° 总可化为 1°.事实上,此时 $W=\sum_{i,j=1}^{n}z_{ij}A_{ij}$. 作 R_1 的解析自同胚 $W^*=W'=\sum z_{ij}A'_{ij}$,$A_{12}$ 变为 A'_{12} 此即 1° 之情形.因此不论 $m=n$ 或 $m\neq n$ 总可认为

$$A_{12}=\begin{pmatrix}0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&&0&\end{pmatrix},\quad \sum_{i=2}^{n}|a_{1i}|^2=1$$

作酉方阵

$$V_{12}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ &\overline{a_{12}}&\\ 0&\vdots&*\\ &\overline{a_{1n}}&\end{pmatrix},$$

以此右乘(1.2.11)式(指变化后的形式),得 $A_{12}V_{12}=I_{12}$.即 A_{11},A_{12} 已分别变为 I_{11},I_{12}.

3)由引理 5,A_{12} 具以下形式:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=2}^{m} |a_{i1}|^2 = 1,$$

故存在酉方阵 U_{21} 使 $V_{21}A_{21} = I_{21}, U_{21}I_{11} = I_{11}, U_{21}I_{12} = I_{12}$.

此时，$A_{11} = I_{11}, A_{12} = I_{12}, A_{21} = I_{21}$，再由引理5及 A 为酉方阵，可知 $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，$\sum_{i=3}^{n} |a_{1i}|^2 = 1$，故存在酉方阵 V_{13} 使得 $A_{13}V_{13} = I_{13}, I_{11}V_{13} = I_{11}, I_{12}V_{13} = I_{12}, I_{21}V_{13} = I_{21}$，如此下去．一般 A_{1j} 化为 I_{1j} 后，将 A_{j1} 化为 I_{j1}，然后化 $A_{1,j+1}$ 为 $I_{1,j+1}$，再化 $A_{j+1,1}$ 为 $I_{j+1,1}$，最后可得 $A_{j1} = I_{j1}(j = 1,2,\cdots,m), A_{1j} = I_{1j}(j = 1,2,\cdots,n)$.

4) 此时有 $A_{2j} = e^{i\theta_{2j}}I_{2j}\ (j = 2,\cdots,n)$. 事实上，由于 $A = \mathrm{diag}[I^{(n+1)}, *^{(mn-n-1)}]$，取 $Z = z_1I_{11} + z_2I_{2j} \in R_{\mathrm{I}}, z_1, z_2 \neq 0$，相应的像点 $W = z_1I_{11} + z_2A_{2j}$，再由引理6及 A 为酉方阵，我们有

$$A_{2j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{mj} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=2}^{m} |a_{ij}|^2 = 1.$$

而且 $$I - \bar{Z}Z' = \mathrm{diag}[(1-|z_1|^2), (1-|z_2|^2), I^{(m-2)}],$$
$$I - \bar{Z}'Z = \mathrm{diag}[1-|z_1|^2, I^{(j-2)}, 1-|z_2|^2, I^{(n-j)}].$$

$$I - \bar{W}'W = \mathrm{diag}[1-|z_1|^2, I^{(j-2)}, 1-|z_2|^2\sum_{i=2}^{m}|a_{ij}|^2, I^{(n-j)}],$$

$$I - \bar{W}W' = \begin{bmatrix} 1-|z_1|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-|z_2a_{ij}|^2 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix},$$

以此代入(8)式并在两端比较第 $(2,j)$ 行第 $(2,j)$ 列处的元素得 $(1-|z_2|^2) = (1-|z_2a_{2j}|^2)$. 因此，$a_{2j} = e^{i\theta_{2j}}(j = 2,\cdots,n)$. 此即 $A_{2j} = e^{i\theta_{2j}}I_{2j}(j = 2,\cdots,n)$. 同样可得 $A_{3j} = e^{i\theta_{3j}}I_{3j}(j = 2,\cdots,n)$. 一般有 $A_{ij} = e^{i\theta_{ij}}I_{ij}(i = 2,\cdots,m; j = 2,\cdots,n)$.

5) 下面证明 $A_{ij} = I_{ij}(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$. 事实上，此时 $A = \mathrm{diag}[I^{(n)}, 1, e^{i\theta_{22}}, \cdots, e^{i\theta_{2n}}, 1, e^{i\theta_{32}}, \cdots, e^{i\theta_{3n}}, \cdots, 1, e^{i\theta_{m2}}, \cdots, e^{i\theta_{mn}}]$，对 R_{I} 内任一点 $Z = (z_{\alpha\beta})$，其对应像点为

$$W = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & z_{kl}e^{i\theta_{kl}} & & \\ z_{m1} & & & \end{pmatrix},$$

这样就易计算出 $I - Z\bar{Z}'$, $I - \bar{Z}'Z$ 和 $I - \overline{W}W'$, $I - \overline{W}'W$ 的表达式，应满足 $(I - ZZ') \times (I - Z'Z) = A[(I - WW') \times (I - W'W)]\bar{A}'$. 令 $Z(ij, kl)$, $W(ij, kl)$ 分别表示上式左右两端第 (i, j) 行与第 (k, l) 列处的元素.

1°. 取 $z_{1i} = 0$ $(i \neq 2)$, $z_{i1} = 0$ $(i \neq 2)$, 由 $Z(11,12) = W(11,12)$ 得

$$(1 - |z_{12}|^2)(-z_{21}z_{22}) = (1 - |z_{12}|^2)(-\bar{z}_{21}z_{22}e^{i\theta_{22}}), 即\ e^{i\theta_{22}} = 1.$$

再由 $Z(11,13) = W(11,13)$ 得

$$(1 - |z_{12}|^2)\cdot(-z_{21}z_{23}) = (1 - |z_{12}|^2)(-\bar{z}_{21}z_{23}e^{i\theta_{23}}), 即\ e^{i\theta_{23}} = 1.$$

一般由 $Z(11,1j) = W(11,1j)$ 得

$$(1 - |z_{12}|^2)(-\bar{z}_{21}z_{2j}) = (1 - |z_{12}|^2)(-z_{21}z_{2j}e^{i\theta_{2j}})$$

即有 $e^{i\theta_{2j}} = 1$ $(j = 2, \cdots, n)$.

2°. 取 $z_{1l} = 0$ $(l \neq j)$, $z_{l1} = 0$ $(l \neq j)$. 由 $Z(11,12) = W(11,12)$ 得

$$(1 - |z_{1j}|^2)\cdot(-\bar{z}_{j1}z_{j2}) = (1 - |z_{1j}|^2)(-z_{j1}z_{j2}e^{i\theta_{j2}}), 即有\ e^{i\theta_{j2}} = 1.$$

一般由 $Z(11,1l) = W(11,1l)$ 得

$$(1 - |z_{1j}|^2)(-z_{j1}z_{jl}) = (1 - |z_{1j}|^2)(-z_{j1}z_{jl}e^{i\theta_{jl}}),$$

即有 $e^{i\theta_{jl}} = 1$ $(l = 2, \cdots, n)$, 而 $j = 2, \cdots, m$. 故所有 $e^{i\theta_{jl}} = 1$. 也即 $A_{ij} = I_{ij}$. 此即(1.2.11)式经过一连串的酉线性变换后，最后变为 $UWV = Z$ 或 $UWV = Z'$.

6) 定理证明之完成还待说明当 $m \neq n$ 时不可能有 $\sum_{i=1}^{m} |a_{i1}|^2 = 1$, $a_{lk} = 0$ $(k \neq 1)$.

事实上，若如此，则存在酉方阵

$$U_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

使 $U_{21}A_{12} = I_{21}$. 此时可化 A_{13} 为 I_{13}. 因若

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则重复 2) 的步骤，仍可得 $\sum_{i=1}^{n} |a_{1i}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |a_{i1}|^2 = 1$ 以及 $\sum_{i=1}^{n} |a_{1i}|^2 \cdot$

$\sum_{i=1}^{m} |a_{i1}|^2 = 0$. 此时，只可能 $\sum_{i=3}^{m} |a_{i1}|^2 = 1, a_{kl} = 0\ (l \neq 1)$. 不然，取 $Z = z_{11}I_{11} + z_{12}I_{12} + z_{13}I_{13} \in R_{\mathrm{I}}, (z_{11}z_{12}z_{13} \neq 0)$ 其秩为 1，但其像点 $W = z_{11}I_{11} + z_{12}I_{21} + z_{13}A_{13}$ 之秩显然不为 1，与引理 1 矛盾. 故可取酉方阵 U_{13} 使得 $U_{13}A_{13} = I_{31}, U_{13}I_{11} = I_{11}, U_{13}I_{21} = I_{21}$. 重复下去，可化 A_{14} 为 I_{41} 直至化 A_{1m} 为 I_{m1}. 此即若 $A_{11} = I_{11}, A_{12} = I_{21}$，则必存在酉方阵 U 使 $UA_{1j} = I_{j1}(j = 1, \cdots, m)$. 由于 $m < n$，此时

$$A_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

取 $Z = z_1I_{11} + z_2I_{1n} \in R_{\mathrm{I}}, z_1z_2 \neq 0$，对应像点 $W = z_1I_{11} + z_2A_{1n}$，应满足(1.2.8)式. 比较两端第(1,1)行第(1,1)列处元素得 $\sum_{i=1}^{n} |a_{1i}|^2 = 1$. 由于 A 为酉方阵，故 $a_{lk} = 0\ (l = 1)$. 此时取 $Z = z_1I_{11} + z_2I_{12} + z_3I_{1n} \in R_{\mathrm{I}}, z_1z_2z_3 \neq 0$，$Z$ 的秩为 1，但对应像点 $W = z_1I_{11} + z_2I_{21} + z_3A_{1n}$ 的秩不为 1，矛盾. 因此，当 $m \neq n$ 时，A_{12} 不可能化为 I_{21} 只能化为 I_{12}.

Ⅱ.4　$R_{\mathrm{II}}(P)$的解析自同胚最大群

由于 1.1.1 我们只要确定 R_{II} 的在原点的固定分群 Γ_0^2 就行了. 我们有

Ⅱ.4.1　定理 2.　设 $S \in \Gamma_0^2$，它可写为

$$W = \sum_{i \leqslant j=1}^{p} z_{ij}B_{ij} \tag{1.2.12}$$

则存在常数酉方阵 U 使得 $U'B_{ij}U = I_{ij}(i \leqslant j = 1, \cdots, p)$.

证: 1) 由引理 4 可知 B_{11} 之秩为 1，且 B_{11} 为对称方阵，特征根为 $1, \cdots, 0$. 因此存在酉方阵 U_{11}，使得 $U'_{11}B_{11}U_{11} = I_{11}$. 此时，

$$W^* = U'_{11}WU_{11} = \sum_{i \leqslant j=1}^{p} z_{ij}U'_{11}B_{ij}U_{11} = \sum_{j \leqslant i=1}^{p} z_{ij}B^*_{ij}.$$

与定理 1 一样，我们仍记 W^* 为 W，B^*_{ij} 为 B_{ij}，且作同样的约定.

2) 由引理 7，我们有

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{12} & & & \\ \vdots & & 0 & \\ b_{1p} & & & \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=2}^{p} |b_{1i}|^2 = 1,$$

存在酉方阵 U_{12} 使 $U'_{12}B_{12}U_{12}=I_{12}$, $U'_{12}I_{11}U_{12}=I_{11}$. 即化 B_{12} 为 I_{12}. 由引理 7,此时我们有

$$B_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ 0 & & & & \\ b_{13} & & & & \\ \vdots & & & 0 & \\ b_{1p} & & & & \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=3}^{p}|b_{1j}|^2=1.$$

存在酉方阵 U_{13},使得 $U'_{13}B_{13}U_{13}=I_{13}$, $U'_{13}I_{11}U_{13}=I_{11}$, $U'_{13}I_{12}U_{13}=I_{12}$. 即化 B_{13} 为 I_{13}. 如此下去,使 $B_{1j}=I_{1j}$, $(j=1,\cdots,p)$

3) 下面证明 $B_{kl}=e^{i\theta_{kl}}I_{kl}(1<k\leqslant l=2,\cdots,p)$. 此时

$$B=\begin{pmatrix} I^{(p)} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \bar{D}'D=DD'=I.$$

因此

$$B_{kl}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{2p} & \cdots & b_{pp} \end{pmatrix}=B'_{kl}.$$

取 $Z=z_1I_{11}+z_2I_{kl}\in R_{\mathrm{II}}$, $z_1z_2\neq 0$, Z 的对应像点 $W=z_1I_{11}+z_2B_{kl}$. 它应满足 $[(I-\bar{Z}Z)\times(I-\bar{Z}'Z)]_z=B[(I-\bar{W}W)\times(I-\bar{W}'W)]_zB'$. 在两端比较对应元素可得即 $|b_{kl}|^2=1$. 即 $b_{kl}=e^{i\theta_{kl}}$, 即 $B_{kl}=e^{i\theta_{kl}}I_{kl}$.

4) 下面证明 $e^{i\theta_{kl}}=1$. 此时

$$B=\operatorname{diag}[I^{(p)},e^{i\theta_{22}},\cdots,e^{i\theta_{2p}},e^{i\theta_{33}},\cdots,e^{i\theta_{3p}},\cdots,e^{i\theta_{pp}}]$$

用 Ⅱ.3 中的 5) 的相同方法,利用 Bergman 度量方阵即可得 $e^{i\theta_{kl}}=1$,从而定理得证.

Ⅱ.5 $R_{\mathrm{IV}}(N)$的解析自同胚最大群

确定 R_{IV} 的解析自同胚最大群是很容易的,但为完备起见,我们证明之. 由 Ⅰ.1.1 只要确定 R_{IV} 的原点的固定分群 Γ_0^4 就行. 我们有

定理 3. 设 $S\in\Gamma_0^4$,它可写为 $w=zA$,则 $A=e^{i\theta}D$. 其中 θ 为实数, D 为实正交方阵.

证: 首先有引理,若 z 为 R_{IV} 之边界点,则 $z=e^{i\theta}(\lambda_1,i\lambda_2,0,\cdots,0)\Gamma$, 其中 Γ 为 N 阶实正交方阵, λ_1,λ_2 为实数,且 $\lambda_1\geqslant\lambda_2$ 满足 $\lambda_1=1,\lambda_2=0$ 或 $\lambda_1+\lambda_2=\lambda$. 此引理见[Lu2].

由于 S 把 R_{IV} 的边界点映为边界点. 令 $A=(a_{\alpha\beta})$, 取 $z=(1,0,\cdots,0)$ 为 R_{IV} 之边界点, 经 S 变为边界点 $W=(a_{11},\cdots,a_{1N})$. 此即

$$1+|WW'|^2-2WW'=\left(\left|\sum_{i=1}^{N}a_{1i}^2\right|-1\right)\left(\left|\sum_{i=1}^{N}a_{1i}^2\right|+1\right)$$

与

$$(1-|WW'|)=1-\left|\sum_{i=1}^{N}a_{1i}^2\right|$$

至少有一式为零. 但此两式总是同时为零. 由引理得,

$$W=(a_{11},\cdots,a_{1N})=e^{i\theta_1}(\lambda_1,i\lambda_2,0,\cdots,0)\Gamma,$$

其中 $\lambda_1=1,\lambda_2=0$, 否则 $\lambda_1+\lambda_2=1$, 此时 $1-|WW'|=1-(\lambda_1-\lambda_2)=2\lambda_2\neq 0$, 矛盾. 此即 $(a_{11},\cdots,a_{1N})=e^{i\theta_1}x_1$, $x_1=(x_{11},\cdots,x_{1N})$ 为实向量, 而且 $x_1x'_1=1$.

同样可证 $(a_{j1},\cdots,a_{jN})=e^{i\theta_j}x_j$, $x_j=(x_{j1},\cdots,x_{jN})$ 为实向量, 而且 $x_jx'_j=1(j=1,2,\cdots,N)$. 这样有

$$A=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1}(x_{11},\cdots,x_{1N})\\ e^{i\theta_2}(x_{21},\cdots,x_{2N})\\ \vdots\quad\vdots\quad\quad\vdots\\ e^{i\theta_N}(x_{N1},\cdots,x_{NN})\end{pmatrix}$$

由于变换 $w=zA'$ 也属于 Γ_0^4, 因此同样可得到 $(e^{i\theta_1}x_{11},e^{i\theta_2}x_{21},\cdots,e^{i\theta_N}x_N)=e^{i\theta}y$, y 为实向量且 $yy'=1$, 所以 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_N=\theta$. 因此有

$$A=e^{i\theta}\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1N}\\ \vdots&&\vdots\\ x_{N1}&\cdots&x_{NN}\end{pmatrix}=e^{i\theta}D,$$

由于 A 为酉方阵, 故 D 为实正交方阵.

本节内容取自文[YW16].

Ⅲ. 例外域的对合变换

华罗庚对四大类的典型域进行了系统的研究, 但是并没有涉及到两个例外域, 原因是当时它们的矩阵实现尚未找到. 直到 20 世纪 60 年代末与 70 年代初才给出了它们的矩阵实现. 其后许以超在文[XY]中将它们实现为 Siegel 域的形式. 从本节开始, 我们用 4 节的篇幅来系统阐述例外域. 由于例外域的对合变换长期以来一直没有解决, 其原因在于其难度很

大，本节以 16 维的例外域为例求出其对合变换（又称为 Cartan 对合）. 16 维例外域的具体形式见开篇的(0.4′)式，用 $S(16)$ 表之.

本节要证明的基本事实是以下的

定理 1. 令 φ 表示变换

$$\begin{cases} z^* = -(z_7^*, z_8^*, z_1^*, \cdots, z_6^*) = \dfrac{1}{\Delta}(-z_8, -z_7, z_1, \cdots, z_6), \\ t^* = (t_1^*, \cdots, t_4^*) = \dfrac{\mathrm{i}}{\Delta}\left(u\sum_{j=1}^{6} z_j Q_j - z_8 t\right), \\ u^* = (u_1^*, \cdots, u_4^*) = \dfrac{\mathrm{i}}{\Delta}\left(t\sum_{j=1}^{6} z_j \bar{Q}'_j - z_7 u\right), \end{cases}$$

则 φ 就是 $S(16)$ 在点 $(\mathrm{i}I, 0)$ 处的 Cartan 对合，其中

$$\Delta = \Delta_z = z_7 z_8 - \sum_{j=1}^{6} z_j^2, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}, \quad Q_j \text{ 见(0.4′)}.$$

由于 $S(16)$ 是一个齐性域（可递域）[XY]，因此 $S(16)$ 在一点的对合求得后，$S(16)$ 其余各点的对合都可求得. 定理 1 得证后，就证明了 $S(16)$ 的每一点都存在 Cartan 对合.

由 Cartan 对合的定义，为了证明定理 1，只要证明以下三个事实成立.

a. $(\mathrm{i}I, 0)$ 是 φ 的孤立不动点，

b. $\varphi \cdot \varphi = \varphi^2 = I$，

c. φ 是 $S(16)$ 的全纯自同构.

为方便起见，我们令（Q_j 的定义可见(0.4′)式）

$$\begin{aligned} Q_z &= \sum_{j=1}^{6} z_j Q_j, & \bar{Q}'_z &= \sum_{j=1}^{6} z_j \bar{Q}'_j, \\ Q_{\bar{z}} &= \sum_{j=1}^{6} \bar{z}_j Q_j, & \bar{Q}'_{\bar{z}} &= \sum_{j=1}^{6} \bar{z}_j \bar{Q}'_j, \\ Q_w &= \sum_{j=1}^{6} w_j Q_j, & \bar{Q}'_w &= \sum_{j=1}^{6} w_j \bar{Q}'_j, \\ Q'_{\bar{w}} &= \sum_{j=1}^{6} \bar{w}_j Q_j, & \bar{Q}'_w &= \sum_{j=1}^{6} w_j Q'_j \end{aligned}$$

1. 事实 a 的证明.

若

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}(-z_8, -z_7, z_1, \cdots, z_6) = (z_7, z_8, z_1, \cdots, z_6) \\ \dfrac{1}{\Delta}(\mathrm{i}uQ_z - \mathrm{i}z_8 t) = t \\ \dfrac{1}{\Delta}(\mathrm{i}t\bar{Q}'_z - \mathrm{i}z_7 u) = u, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

则由第一个等式得到

$$-z_8=\Delta z_7,\quad -z_7=\Delta z_8,\quad z_j=\Delta z_j,\quad j=1,\cdots,6.$$

首先可断定 $\Delta\neq1$,否则有 $z_7=-z_8$,但由 $S(16)$的定义中可见 $\operatorname{Im} z_7$ 与 $\operatorname{Im} z_8$ 都是正数,因此不可能有 $z_7=-z_8$. 故 $\Delta\neq1$,显然 $\Delta\neq0$,因而有(注意,这里的 $\operatorname{Im} z_7$ 表示 z_7 的虚部)

$$z_j=0\ (j=1,\cdots,6),\quad z_7^2=-1,\quad z_8^2=-1.$$

此即

$$z_7=z_8=\mathrm{i},\quad z_j=0,\quad j=1,\cdots,6.$$

这时(1)式中的第二、三式分别为

$$\frac{-\mathrm{i}z_8t}{z_7z_8}=t,\quad \frac{-\mathrm{i}z_7u}{z_7z_8}=u,$$

此即 $-t=t$, $-u=u$,因此 $t=u=0$. 因此 φ 只有一个不动点$(\mathrm{i},\mathrm{i},0,\cdots,0)$,写成矩阵形式就是点$(\mathrm{i}I,0)$事实 a 得证.

2. 事实 b 的证明.

$$\begin{aligned}z&=(z_7,z_8,z_1,\cdots,z_6)\\&\xrightarrow{\varphi}\frac{1}{\Delta_z}(-z_8,-z_7,z_1,\cdots,z_6)=(w_7,w_8,w_1,\cdots,w_6)\\&\xrightarrow{\varphi}\frac{1}{\Delta_w}(-w_8,-w_7,w_1,\cdots,w_6)=\frac{1}{\Delta_z\Delta_w}(z_7,z_8,z_1,\cdots,z_6).\end{aligned}$$

由于 $$\Delta_w=w_7w_8-\sum_{j=1}^{6}w_j^2=\frac{1}{\Delta_z^2}\left(z_7z_8-\sum z_j^2\right)=\frac{1}{\Delta_z},$$

因此有 $z\xrightarrow{\varphi^2}z$.

另一方面

$$\begin{aligned}(t,u)&\xrightarrow{\varphi}\frac{\mathrm{i}}{\Delta_z}(uQ_z-z_8t,tQ'_z-z_7u)\\&=(s,v)\xrightarrow{\varphi}\frac{\mathrm{i}}{\Delta_w}(vQ_w-sw_8,s\overline{Q}'_w-vw_7)\\&=\mathrm{i}\Delta_z\Big[\frac{\mathrm{i}}{\Delta_z^2}(t\overline{Q}'_z-z_7u)Q_z+\frac{\mathrm{i}z_7}{\Delta_z^2}(uQ_z-z_8t),\\&\qquad\frac{\mathrm{i}}{\Delta_z^2}(uQ_z-z_8t)\overline{Q}'_z+\frac{\mathrm{i}z_8}{\Delta_z^2}(t\overline{Q}'_z-z_7u)\Big]\\&=\frac{-1}{\Delta_z}(t\overline{Q}'_zQ_z-tz_7z_8,uQ_z\overline{Q}'_z-uz_7z_8)\\&=\frac{-1}{\Delta_z}\left(t\sum_{j=1}^{6}z_j^2-tz_7z_8,u\sum_{j=1}^{6}z_j^2-uz_7z_8\right)=(t,u).\end{aligned}$$

这里用到了以下等式

$$Q_z Q'_z = \overline{Q}'_z Q_z - \left(\sum_{j=1}^{6} z_j^2\right) I, \tag{1.3.3}$$

因此有 $$(t,u) \xrightarrow{\varphi^2} (t,u). \tag{1.3.4}$$

由(1.3.2)与(1.3.4)我们有

$$(z,t,u) \xrightarrow{\varphi^2} (z,t,u),$$

这就证明了事实 b.

3. 事实 c 的证明.

由于当$(z,t,u) \in S(16)$时,$\Delta_z \neq 0$,因此 φ 的全纯性是显然的.下面只要证明 φ 是$S(16)$的自同构就行.

首先要把 $S(16)$ 的表达式改写.由于

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{Im} z_7 - t\bar{t}')(\operatorname{Im} z_8 - u\bar{u}') - \sum_{j=1}^{6}\left[\operatorname{Im} z_j - \frac{1}{2}(t\overline{Q}'_j\bar{u}' + uQ_j\bar{t}')\right]^2 \\
&= (\operatorname{Im} z_7)(\operatorname{Im} z_8) - (\operatorname{Im} z_7)u\bar{u}' - (\operatorname{Im} z_8)t\bar{t}' + t\bar{t}'u\bar{u}' - \sum(\operatorname{Im} z_j)^2 \\
&\quad + \sum(\operatorname{Im} z_j)(t\overline{Q}'_j\bar{u}' + uQ_j\bar{t}') - \frac{1}{4}\sum[(t\overline{Q}'_j\bar{u}')^2 + (uQ_j\bar{t}')^2 \\
&\quad + 2t\overline{Q}'_j\bar{u}'uQ_j\bar{t}'] \\
&= (\operatorname{Im} z_7)(\operatorname{Im} z_8) - \sum(\operatorname{Im} z_j)^2 - (\operatorname{Im} z_7)u\bar{u}' - (\operatorname{Im} z_8)t\bar{t}' \\
&\quad + \sum(\operatorname{Im} z_j)(t\overline{Q}'_j\bar{u}' + uQ_j\bar{t}') + tD'u'\bar{u}D\bar{t}'.
\end{aligned}$$

这里用到了如下关系:

$$u\left(\sum_{j=1}^{6} Q_j\bar{t}'uQ_j\right) = 0, \quad t\left(\sum_{j=1}^{6} \overline{Q}'_j\bar{u}'tQ'_j\right) = 0, \tag{1.3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{6}(Q_j\bar{t}'tQ_j) - \sum_{j=1}^{6}(\overline{Q}'_j t' tQ_j) = 2t\bar{t}'I - 2D't'tD. \tag{1.3.6}$$

由(1.3.5)易得$\sum(t\overline{Q}'_j\bar{u}')^2 = 0$及$\sum(uQ_j\bar{t}')^2 = 0$.其中

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $S(16)$ 可表为

$$\begin{aligned}
S(16) = \{(z,t,u) \in \mathbf{C}^{16} : &(\operatorname{Im} z_7)(\operatorname{Im} z_8) - \sum_{j=1}^{6}(\operatorname{Im} z_j)^2 - (\operatorname{Im} z_7)u\bar{u}' \\
&- (\operatorname{Im} z_8)t\bar{t}' + tD'u'uD\bar{t}' + \sum_{j=1}^{6}(\operatorname{Im} z_j)(t\overline{Q}'_j\bar{u}' + uQ_j\bar{t}') > 0, \\
&\operatorname{Im} z_7 - t\bar{t}' > 0\}.
\end{aligned}$$

令大括号内的第一个不等式左边为 $S(z,t,u)$.在 φ 下只要证明

$$S(z^*,t^*,u^*) = \frac{1}{|\Delta_z|^2} S(z,t,u)$$

$$\operatorname{Im} z_7^* - t^* \overline{t^*}' > 0 \tag{1.3.7}$$

就证明了 φ 是 $S(16)$ 的同自构.

i. $$(\operatorname{Im} z_7^*)(\operatorname{Im} z_8^*) - \sum (\operatorname{Im} z_j^*)^2$$

$$= \frac{1}{|\Delta|^4}\left[\frac{-\overline{\Delta} z_8 + \Delta \overline{z}_8}{2i} \cdot \frac{\overline{\Delta} z_7 + \Delta \overline{z}_7}{2i} - \sum_{j=1}^{6}\left(\frac{-\overline{\Delta} z_j + \Delta \overline{z}_j}{2i}\right)^2\right]$$

$$= \frac{-1}{4|\Delta|^4}[\overline{\Delta}^2 z_7 z_8 + \Delta^2 \overline{z}_7 \overline{z}_8 - |\Delta|^2 z_7 \overline{z}_8 - |\Delta|^2 \overline{z}_7 z_8$$

$$- \sum (\overline{\Delta}^2 z_j^2 + \Delta^2 \overline{z}_j^2 - 2|\Delta|^2 \overline{z}_j z_j)]$$

$$= \frac{-1}{4|\Delta|^4}[\overline{\Delta}^2 \Delta + \Delta^2 \overline{\Delta} - |\Delta|^2 (z_7 \overline{z}_8 + \overline{z}_7 z_8 - 2\sum_{j=1}^{6} |z_j|^2)]$$

$$= \frac{-1}{4|\Delta|^2}[\overline{\Delta} + \Delta - (z_7 \overline{z}_8 + \overline{z}_7 z_8 - 2\sum |z_j|^2)]$$

$$= \frac{-1}{4|\Delta|^2}[(z_7 - \overline{z}_7) - \sum (z_j - \overline{z}_j)^2]$$

$$= \frac{1}{|\Delta|^2}[(\operatorname{Im} z_7)(\operatorname{Im} z_8) - \sum_{j=1}^{6} (\operatorname{Im} z_j)^2].$$

ii. 经计算,有

$$-(\operatorname{Im} z_7^*) u^* \overline{u^*}' = \frac{1}{2i|\Delta|^4}[-\Delta z_8 t\overline{Q}_z' Q_z \overline{t}' - \Delta \overline{z}_8 |z_7|^2 u \overline{u}'$$
$$+ \Delta z_7 \overline{z}_8 t \overline{Q}_z' \overline{u}' + \Delta z_7 z_8 u Q_z \overline{t}' + \overline{\Delta} z_8 t \overline{Q}_z' Q_z \overline{t}' + \overline{\Delta} |z_7|^2 z_8 u \overline{u}'$$
$$- \overline{\Delta} z_7 z_8 t \overline{Q}_z' \overline{u}' - \overline{\Delta} z_7 z_8 u Q_z \overline{t}'], \tag{1.3.8}$$

$$-(\operatorname{Im} z_8^*) t^* \overline{t^*}' = \frac{1}{2i|\Delta|^4}[-\Delta z_7 u Q_z \overline{Q}_z' \overline{u}' - \Delta \overline{z}_7 |z_8|^2 t \overline{t}'$$
$$+ \Delta \overline{z}_7 z_8 u Q_z \overline{t}' + \Delta \overline{z}_7 z_8 t \overline{Q}_z' \overline{u}' + \overline{\Delta} z_7 u Q_z \overline{Q}_z' \overline{u}' + \overline{\Delta} z_7 |z_8|^2 t \overline{t}'$$
$$- \Delta z_7 \overline{z}_8 u Q_z \overline{t}' - \overline{\Delta} z_7 z_8 t \overline{Q}_z' \overline{u}'], \tag{1.3.9}$$

$$t^* \overline{Q}_j' \overline{u^*}' + u^* Q_j \overline{t^*}' = \frac{1}{|\Delta|^2}(u Q_z - z_8 t) \overline{Q}_j' (\overline{Q_z t}' - \overline{z}_7 \overline{u}')$$
$$+ \frac{1}{|\Delta|^2}(t \overline{Q}_z' - z_7 u) Q_j (\overline{Q}_z' \overline{u}' - \overline{z}_8 \overline{t}').$$

$$\sum_{j=1}^{6} (\operatorname{Im} z_j)(t^* \overline{Q}_j' \overline{u^*}' + u^* Q_j \overline{t^*}')$$

$$= \frac{1}{2i|\Delta|^4}[\sum (\overline{\Delta} z_j u Q_z \overline{Q}_j' Q_{\overline{z}} \overline{t}') + \sum (\overline{\Delta} z_j z_7 z_8 t \overline{Q}_j' \overline{u}')$$
$$- \sum (\Delta z_j \overline{z}_7 u Q_j \overline{Q}_j' \overline{u}') - \sum (\overline{\Delta} z_j z_8 t \overline{Q}_j' Q_z \overline{t}') + \sum (\overline{\Delta} z_j t \overline{Q}_z' Q_j \overline{Q}_z' \overline{u}')$$
$$+ \sum (\overline{\Delta} z_j z_7 \overline{z}_8 u Q_j \overline{t}') - \sum (\overline{\Delta} z_j z_8 t \overline{Q}_z' Q_j \overline{t}') - \sum (\overline{\Delta} z_j z_7 u Q_j \overline{Q}_z' \overline{u}')$$
$$- \sum (\Delta \overline{z}_j u Q_z \overline{Q}_j' Q_z \overline{t}') - \sum (\Delta \overline{z}_j \overline{z}_7 z_8 t \overline{Q}_j' \overline{u}') + \sum (\Delta z_j \overline{z}_7 u Q_z \overline{Q}_j' \overline{u}')$$
$$+ \sum (\Delta \overline{z}_j z_8 t \overline{Q}_j' Q_z \overline{t}') - \sum (\Delta \overline{z}_j t \overline{Q}_z' Q_j \overline{Q}_z' \overline{u}') - \sum (\Delta \overline{z}_j z_7 \overline{z}_8 u Q_j \overline{t}')$$

$$+\sum(\Delta z_j z_8 t Q_z' Q_j \bar{t}') + \sum(\Delta z_j z_7 u Q_j Q_z' \bar{u}')]. \tag{1.3.10}$$

将(1.3.8)、(1.3.9)、(1.3.10) 中形为 $u(\cdots)\bar{u}'$ 的项相加,得

$$\frac{u}{2\mathrm{i}\,|\Delta|^4}[-\Delta z_8\,|z_7|^2+\bar{\Delta} z_8\,|z_7|^2-\Delta\bar{z}_7 Q_z Q_z'+\bar{\Delta} z_7 Q_z \bar{Q}_{\bar{z}}'$$

$$-\overline{\Delta z_7}\sum z_j^2-\Delta z_7 Q_z\bar{Q}_{\bar{z}}'+\Delta\bar{z}_7 Q_z\bar{Q}_{\bar{z}}'+\Delta z_7\sum\bar{z}_j^2]\bar{u}'$$

$$=\frac{u}{|\Delta|^4}\left[|z_7|^2\left(\frac{\overline{\Delta z_8}-\Delta z_8}{2\mathrm{i}}\right)+\frac{\Delta z_7}{2\mathrm{i}}\sum\bar{z}_j^2-\frac{\overline{\Delta z_7}}{2\mathrm{i}}\sum z_j^2\right]\bar{u}'$$

$$=\frac{-1}{|\Delta|^2}(\operatorname{Im} z_7)u\bar{u}' \tag{1.3.11}$$

将(1.3.8),(1.3.9),(1.3.10) 中形为 $t(\cdots)\bar{t}'$ 的项相加,得到

$$\frac{t}{2\mathrm{i}\,|\Delta|^4}[-\Delta\bar{z}_8\bar{Q}_z' Q_z+\bar{\Delta} z_8\bar{Q}_z' Q_{\bar{z}}-\Delta\bar{z}_7\,|z_8|^2+\bar{\Delta} z_7\,|z_8|^2$$

$$-\bar{\Delta} z_8\bar{Q}_z' Q_z-\overline{\Delta z_8}\sum z_j^2+\Delta z_8\sum\bar{z}_j^2+\Delta\bar{z}_8'\bar{Q}_z' Q_z]\bar{t}'$$

$$=\frac{t}{|\Delta|^4}\left[|z_8|^2\left(\frac{\Delta z_7-\Delta\bar{z}_7}{2\mathrm{i}}\right)+\frac{\Delta z_8}{2\mathrm{i}}\sum z_j^2-\frac{\overline{\Delta z_8}}{2\mathrm{i}}\sum z_j^2\right]\bar{t}'$$

$$=\frac{-1}{|\Delta|^2}(\operatorname{Im} z_8)t\bar{t}'. \tag{1.3.12}$$

将(1.3.8),(1.3.9),(1.3.10) 中形为 $t(\cdots)u'$ 的项相加,有

$$\frac{t}{2\mathrm{i}\,|\Delta|^4}[\Delta\bar{z}_7\bar{z}_8\bar{Q}_z'-\overline{\Delta z_7}z_8\bar{Q}_z'+\Delta\bar{z}_7 z_8\bar{Q}_z'-\bar{\Delta} z_7 z_8\bar{Q}_{\bar{z}}'$$

$$+\overline{\Delta z_7}z_8 Q_z'+\overline{\Delta Q_z'}\sum z_j^2-\Delta\bar{z}_7 z_8 Q_{\bar{z}}'-\Delta Q_z'\sum\bar{z}_j^2]\bar{u}'$$

$$=\frac{t}{2\mathrm{i}\,|\Delta|^4}[\bar{Q}_z'(\Delta z_7 z_8-\overline{\Delta z_7}z_8+\overline{\Delta z_7}z_8-\Delta\sum z_j^2)+\bar{Q}_{\bar{z}}'\,|\Delta|^2]\bar{u}'$$

$$=\frac{t}{2\mathrm{i}\,|\Delta|^2}[\bar{Q}_z'-\bar{Q}_{\bar{z}}']\bar{u}'$$

$$=\frac{1}{|\Delta|^2}t[\sum(\operatorname{Im} z_j)\bar{Q}_j']u'. \tag{1.3.13}$$

把(1.3.8),(1.3.9),(1.3.10) 中形为 $u(\cdots)\bar{t}'$ 的项相加,我们有:

$$\frac{u}{2\mathrm{i}\,|\Delta|^4}[\Delta z_7\bar{z}_8 Q_z-\bar{\Delta} z_7 z_8 Q_z+\Delta\bar{z}_7\bar{z}_8 Q_z-\Delta z_7\bar{z}_8 Q_z$$

$$+\Delta Q_z\sum z_j^2+\bar{\Delta} z_7\bar{z}_8 Q_z-\Delta Q_z\sum\bar{z}_j^2-\Delta z_7\bar{z}_8 Q_z]\,t'$$

$$=\frac{u}{2\mathrm{i}\,|\Delta|^4}[Q_{\bar{z}}(-\bar{\Delta} z_7 z_8+\bar{\Delta}\sum z_j^2)+Q_z(\Delta z_7 z_8-\Delta\sum\bar{z}_j^2)]\bar{t}'$$

$$=\frac{u}{|\Delta|^2}[\sum(\operatorname{Im} z_j)Q_j]\bar{t}'. \tag{1.3.14}$$

因此我们得到

$$-(\operatorname{Im} z_7^*)u^*\overline{u^*}'-(\operatorname{Im} z_8^*)t^*\overline{t^*}'+\sum(\operatorname{Im} z_j^*)(t^*\bar{Q}_j'\overline{u^*}'+u^*Q_j\overline{t^*}')$$

$$=(1.3.11)+(1.3.12)+(1.3.13)+(1.3.14)$$

$$-\frac{1}{|\Delta|^2}[-(\operatorname{Im} z_7)u\bar{u}' \quad (\operatorname{Im} z_8)t\,\bar{t}\,' + \sum(\operatorname{Im} z_j)(t\bar{Q}_j'\bar{u}' + uQ_j\,\bar{t}\,')]. \tag{1.3.15}$$

iii. $t^*D'u^{*\prime}\overline{u^*D\overline{t^*}'} = \frac{1}{|\Delta|^4}[(uQ_z \quad z_8t)D'(\bar{Q}_zt' - z_7u')(-\ t\,Q_z' + z_7\bar{u}),$

$$D(-Q_z'\bar{u}' + \bar{z}_8\ \bar{t}\,') = \frac{1}{|\Delta|^4}(uQ_zD'Q_zt' - uQ_zD'z_7u' - z_8tD'\bar{Q}_zt'$$
$$+ z_7z_8tD'u')(\ \bar{t}\,Q_z'D\bar{Q}_z'u' \quad \bar{t}\,Q_z'D\bar{z}_8\ \bar{t}\,' \quad \bar{z}_7\bar{u}D\bar{Q}_z'\bar{u}' + \bar{z}_7\bar{z}_8\bar{u}D\,\bar{t}\,'). \tag{1.3.16}$$

由于 $\qquad uQ_jDu' = 0, \quad j = 1,\cdots,6 \qquad (1.3.17)$

从而有 $\qquad uQ_jD'u' = -uQ_jDu' = 0, \qquad j = 1,\cdots,6$

$\qquad\qquad uD'\bar{Q}_j'u' = 0,\ uD\bar{Q}_j'u' = 0, \qquad j = 1,\cdots,6$

因此(1.3.16)式中,有

$$uQ_zD'z_7u' \quad z_7\sum uz_jQ_jD'u' = z_7\sum z_j(uQ_jD'u') = 0.$$

同样有 $\quad z_8tD'\bar{Q}_zt' = t\,Q_z'D\,\bar{t}\,'z_8 = z_7uD\bar{Q}_z'u' = 0$

这样,(1.3.16)式就变为:

$$(1.3.16) = \frac{1}{|\Delta|^4}(uQ_zD'\bar{Q}_zt'\,\overline{t}\bar{Q}_z'D\bar{Q}_z'u' + z_7z_8tD'u'\,\bar{t}\,D\bar{Q}_z'\bar{u}'$$
$$+ z_7z_8uQ_zD'Q_zt'uD\,\bar{t}\,' + |z_7|^2|z_8|^2tD'u'\bar{u}D\,\bar{t}\,'.$$

由于 $\qquad Q_zDQ_z = \sum z_j^2D, \quad Q_zD'\bar{Q}_z \quad \sum z_j^2D' \qquad (1.3.18)$

因此有 $\quad uQ_zD'\bar{Q}_zt'\,\bar{t}\,Q_z'DQ_z'\bar{u}' = u(\sum z_j^2)D't'\,\bar{t}\,(\sum z_j^2)Du'$

$$= (\sum z_j^2)(\sum z_j^2)uD't'\,\bar{t}\,D\bar{u}'$$
$$= (\sum z_j^2)(\sum \bar{z}_j^2)tDu'uD'\,t\,'$$
$$= (\sum z_j^2)(\sum z_j^2)tD'u'\bar{u}D\,\bar{t}\,',$$

$$z_7z_8tD'u'\,\bar{t}\,Q_z'D\bar{Q}_z'u' = z_7z_8tD'u'\,\bar{t}\,(\sum \bar{z}_j^2)Du'$$
$$= z_7z_8(\sum \bar{z}_j^2)tD'u'\bar{u}D'\,\bar{t}\,'$$
$$= -z_7z_8(\sum \bar{z}_j^2)tD'u'uD\,t\,',$$

$$z_7z_8uQ_zD'\bar{Q}_zt'uD\,\bar{t}\,' = \bar{z}_7\bar{z}_8(\sum z_j^2)uD't'\bar{u}D\,t\,'$$
$$= z_7z_8(\sum z_j^2)uD't'uD\,\bar{t}\,'$$
$$= \bar{z}_7\bar{z}_8(\sum z_j^2)tDu'\bar{u}D\,\bar{t}\,'$$
$$= -z_7z_8(\sum z_j^2)tD'u'uD\,t\,'.$$

于是(1.3.16)式变为

$$t^*D'u^{*\prime}u^*D\overline{t^*}' = \frac{1}{|\Delta|^4}[|z_7|^2|z_8|^2 - z_7z_8\sum z_j^2 - \bar{z}_7z_8\sum z_j^2$$

$$+ \left(\sum z_j^2\right)\left(\sum \bar{z}_j^2\right)\Big] tD'u'\bar{u}D\bar{t}'$$

$$= \frac{1}{|\Delta|^2} tD'u'\bar{u}D\bar{t}'. \qquad (1.3.19)$$

这样,从 i ~ iii,我们证明了(1.3.7)式中的第一式,即

$$S(z^*, t^*, u^*) = \frac{1}{|\Delta|^2} S(z, t, u).$$

iv. 因为当$(z^*, t^*, u^*) \in S(16)$时,$(\mathrm{Im}\, z_7^* - t^*\overline{t^*}')$恒正或恒负.令$t = 0, u = 0, \mathrm{Re}\, z_7 = 0$,则

$$(\mathrm{Im}\, z_7^* - t^*\overline{t^*}') = \frac{1}{|\Delta|^2}\left[(\mathrm{Im}\, z_7)(\mathrm{Im}\, z_8) - \sum(\mathrm{Im}\, z_j)^2\right] > 0,$$

因之总有(1.3.7)式中的第二式成立.而等式(1.3.3),(1.3.5),(1.3.6),(1.3.7)都可以经具体计算而得证.到此定理1完全得证.本节内容来自[YW11—YW15].

Ⅳ. 例外域的有界实现

É. Cartan 在 1935 年引进了 Riemann 对称空间的概念并对该空间进行了完全的分类.其中非紧 Hermitian 空间这一子类中,有 4 个经典的类型以及两个维数为 16 和 27 的例外情况,这 4 个经典的类型早就用矩阵形式实现为熟知的有界域的形式,国际上称之为对称典型域或 Cartan 域.但是长久以来,这些 Cartan 例外域的有界形式并未出现,本文仅对 16 维 Cartan 例外域来解决这一问题.简而言之,这问题就相当于将上半平面双全纯映照为单位圆域的问题,这当然很重要,而且有些问题在单位圆域上讨论要比在上半平面上讨论方便.

16 维 Cartan 例外域的 Siegel 域的形式如(0.4′)所示,记为 $S(16)$,我们证明以下的

定理 1. 域 $S(16)$经双全纯映照 σ 映为有界域$R(16)$:

$$R(16) = \{(w, s, v) \in \mathbf{C}^{16}: 1 + |ww'|^2 - 2w\bar{w}' + s(|w_7 - iw_8|^2 - 1 + \overline{Q}_w' Q_w)\bar{s}' + v(|w_7 + iw_8|^2 - 1 + Q_u Q_{\bar{w}}')\bar{v}' + sD'v'\bar{v}D\bar{s}' + s[(w_8 + iw_7)Q_{\bar{w}}' - (w_8 + iw_7)\overline{Q}_u']\bar{v}' + v[(w_8 - iw_7)Q_w - (w_8 - iw_7)Q_{\bar{w}}]\bar{s}' > 0, 1 - |ww'|^2 > 0\},$$

其中

$$w = (w_7, w_8, w_1, \cdots, w_6) \in \mathbf{C}^8, s = (s_1, \cdots, s_4) \in \mathbf{C}^4,$$
$$v = (v_1, \cdots, v_4) \in \mathbf{C}^4,$$

$$Q_w = \sum_{j=1}^{6} w_j Q_j,\ Q_w = \sum_{j=1}^{6} \overline{w}_j Q_j,\ \overline{Q}_w' = \sum w_j Q_j',\ Q_{\overline{w}}' = \sum \overline{w}_j \overline{Q}_j',$$

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix},\quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma: \begin{cases} w_7 = \dfrac{1}{\lambda(z)}(z_7 + z_8 + 2\mathrm{i}) + \mathrm{i},\ w_8 = \dfrac{1}{\mathrm{i}\lambda(z)}(z_8 - z_7), \\ w_j = \dfrac{2\mathrm{i}}{\lambda(z)} z_j,\ j = 1,2,\cdots,6, \\ s = \dfrac{2\mathrm{i}}{\lambda(z)}[(z_8 + \mathrm{i})t - uQ_z],\ v = \dfrac{2\mathrm{i}}{\lambda(z)}[(z_7 + \mathrm{i})u - t\overline{Q}_z'], \end{cases}$$

$$\lambda(z) = (z_7 + \mathrm{i})(z_8 + \mathrm{i}) - \sum_{j=1}^{6} z_j^2,$$

$$Q_z = \sum_{j=1}^{6} z_j Q_j,\ Q_{\bar z} = \sum_{j=1}^{6} \overline{z}_j Q_j,\ \overline{Q}_z' = \sum_{j=1}^{6} z_j \overline{Q}_j',\ \overline{Q}_{\bar z}' = \sum_{j=1}^{6} \overline{z}_j \overline{Q}_j'.$$

为了证明这个定理,我们先求出 σ 的逆变换 σ^{-1}:

$$\sigma^{-1} \begin{cases} z_7 = \dfrac{2}{\lambda(w)}(w_7 - \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i}) - \mathrm{i}, \\ z_8 = \dfrac{2}{\lambda(w)}(w_7 + \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i}) - \mathrm{i}, \\ z_j = \dfrac{-2\mathrm{i}}{\lambda(w)} w_j,\quad j = 1,\cdots,6, \\ t = \dfrac{-1}{\lambda(w)}[vQ_w + \mathrm{i}(w_7 - \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i})s], \\ u = \dfrac{-1}{\lambda(w)}[s\overline{Q}_w' + \mathrm{i}(w_7 + \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i})v]. \end{cases}$$

$$\lambda(w) = (w_7 - \mathrm{i})^2 + w_8^2 + \sum_{j=1}^{6} w_j^2 = \frac{4}{\lambda(z)},\text{即 } \lambda(w)\lambda(z) = 4.$$

由于

$$\sum_{j=1}^{6}[\operatorname{Im} z_j - \frac{1}{2}(t\overline{Q}_j'\overline{u}' + uQ_j\overline{t}')]^2 = \sum_{j=1}^{6}(\operatorname{Im} z_j)^2 - (\operatorname{Im} z_j)\cdot (t\overline{Q}_j'\overline{u}' + uQ_j\overline{t}') + \frac{1}{4}[(t\overline{Q}_j'\overline{u}')^2 + (uQ_j\overline{t}')^2 + 2t\overline{Q}_j'\overline{u}'uQ_j\overline{t}'].$$

再由于

$$u(\sum_{j=1}^{6} Q_j\overline{t}'uQ_j) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{6}(Q_j\overline{t}'t\overline{Q}_j') = \sum_{j=1}^{6}(Q_j'\overline{t}'tQ_j) - 2t\overline{t}'I - 2D't'\overline{t}D \qquad (1.4.1)$$

因此,若令

$$S(z,t,u) = (\operatorname{Im} z_7)(\operatorname{Im} z_8) - \sum_{j=1}^{6}(\operatorname{Im} z_j)^2 - (\operatorname{Im} z_7)u\bar{u}' - (\operatorname{Im} z_8)t\bar{t}'$$

$$+ tD'\bar{u}'uD\bar{t}' + \sum_{j=1}^{6}(\operatorname{Im} z_j)(tQ_j'\bar{u}' + uQ_j\bar{t}'),$$

则有 $\qquad S(16) = \{(z,t,u) \in \mathbf{C}^{16} : S(z,t,u) > 0,\ \operatorname{Im} z_7 - t\bar{t}' > 0\}.$

以 σ^{-1} 的表示式代入 $S(16)$,便可证明定理1.我们分以下几步进行:

1. $\quad (\operatorname{Im} z_7)(\operatorname{Im} z_8) - \sum_{j=1}^{6}(\operatorname{Im} z_j)^2$

$$= \frac{-1}{4}\Big[(z_7 - \bar{z}_7)(z_8 - \bar{z}_8) - \sum_{j=1}^{6}(z_j - \bar{z}_j)^2\Big]$$

$$= \frac{-1}{4}\Big[\frac{2}{\lambda(w)}(w_7 - \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i}) - \mathrm{i} - \frac{2}{\bar{\lambda}(w)}(\bar{w}_7 + \mathrm{i}\bar{w}_8 + \mathrm{i}) - \mathrm{i}\Big]$$

$$\Big[\frac{2}{\lambda(w)}(w_7 + \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i}) - \mathrm{i} - \frac{2}{\bar{\lambda}(w)}(\bar{w}_7 - \mathrm{i}\bar{w}_8 + \mathrm{i}) - \mathrm{i}\Big]$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{6}\Big[\frac{-2\mathrm{i}}{\lambda(w)}w_j - \frac{2\mathrm{i}}{\bar{\lambda}(w)}\bar{w}_j\Big]^2$$

$$= \frac{-1}{|\lambda(w)|^2}\Big[\bar{\lambda}(w) + \lambda(w) + 2\Big(-|w_7 - \mathrm{i}|^2 + |w_8|^2 + \sum_{j=1}^{6}|w_j|^2\Big)$$

$$- |\lambda(w)|^2 - 2\mathrm{i}\lambda(w)(w_7 - \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\bar{\lambda}(w)(\bar{w}_7 + \mathrm{i})\Big]$$

$$= \frac{1}{|\lambda(w)|^2}(1 + |w\bar{w}'|^2 - 2w\bar{w}').$$

2. $\quad -(\operatorname{Im} z_7)u\bar{u}'$

$$= \frac{-1}{2\mathrm{i}|\lambda(w)|^4}\Big[2\bar{\lambda}(w)(w_7 - \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i}) - 2\lambda(w)(\bar{w}_7 + \mathrm{i}\bar{w}_8 + \mathrm{i})$$

$$- 2\mathrm{i}|\lambda(w)|^2\Big]\big[s\bar{Q}_w' + \mathrm{i}(w_7 + \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i})v\big]\big[Q_w\bar{s}' - \mathrm{i}(\bar{w}_7 - \mathrm{i}\bar{w}_8$$

$$+ \mathrm{i})\bar{v}'\big].$$

令 $\quad (w_7 - \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i}) = y_8,\ w_7 + \mathrm{i}w_8 - \mathrm{i} = y_7,\ w_j = -\mathrm{i}y_j,\ j = 1,\cdots,6.$

$$\tag{1.4.2}$$

则
$$\begin{cases} \lambda(w) = y_7y_8 - \sum_{j=1}^{6}y_j^2 \doteq \lambda(y), \\ t = \frac{1}{\lambda(y)}[\mathrm{i}vQ_y - \mathrm{i}y_8 s],\ u = \frac{1}{\lambda(y)}[\mathrm{i}s\bar{Q}_y' - \mathrm{i}y_7 v], \end{cases} \tag{1.4.3}$$

所以有

$(\operatorname{Im} z_7)u\bar{u}'$

$$= \frac{-1}{\mathrm{i}|\lambda(y)|^4}[\bar{\lambda}(y)y_8 - \lambda(y)\bar{y}_8][s\bar{Q}_y' - y_7 v][Q_{\bar{y}}\bar{s}' - \bar{y}_7\bar{v}'](-a)$$

$$+\frac{1}{|\lambda(y)|^2}(s\overline{Q}_y' - y_7 v)(Q_{\bar{y}}\bar{s}' - \bar{y}_7\bar{v}')(= b).$$

$$a = \frac{+1}{|\lambda(y)|^4}[\bar{\lambda}(y)y_8 sQ_y'Q_{\bar{y}}\bar{s}' + \lambda(y)y_8|y_7|^2 v\bar{v}' - \bar{\lambda}(y)y_7 y_8 vQ_{\bar{y}}\bar{s}'$$
$$- \bar{\lambda}(y)y_7 y_8 s\overline{Q}_y' \bar{v}' - \lambda(y)\bar{y}_8 s\overline{Q}_y' Q_{\bar{y}}\bar{s}' - \lambda(y)\bar{y}_8|y_7|^2 v\bar{v}'$$
$$+ \lambda(y)y_7\bar{y}_8 vQ_y\bar{s}' + \lambda(y)\bar{y}_7\bar{y}_8 s\overline{Q}_y'\bar{v}'],$$

$$b = \frac{1}{|\lambda(y)|^2}(s\overline{Q}_y' - y_7 v)(Q_y\bar{s}' - \bar{y}_7\bar{v}').$$

同样,在 σ^{-1} 之下,并作变换(1.4.2) 及(1.4.3),我们有

$$-(\mathrm{Im}\, z_8)t\bar{t}' = c + d.$$

其中

$$c = \frac{1}{|\lambda(y)|^2}(vQ_y - y_8 s)(Q_y'\bar{v}' - \bar{y}_8\bar{s}'),$$

$$d = \frac{1}{|\lambda(y)|^4}[\lambda(y)y_7 vQ_y\overline{Q}_{\bar{y}}'\bar{v}' + \bar{\lambda}(y)y_7|y_8|^2 s\bar{s}' - \bar{\lambda}(y)y_7 y_8 s\overline{Q}_{\bar{y}}'\bar{v}'$$
$$- \bar{\lambda}(y)y_7\bar{y}_8 vQ_y\bar{s}' - \lambda(y)\bar{y}_7 vQ_y\overline{Q}_{\bar{y}}'\bar{v}' - \lambda(y)\bar{y}_7|y_8|^2 s\bar{s}'$$
$$+ \lambda(y)y_7 y_8 s\overline{Q}_{\bar{y}}'\bar{v}' + \lambda(y)\bar{y}_7 y_8 vQ_y\bar{s}'].$$

同样,有

$$\sum_{j=1}^{6}(\mathrm{Im}\, z_j)(t\overline{Q}_j'\bar{u}' + uQ_j\bar{t}')$$
$$= \frac{i}{|\lambda(y)|^4}[\bar{\lambda}(y)vQ_y\overline{Q}_y'Q_{\bar{y}}\bar{s}' + \lambda(y)\bar{y}_7 y_8 sQ_y'\bar{v}' - \bar{\lambda}(y)\bar{y}_7 vQ_y\overline{Q}_y'\bar{v}'$$
$$- \bar{\lambda}(y)y_8 sQ_y'Q_y\bar{s}' + \bar{\lambda}(y)s\overline{Q}_y'Q_y\overline{Q}_{\bar{y}}'\bar{v}' + \bar{\lambda}(y)y_7 y_8 vQ_y\bar{s}'$$
$$- \bar{\lambda}(y)\bar{y}_8 s\overline{Q}_y'Q_y\bar{s}' - \bar{\lambda}(y)y_7 vQ_y\overline{Q}_{\bar{y}}'\bar{v}' - \lambda(y)vQ_y\overline{Q}_y'Q_{\bar{y}}\bar{s}'$$
$$- \lambda(y)\bar{y}_7 y_8 s\overline{Q}_y'\bar{v}' + \lambda(y)\bar{y}_7 vQ_y\overline{Q}_{\bar{y}}'\bar{v}' + \lambda(y)y_8 s\overline{Q}_{\bar{y}}'Q_{\bar{y}}\bar{s}'$$
$$- \lambda(y)s\overline{Q}_y'Q_{\bar{y}}\overline{Q}_{\bar{y}}'\bar{v}' - \lambda(y)y_7\bar{y}_8 vQ_{\bar{y}}\bar{s}' + \lambda(y)\bar{y}_8 s\overline{Q}_y'Q_{\bar{y}}\bar{s}'$$
$$+ \lambda(y)y_7 vQ_y\overline{Q}_y'\bar{v}'](= e).$$

这样,我们有

$$-(\mathrm{Im}\, z_7)u\bar{u}' - (\mathrm{Im}\, z_8)t\bar{t}' + \sum_{j=1}^{6}(\mathrm{Im}\, z_j)(t\overline{Q}_j'\bar{u}' + uQ_j\bar{t}')$$
$$= a + b + c + d + e.$$

在 $a+d+e$ 中合并同类项如下:

将 $a+d+e$ 中的所有形如 $v(\cdots)\bar{v}'$ 的项合并,得到

$$\frac{iv}{|\lambda(y)|^4}[-\lambda(y)y_8|y_7|^2 + \bar{\lambda}(y)y_8|y_7|^2 - \lambda(y)\bar{y}_7 Q_y\overline{Q}_y'$$
$$+ \bar{\lambda}(y)y_7 Q_y\overline{Q}_y' - \bar{\lambda}(y)\bar{y}_7\sum y_j^2 - \bar{\lambda}(y)y_7 Q_y\overline{Q}_{\bar{y}}'$$

$$+ \lambda(y)\bar{y}_7 Q_y \bar{Q}_y' + \lambda(y) y_7 \sum \bar{y}_j^2]\bar{v}'$$

$$= \frac{-2v}{|\lambda(y)|^4}[|y_7|^2\left(\frac{\lambda(y)y_8 - \lambda(y)\bar{y}_8}{2i}\right) + \frac{\lambda(y)}{2i} y_7 \sum y_j^2$$

$$- \frac{\bar{\lambda}(y)}{2i}\bar{y}_7 \sum y_j^2]\bar{v}'$$

$$= \frac{2}{|\lambda(y)|^2}(\operatorname{Im} y_7) v\bar{v}'.$$

在 $a + d + e$ 中把形为 $s(\cdots)\bar{s}'$ 的项合并，得到

$$\frac{is}{|\lambda(y)|^4}[-\lambda(y)\bar{y}_8\bar{Q}_y' Q_y + \bar{\lambda}(y) y_8 \bar{Q}_y' Q_y - \lambda(y) y_7 |y_8|^2$$

$$- \bar{\lambda}(y) y_8 \bar{Q}_y' Q_y - \bar{\lambda}(y)\bar{y}_8 \sum y_j^2 + \lambda(y) y_8 \sum \bar{y}_j^2 + \lambda(y)\bar{y}_8 \bar{Q}_y' Q_{\bar{y}}]\bar{s}'$$

$$= \frac{-2s}{|\lambda(y)|^4}[|y_8|^2\left(\frac{\bar{\lambda}(y)y_7 - \lambda(y)\bar{y}_7}{2i}\right) + \frac{\lambda(y)}{2i} y_8 \sum y_j^2 - \frac{\lambda(y)}{2i}\bar{y}_8 \sum y_j^2]$$

$$= \frac{2}{|\lambda(y)|^2}(\operatorname{Im} y_8) s s'.$$

在 $a + d + e$ 中把形为 $v(\cdots)\bar{s}'$ 的项合并，得到

$$\frac{iv}{|\lambda(y)|^4}[\lambda(y) y_7 y_8 Q_y - \bar{\lambda}(y) y_7 y_8 Q_y + \lambda(y)\bar{y}_7\bar{y}_8 Q_y - \bar{\lambda}(y) y_7 \bar{y}_8 Q_{\bar{y}}$$

$$+ \bar{\lambda}(y) Q_{\bar{y}} \sum y_j^2 + \bar{\lambda}(y) y_7 \bar{y}_8 Q_y - \lambda(y) Q_y \sum \bar{y}_j^2 - \lambda(y) y_7 \bar{y}_8 Q_{\bar{y}}]\bar{s}'$$

$$= \frac{iv}{|\lambda(y)|^4}[Q_{\bar{y}}(-\bar{\lambda}(y) y_7 y_8 + \bar{\lambda}(y) \sum y_j^2) + Q_y(\lambda(y) y_7 \bar{y}_8$$

$$- \lambda(y) \sum \bar{y}_j^2)]\bar{s}'$$

$$= \frac{iv}{|\lambda(y)|^2}[Q_y - Q_y]s' - \frac{-2v}{|\lambda(y)|^2}[\sum (\operatorname{Im} y_j) Q_j]s'.$$

在 $a + d + e$ 中把形为 $s(\cdots)\bar{v}'$ 的项合并，得到

$$\frac{is}{|\lambda(y)|^4}[\lambda(y)\bar{y}_7\bar{y}_8\bar{Q}_y' - \bar{\lambda}(y) y_7 \bar{y}_8 \bar{Q}_y' + \lambda(y)\bar{y}_7 y_8 \bar{Q}_y' - \bar{\lambda}(y) y_7 y_8 \bar{Q}_y'$$

$$+ \bar{\lambda}(y)\bar{y}_7 y_8 Q_y' + \bar{\lambda}(y)\bar{Q}_{\bar{y}}' \sum y_j^2 - \lambda(y) y_7 y_8 \bar{Q}_y' - \lambda(y)\bar{Q}_y' \sum \bar{y}_j^2]\bar{v}'$$

$$= \frac{is}{|\lambda(y)|^4}[\bar{Q}_y'(\lambda(y) y_7 \bar{y}_8 - \lambda(y) \sum \bar{y}_j^2) + \bar{Q}_{\bar{y}}'(\ \ \bar{\lambda}(y) y_7 y_8$$

$$+ \bar{\lambda}(y) \sum y_j^2)]\bar{v}'$$

$$= \frac{is}{|\lambda(y)|^2}[\bar{Q}_y' - \bar{Q}_{\bar{y}}']\bar{v}' = \frac{-2s}{|\lambda(y)|^2}[\sum (\operatorname{Im} y_j)\bar{Q}_j']\bar{v}'.$$

因此有
$$a + d + e = \frac{2}{|\lambda(y)|^2}[(\operatorname{Im} y_7) v\bar{v}' + (\operatorname{Im} y_8) s\bar{s}'$$

$$- \sum_{j=1}^{6} (\operatorname{Im} y_j)(s\bar{Q}_j'\bar{v}' + vQ_j\bar{s}')],$$

这样，就得到

$$(\operatorname{Im} z_7) u u' \quad (\operatorname{Im} z_8) t \bar{t}' + \sum_{j=1}^{6} (\operatorname{Im} z_j) t \overline{Q}_j' \bar{u}' + u Q_j t')$$

$$= a + b + e + b + c$$

$$= \frac{1}{|\lambda(y)|^2} [s\left(\frac{y_8 - y_8}{i} + |y_8|^2 + \overline{Q}_y' Q_y\right) \bar{s}' + v\left(\frac{y_7 - y_7}{i} + |y_7|^2 + Q_y Q_{\bar{y}}'\right) v'$$

$$+ s\left(\frac{\overline{Q}_y' - Q_y'}{i} - y_7 \overline{Q}_y' - y_8 \overline{Q}_y'\right) \bar{v}' + v\left(\frac{Q_{\bar{y}} - Q_y}{i} - y_7 Q_{\bar{y}} - \bar{y}_8 Q_y\right) \bar{s}'].$$

回到原变量 $w_7, w_8, w_1, \cdots, w_6$,我们得到

$$\cdot (\operatorname{Im} z_7) u \bar{u}' - (\operatorname{Im} z_8) t \bar{t}' + \sum_{j=1}^{6} (\operatorname{Im} z_j)(t Q_j' \bar{u}' + u Q_j \bar{t}')$$

$$= \frac{1}{|\lambda(w)|^2} \{ s[|w_7 - i w_8|^2 - 1 + \overline{Q}_w' Q_w] \bar{s}'$$

$$+ v[|w_7 + i w_8|^2 - 1 + Q_w Q_{\overline{w}}'] \bar{v}'$$

$$+ s[(w_8 + i w_7) \overline{Q}_w' - (\bar{w}_8 + i w_7) \overline{Q}_w'] \bar{v}'$$

$$+ v[\bar{w}_8 - i \bar{w}_7] Q_w - (w_8 - i w_7) Q_{\bar{w}}] \bar{s}' \}.$$

这一段的计算比较复杂,但只要注意到式(1.4.1)以及

$$Q_z \bar{Q}_z' = \overline{Q}_z' Q_z = \sum_{j=1}^{6} z_j^2, Q_{\bar{z}} Q_{\bar{z}}' - \bar{Q}_z' Q_{\bar{z}} = \sum_{j=1}^{6} \bar{z}_j^2 \qquad (1.4.4)$$

并无多大困难.

3. $t D' u' \bar{u} D \bar{t}' = \frac{1}{|\lambda(w)|^4} [v Q_w + i(w_7 - i w_8 - i) s] D' [Q_w s' + i(w_7 + i w_8 - i) v'] [\bar{s} Q_{\overline{w}}' - i(w_7 - i w_8 + i) \bar{v}] D [\overline{Q}_{\overline{w}}' \bar{v}' - i(\bar{w}_7 + i \bar{w}_8 + i) \bar{s}']$.

作变换(1.4.2)以及注意到(1.4.3),上式等于

$$\frac{1}{|(\lambda(y)|^4} [v Q_y - y_8 s] D' (\overline{Q}_y s' - y_7 v')(\bar{s} Q'_y \cdot \bar{y}_7 \bar{v}) D (\overline{Q}_{\bar{y}}' \bar{v}' \quad \bar{y}_8 \bar{s}')$$

$$= \frac{1}{|(\lambda(y)|^4} [v Q_y D' \overline{Q}_y s' - v Q_y D' y_7 v' - y_8 s D' Q_y s' + y_7 y_8 s D' v']$$

$$[\bar{s} Q_{\bar{y}}' D \overline{Q}_{\bar{y}}' \bar{v} \quad \bar{s} Q_{\bar{y}}' D \bar{y}_8 \bar{s}' - \bar{y}_7 \bar{v} D Q_{\bar{y}}' \bar{v}' + \bar{y}_7 \bar{y}_8 \bar{v} D \bar{s}'].$$

由于

$$v Q_j D v' = 0, \quad j = 1, \cdots, 6 \qquad (1.4.5)$$

从而有

$$v Q_j D' v' = - v Q_j D v' = 0, j = 1, \cdots, 6,$$

$$v D' \overline{Q}_j' v' = 0. \ \bar{v} D \overline{Q}_j' \bar{v}' = 0, j = 1, \cdots, 6.$$

因此有

$$v Q_y D' y_7 v' = y_7 \sum_{j=1}^{6} v y_j Q_j D' v' = y_7 \sum_{j=1}^{6} y_j (v Q_j D' v') = 0.$$

同样有

$$y_8 sD'\overline{Q}_y s' = sQ_{\bar{y}}'Dy_8 s' = y_7 vD\overline{Q}_y' v' = 0.$$

因此,

$$tD'u'\bar{u}D\bar{t}' = \frac{1}{|\lambda(y)|^4}[vQ_yD'\overline{Q}_y's'\bar{s}Q_y'D\overline{Q}_{\bar{y}}'\bar{v}' + y_7y_8 sD'v'sQ_{\bar{y}}'D\overline{Q}_y'\bar{v}'$$
$$+ \bar{y}_7\bar{y}_8 vQ_yD'\overline{Q}_y s'\bar{v}D\bar{s}' + |y_7|^2|y_8|^2 sD'v'\bar{v}D\bar{s}'].$$

由于

$$Q_yD\overline{Q}_y = \sum_{j=1}^{6} y_j^2 D, \quad Q_yD'\overline{Q}_y = \sum_{j=1}^{6} y_j^2 D', \tag{1.4.6}$$

我们有

$$\begin{aligned}
vQ_yD'\overline{Q}_y s' sQ_{\bar{y}}'D\overline{Q}_y'\bar{v}' &= v(\sum_{j=1}^{6} y_j^2)D's'\bar{s}(\sum_{j=1}^{6} \bar{y}_j^2)D\bar{v}' \\
&= (\sum_{j=1}^{6} y_j^2)(\sum_{j=1}^{6} \bar{y}_j^2)vD's'\bar{s}D\bar{v}' \\
&= (\sum_{j=1}^{6} y_j^2)(\sum_{j=1}^{6} \bar{y}_j^2)sDv'\bar{v}D'\bar{s}' \\
&= (\sum_{j=1}^{6} y_j^2)(\sum_{j=1}^{6} \bar{y}_j^2)sD'v'\bar{v}D\bar{s}',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_7y_8 sD'v'\bar{s}Q_{\bar{y}}'D\overline{Q}'_y\bar{v}' &= y_7y_8 sD'v'\bar{s}(\sum_{j=1}^{6} \bar{y}_j^2)D\bar{v}' \\
&= y_7y_8(\sum_{j=1}^{6} \bar{y}_j^2)sD'v'\bar{v}D'\bar{s}' \\
&= -y_7y_8(\sum_{j=1}^{6} \bar{y}_j^2)sD'v'\bar{v}D\bar{s}',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{y}_7\bar{y}_8 vQ_yD'\overline{Q}_y s'\bar{v}D\bar{s}' &= \bar{y}_7\bar{y}_8 v(\sum_{j=1}^{6} y_j^2)D's'\bar{v}Ds' \\
&= \bar{y}_7\bar{y}_8(\sum_{j=1}^{6} y_j^2)sDv'\bar{v}D\bar{s}' \\
&= -\bar{y}_7\bar{y}_8(\sum_{j=1}^{6} y_j^2)sD'v'vDs',
\end{aligned}$$

于是,我们有

$$\begin{aligned}
tD'u'\bar{u}Dt' &= \frac{sD'v'\bar{v}D\bar{s}'}{|\lambda(y)|^4}[|y_7y_8|^2 - y_7y_8(\sum \bar{y}_j^2) - y_7y_8(\sum_{j=1}^{6} y_j^2) \\
&\quad + (\sum y_j^2)(\sum_{j=1}^{6} \bar{y}_j^2)] \\
&= \frac{1}{|\lambda(y)|^2} sD'v'\bar{v}Ds'.
\end{aligned}$$

回到原变量，我们有

$$tD'u'\overline{u}D\overline{t}' = \frac{1}{|\lambda(w)|^2} sD'v'\overline{v}Ds'.$$

我们已知 $S(y,t,u)$ 在变换 σ 下变成

$$\begin{aligned} S(y,t,u) = \frac{1}{|\lambda(w)|^2}\{1 + |ww'|^2 - 2w\overline{w}' + s(|w_7 - iw_8|^2 \\ - 1 + \overline{Q}_w'Q_w)\overline{s}' + v(|w_7 + iw_8|^2 - 1 + Q_w\overline{Q}_w')\overline{v}' \\ + sD'v'Dv\overline{s}' + s[(w_8 + iw_7)\overline{Q}_{\overline{w}}' - (w_8 + iw_7)\overline{Q}_w']\overline{v}' \\ + v[(\overline{w}_8 - i\overline{w}_7)Q_w - (w_8 - iw_7)Q_{\overline{w}}]\overline{s}'\}. \end{aligned}$$

4. 从$(\operatorname{Im} y_7) - t\overline{t}' > 0$ 可知 $\operatorname{Im} y_7 > t\overline{t}' \geqslant 0$，再由第四类 Cartan 域的结果可知有 $1 - |ww'|^2 > 0$. 反之，由 $1 - |ww'|^2 > 0$，由第四类 Cartan 域的结果可知有 $\operatorname{Im} y_7 > 0$. 但由于$(\operatorname{Im} y_7) - t\overline{t}'$ 是恒大于零或恒小于零，已知 $\operatorname{Im} y_7 > 0$，故总有$(\operatorname{Im} y_7) - t\overline{t}' > 0$.

至此，我们已经证明了 $S(16)$ 在变换 σ 下，映为域 $R(16)$. 由于 $\lambda(w) \neq 0$，故 σ 的全纯性是显然的，其逆 σ^{-1} 存在而且也是全纯的，因此，σ 是一个在域 $S(16)$ 上的双全纯映照，下面证明 $R(16)$ 是有界的.

首先谈一下双全纯映照 σ 是如何求得的. 陆启铿在文[Lu] 中指出. 若 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域 D_1 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个表示域以 S 为中心，若 $f: D \to D_1$ 是一个全纯同构，则 f 一定为如下形式

$$f(y) = S + \left[\frac{\partial}{\partial \overline{t}} \ln \frac{K(y, \overline{t})}{K(t, \overline{t})}\right] T^{-1}(t, t) A. \tag{1.4.7}$$

其中 $S = f(t)$，$A = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=t}$，$\frac{\partial}{\partial \overline{t}} = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{t}_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \overline{t}_n}\right)$，$K(y, \overline{t})$ 是域 D 的 Bergman 核函数.

后来，当 D 是齐性 Siegel 域时，许以超进一步证明了上述形式的变换一定是全纯同构，而且一定把域 D 映为有界域[XY1]. 本文的 σ 就是按照公式(1.4.7) 计算出来的，显然 $R(16)$ 就是一个有界域了.

本节内容来自文[YW11—YW15].

V. 例外域的核函数

本节我们求出两个例外典型域的核函数(Bergman 核、Cauchy 核和 Poinsson 核). 众所周知，对于四大类的对称典型域的核函数，华罗庚早就在 20 世纪 50 年代求出来了，见文[Hua]. 但是对于两个例外的典型域，其核函数是什么，直到 20 世纪的 70 年代中期尚未解决. 后来许以超用他的

一套很复杂的方法求出了它所定义的所谓 N-Siegel 域的核函数的显表达式. N-Siegel 域是用一组很复杂的矩阵方程定义的,这里用 3 个印刷页也写不下.当然,N-Siegel 域的核函数的表达式也包含了两个例外典型域的核函数的表达式.但许以超没有把它单列出来.因此在对称典型域的范畴内考虑,为了完备起见,我们有必要知道这两个例外域的核函数的表达式,但是从许以超的公式中导出,你必须读懂许以超的一系列论文,还必须推断其正确与否,这是十分麻烦的.有没有一种更直接和更简单的办法呢? 下面就提供了一种办法.我们仅用不到 4 页的篇幅(相当于 N-Sigel 域的定义所需的篇幅),在 1985 年就得到了这两个例外域的核函数的显表达式.这种方法就是开篇中所提的华罗庚方法. 2000 年许以超在文[XY3, XY4]中导出了这两个例外域的 Bergman 核函数的显表达式,晚了 15 年.下面 $R_{V}(16)$, $R_{VI}(27)$ 分别表示 16 维和 27 维的例外域,其表示式分别为(0.4′)和(0.4″).

V.1 Bergman 核函数

V.1.1 下列映射组成 $R_{V}(16)$ 的全纯自同构可递群:

$$W = A\left[Z - \frac{1}{2}(Z_0 + Z_0') - \sqrt{-1}(U\bar{U}_0' + U_0U') + \frac{\sqrt{-1}}{2}(U_0\bar{U}_0' + \bar{U}_0U_0')\right]A',$$

$$R = A(U - U_0).$$

其中

$$R = \begin{pmatrix} r \\ sQ_1 \\ \vdots \\ sQ_6 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} r = (r_1, \cdots, r_4) \in \mathbf{C}^4, \\ \\ s = (s_1, \cdots, s_4) \in \mathbf{C}^4, \end{matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^8,$$

这种映射将 $R_{V}(16)$ 中的点 (Z_0, U_0) 映为 $(\sqrt{-1}I, 0)$,而且

$$(A'A)^{-1} = \frac{Z_0 - \bar{Z}_0'}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}(U_0U_0' + U_0U_0'), \quad a_{22}^{-2} = \frac{z_8^0 - z_8^0}{2\sqrt{-1}} - u_0u_0'.$$

由直接计算我们得到

$$\frac{\partial(W, R)}{\partial(Z, U)} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & & & & \\ & a_{11}a_{22}I^{(6)} & & & \\ & & a_{22}^2 & & \\ & & & a_{11}I^{(4)} & \\ & * & & & a_{27}I^{(4)} \end{pmatrix}$$

和

$$\det\left[\frac{\partial(W,R)}{\partial(Z,U)}\overline{\frac{\partial(W,R)'}{\partial(Z,U)}}\right]=(a_{11}a_{12})^{24}=\frac{(a_{11}^2a_{22}^2)^{12}}{a_{22}^{120}}=\frac{\det(A'A)^{12}}{a_{22}^{120}}.$$

由此我们得到 $R_{\mathrm{V}}(16)$的 Bergman 核函数(差一个常数因子的情况下)为

$$K_{\mathrm{V}}(Z,U;Z,U)=\frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z_8-\bar{z}_8)-u\bar{u}'\right]^{60}}{\det\left[(2\sqrt{-1})^{-1}(Z-\bar{Z}')-\frac{1}{2}(U\bar{U}'+\bar{U}U')\right]^{12}}$$

$$=\{(2\sqrt{-1})^{-1}(z_1-\bar{z}_1)((2\sqrt{-1})^{-1}(z_8-\bar{z}_8))$$

$$-\sum_{j=1}^{6}[(2\sqrt{-1})^{-1}(z_{j+1}-\bar{z}_{j+1})-\frac{1}{2}(uQ_j\bar{t}'+t\bar{Q}_j'\bar{u}')]^2\}^{-12}.$$

V.1.2 下列变换组成 $R_{\mathrm{VI}}(27)$的全纯自同构可递群:

$$W=A\left[Z-\frac{1}{2}(Z_0+\bar{Z}_0')\right]A'.$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}I^{(8)}&a_{23}\\0&0&a_{33}I^{(8)}\end{pmatrix},\quad a_{23}=\begin{pmatrix}aT_1\\aT_2\\\vdots\\aT_8\end{pmatrix},a=(a_1,\cdots,a_8)\in\mathbf{R}^8$$

这种变换把 $R_{\mathrm{VI}}(27)$的点 Z_0 映为点$\sqrt{-1}$,而且有

$$(A'A)^{-1}=(2\sqrt{-1})^{-1}(Z_0-\bar{Z}_0'),$$

$$(a_{22}a_{33})^{-2}=\left(\frac{z_{22}^0-\bar{z}_{22}^0}{2\sqrt{-1}}\right)\left(\frac{z_{33}^0-\bar{z}_{33}^0}{2\sqrt{-1}}\right)-\left(\frac{z_0-\bar{z}_0}{2\sqrt{-1}}\right)\overline{\left(\frac{z_0-\bar{z}_0}{2\sqrt{-1}}\right)}'.$$

由直接计算我们得到

$$\begin{pmatrix}a_{11}&&&&&\\&a_{11}a_{22}I^{(8)}&&&0&\\&&a_{11}a_{33}I^{(8)}&&&\\&&&a_{22}^2&&\\&*&&&a_{22}a_{33}I^{(8)}&\\&&&&&a_{32}^2\end{pmatrix}=\frac{\partial W}{\partial Z}$$

和

$$\det\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\overline{\frac{\partial W'}{\partial Z}}\right)=(a_{11}a_{22}a_{33})^{36}=\frac{(a_{11}^2a_{22}^{16}a_{33}^{16})^{18}}{(a_{22}^2a_{33}^2)^{126}}=\frac{(\det A'A)^{18}}{(a_{22}^2a_{33}^2)^{126}}.$$

这样我们得到 $R_{\mathrm{VI}}(27)$的 Bergman 核函数(差一个常数因子的情况下)为:

$$
K_{\mathrm{VI}}(Z,\bar{Z})=\frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z_{22}-\bar{z}_{22})\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z_{33}-\bar{z}_{33})-\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z-\bar{z})\overline{\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z-\bar{z})'}\right]^{126}}{\det\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right]^{-18}}
$$

$$
-\left(\frac{z_{33}-\bar{z}_{33}}{2\sqrt{-1}}\right)^{18}\Bigg\{\left[\frac{(z_{11}-\bar{z}_{11})}{2\sqrt{-1}}\frac{(z_{33}-\bar{z}_{33})}{2\sqrt{-1}}-\frac{(z_{13}-\bar{z}_{13})}{2\sqrt{-1}}\frac{(z_{13}-\bar{z}_{13})'}{2\sqrt{-1}}\right]
$$

$$
\cdot\left[\frac{(z_{22}-\bar{z}_{22})}{2\sqrt{-1}}\frac{(z_{33}-\bar{z}_{33})}{2\sqrt{-1}}-\frac{(z-\bar{z})}{2\sqrt{-1}}\frac{(z-\bar{z})'}{2\sqrt{-1}}\right]-\left[\frac{(z_{33}-\bar{z}_{33})}{2\sqrt{-1}}\frac{(z_{12}-\bar{z}_{12})}{2\sqrt{-1}}\right.
$$

$$
\left.-\left(\frac{z_{13}-\bar{z}_{13}}{2\sqrt{-1}}T_1'\frac{z'-\bar{z}'}{2\sqrt{-1}},\cdots,\frac{z_{13}-\bar{z}_{13}}{2\sqrt{-1}}T_8'\frac{z'-\bar{z}'}{2\sqrt{-1}}\right)\right]\overline{[*]}'\Bigg\}^{-18}.
$$

其中$\overline{[*]}'$表示它的前面一个因子的共轭转置.

Ⅴ.2　Cauchy 核与 Poinsson 核

Ⅴ.2.1　若点(X,V)是$R_{\mathrm{V}}(16)$的 Silov 边界,则$C(X,V)$满足下列方程:

$$
\frac{X-\bar{X}'}{2\sqrt{-1}}=\frac{1}{2}(V\bar{V}'+\bar{V}V'),\quad V=\begin{pmatrix}u\\ VQ_1\\ \vdots\\ VQ_6\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l}u=(u_1,\cdots,u_4)\in\mathbf{C}^4\\ \\ v=(v_1,\cdots,v_4)\in\mathbf{C}^4.\end{array}
$$

由直接计算可知,$R_{\mathrm{V}}(16)$的 Cauchy 核(差一个常数因子的情况下)为:

$$
H_{\mathrm{V}}(Z,U;X,V)=\frac{[(z_8-\bar{x}_8)/(2\sqrt{-1})-u\bar{v}']^{30}}{\det[(Z-\bar{X}')/(2\sqrt{-1})-\frac{1}{2}(U\bar{V}'+\bar{U}V')]^6}
$$

而其 Poinsson 核(差一个常数因子的情况下)为:

$P_{\mathrm{V}}(Z,U;X,V)$

$$
=\frac{\det[(Z-\bar{Z}')/(2\sqrt{-1})-(U\bar{U}'+\bar{U}U')/2]^6|(z_8-\bar{x}_8)/(2\sqrt{-1})-u\bar{v}'|^{60}}{[(z_8-\bar{z}_8)/(2\sqrt{-1})-u\bar{u}']^{30}|\det[(Z-\bar{X}')/(2\sqrt{-1})-(U\bar{V}'+\bar{U}V')/2]|^{12}}
$$

Ⅴ.2.2　若X为$R_{\mathrm{VI}}(27)$的 Silov 边界,则我们有:

$$
X=\begin{pmatrix}X_{11}' & X_{12} & X_{13}\\ X_{12}' & X_{22}I^{(8)} & X_{23}\\ X_{13} & X_{23}' & X_{33}I^{(8)}\end{pmatrix},X_{23}=\begin{pmatrix}XT_1\\ \vdots\\ XT_8\end{pmatrix},X=(X_1,\cdots,X_8)\in\mathbf{R}^8.
$$

由直接计算,$R_{\mathrm{VI}}(27)$的 Cauchy 核(差一个常数因子的情况下)为:

$H_{\mathrm{VI}}(Z,X)$

$$
=\frac{[(z_{22}-x_{22})/(2\sqrt{-1})][(z_{33}-\bar{x}_{33})/(2\sqrt{-1})-(z-x)/(2\sqrt{-1})\overline{(z-\bar{x})/(2\sqrt{-1})}']^{63}}{[\det(Z-\bar{X}')/(2\sqrt{-1})]^9},
$$

而其 Poinsson 核(差一个常数因子的情况下)为:

$$P_{\mathrm{VI}}(Z,X)=\frac{\det\left(\frac{Z-Z'}{2\sqrt{-1}}\right)^{9}\left|\frac{(z_{22}-\bar{x}_{22})(z_{33}-\bar{x}_{33})}{(2\sqrt{-1})(2\sqrt{-1})}-\left(\frac{z-\bar{x}}{2\sqrt{-1}}\right)\overline{\left(\frac{z-x}{2\sqrt{-1}}\right)}'\right|^{126}}{\left|\det\left(\frac{Z-\bar{X}}{2\sqrt{-1}}\right)\right|^{18}\left[\left(\frac{z_{22}-\bar{z}_{22}}{2\sqrt{-1}}\right)\left(\frac{z_{33}-\bar{z}_{33}}{2\sqrt{-1}}\right)-\left(\frac{z-\bar{z}}{2\sqrt{-1}}\right)\overline{\left(\frac{z-\bar{z}}{2\sqrt{-1}}\right)}'\right]^{63}}.$$

当然，上述公式的得到，利用了 Bergman 核函数与 Cauchy 核和 Poinsson 核的关系(见[Hua]). 本节内容取自[YW].

Ⅵ. 典型域的特征

本节研究典型域的特征性质，即 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域 D 具有什么样的性质它全纯等价于典型域. 粗略地说，我们证明了：若 D 中存在一点 P，使得 D 的相对于某个典型域的 Carathèodory 测度与 Eisenman-Kobayashi 测度在 P 点相等，则 D 全纯等价于某个典型域.

Ⅵ.1 问题的提起

在[WB]中，B. Wong 证明了如下的著名结果：

设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有光滑边界的强拟凸域，如果 G 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 是非紧的，则 G 双全纯等价于单位球 B_n. 在证明过程中，Carathèodory 测度与 Eisenman Kobayashi 测度起了非常重要的作用，它们的定义如下：

Ⅵ.1.1 定义 1. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$z_0\in\Omega$. 定义 Ω 在 z_0 点的 Carathèodory 测度 $C_\Omega(z_0)$ 为(见[Kra])：

$$C_\Omega(z_0)=\sup\{|\det f'(z_0)|:f:\Omega\to B_n,f(z_0)=0,f\text{ 全纯}\}.\quad(1.6.1)$$

定义 1′. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$z_0\in\Omega$. 定义 Ω 在 z_0 点的 Eisenman-Kobayashi 测度 $K_\Omega(z_0)$ 为(见[Kra])：

$$K_\Omega(z_0)=\inf\left\{\frac{1}{|\det g'(0)|}:g:B_n\to\Omega,g(0)=z_0,g\text{ 全纯}\right\}.\quad(1.6.2)$$

在本文中，把上述定义中的 B_n 换为典型域.

Ⅵ.1.2 定义 2. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^{mn}$ 中的有界域，$z_0\in\Omega$. 定义：

$$C_\Omega^{\mathrm{I}}(z_0)=\sup\{|\det f'(z_0)|:f:\Omega\to R_{\mathrm{I}}(m;n),f(z_0)=0,f\text{ 全纯}\},$$

$$K_\Omega^{\mathrm{I}}(z_0)=\inf\left\{\frac{1}{|\det g'(0)|}:g:R_{\mathrm{I}}(m;n)\to\Omega,g(0)=z_0,\ g\text{ 全纯}\right\}.\quad(1.6.3)$$

Ⅵ.1.3 定义 3. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^{p(p-1)/2}$ 中的有界域，$z_0\in\Omega$. 定义：

$$C_\Omega^{\mathrm{II}}(z_0)=\sup\{|\det f'(z_0)|:f:\Omega\to R_{\mathrm{II}}(p),f(z_0)=0,f\text{ 全纯}\},$$

$$K_\Omega^{\mathrm{II}}(z_0)=\inf\left\{\frac{1}{|\det g'(0)|}:g:R_{\mathrm{II}}(p)\to\Omega,g(0)=z_0,g\text{ 全纯}\right\}.\quad(1.6.4)$$

Ⅵ.1.4　定义 4.　设 Ω 是 $\mathbf{C}^{q(q-1)/2}$ 中的有界域，$z_0\in\Omega$. 定义：

$$C_\Omega^{\mathrm{III}}(z_0)=\sup\{|\det f'(z_0)|:f:\Omega\to R_{\mathrm{III}}(q),f(z_0)=0,f\ \text{全纯}\},$$
$$K_\Omega^{\mathrm{III}}(z_0)=\inf\left\{\frac{1}{|\det g'(0)|}:g:R_{\mathrm{III}}(q)\to\Omega,g(0)=z_0,g\ \text{全纯}\right\}.\quad(1.6.5)$$

Ⅵ.1.5　定义 5.　设 Ω 是 $\mathbf{C}^N$ 中的有界域，$z_0\in\Omega$. 定义：

$$C_\Omega^{\mathrm{IV}}(z_0)=\sup\{|\det f'(z_0)|:f:\Omega\to R_{\mathrm{IV}}(N),f(z_0)=0,f\ \text{全纯}\},$$
$$K_\Omega^{\mathrm{IV}}(z_0)=\inf\left\{\frac{1}{|\det g'(0)|}:g:R_{\mathrm{IV}}(N)\to\Omega,g(0)=z_0,g\ \text{全纯}\right\}.\quad(1.6.6)$$

本文证明了如下结果：

设 Ω 是 $\mathbf{C}^{mn}$ 中的有界域，则 Ω 与 $R_{\mathrm{I}}(m;n)$ 全纯等价的充分必要条件为：存在 $z_0\in\Omega$，使得 $\dfrac{C_\Omega^{\mathrm{I}}(z_0)}{K_\Omega^{\mathrm{I}}(z_0)}=1$.

注： 对于第二类，第三类，第四类典型域亦有同样的结果.

Ⅵ.2　准 备 知 识

Ⅵ.2.1　定理 1.　设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$f(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z))$ 是在域 D 定义的一组函数，其中每一 $f_l(z)(l=1,\cdots,n)$ 都是解析函数，并且 $|f_1(z)|^2+\cdots+|f_n(z)|^2\leqslant M^2$，$M$ 是一正常数，则恒有

$$\frac{\partial f}{\partial z}\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}'\leqslant M^2T_D(z,\bar z),$$

其中 $T_D(z,\bar z)$ 是域 D 的度量方阵(见[Lu4]).

Ⅵ.2.2　定义 6.　设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界域，对 $\mathbf{C}^n$ 中任一有界域 Ω，设 $z_0\in\Omega$，定义 Ω 在 z_0 点的相对于 G 的 Caratheodory 测度 $C_\Omega^G(z_0)$ 为：

$$C_\Omega^G(z_0)=\sup\{|\det f'(z_0)|:f:\Omega\to G,f(z_0)=0,f\ \text{全纯}\}.\quad(1.6.7)$$

Ⅵ.2.3　定义 7.　设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界域，对 $\mathbf{C}^n$ 中任一有界域 Ω，设 $z_0\in\Omega$，定义 Ω 在 z_0 点的相对于 G 的 Eisenman－Kobayashi 测度 $K_\Omega^G(z_0)$ 为：

$$K_\Omega^G(z_0)=\inf\left\{\frac{1}{|\det g'(0)|}:g:G\to\Omega,g(0)=z_0,g\ \text{全纯}\right\}.\quad(1.6.8)$$

Ⅵ.2.4　引理 1.　设 A 是 Hermite 矩阵且 $A\geqslant 0$，B 是 Hermite 正定矩阵且 $A\leqslant B$，则 $\det A\leqslant\det B$.

证： 存在可逆矩阵 Q，使得 $B=Q\overline{Q}'$. 因为 $A\leqslant B$，所以 $Q^{-1}A\overline{Q^{-1}}'\leqslant I$. 存在酉方阵 U 及 $\lambda_1\geqslant 0,\cdots,\lambda_n\geqslant 0$，使得 $Q^{-1}A\overline{Q^{-1}}'=U[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]\overline{U}'$，其中 $[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$ 表示一 n 阶对角矩阵，其对角线上的元素依次为

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 所以 $\lambda_j\leqslant 1(j=1,\cdots,n)$，故 $\det(Q^{-1}A\overline{Q^{-1}}')=\prod_{j=1}^n\lambda_j\leqslant 1$，所以 $\det A\leqslant\det Q\det\overline{Q}'=\det B$.

Ⅵ.2.5　引理 2.　$0<C_\Omega^G(z_0)<+\infty$.

证：因为 $0\in G$. 故存在 $\delta>0$，使得 $B(0,\delta)\subset G$，$\exists M_1>0$，使得对 $\forall z\in\Omega$，$|z-z_0|/M_1<1$. 令 $\varphi(z)=\delta(z-z_0)/m_1$，则 $\varphi:\Omega\to G$，$\varphi(z_0)=0$，$|\det\varphi'(z_0)|=(\delta/M_1)^n$. 由(1.6.7)知：$C_\Omega^G(z_0)>0$. 下面证明 $C_\Omega^G(z_0)<+\infty$. 设 $f:\Omega\to G$，$f(z_0)=0$，f 全纯，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$. 因为 G 有界，故存在 $M>0$，使得 $\forall z\in\Omega$，$|f_1(z)|^2+\cdots+|f_n(z)|^2\leqslant M^2$. 由定理 1. 得：

$$\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z=z_0}\overline{\frac{\partial f'}{\partial z}}\bigg|_{z=z_0}\leqslant M^2T_\Omega(z_0,\overline{z_0}).\tag{1.6.9}$$

由引理 1. 得：

$$\det\left[\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z=z_0}\overline{\frac{\partial f'}{\partial z}}\bigg|_{z=z_0}\right]\leqslant\det[M^2T_\Omega(z_0,\overline{z_0})].$$

易得：

$$\left|\det\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z=z_0}\right|\leqslant M^n\sqrt{\det T_\Omega(z_0,\overline{z_0})}.$$

这就证明了 $C_\Omega^G(z_0)<+\infty$.

Ⅵ.2.6　引理 3.　$0<K_\Omega^G(z_0)<+\infty$.

证：$\exists\delta>0$. 使得 $B(z_0,\delta)\subset\Omega$ 存在 $M_2>0$，使得对 $\forall z\in G$，$|z|<M_2$. 令 $\varphi(z)=\delta z/M_2+z_0$，则 $\varphi(z):G\to\Omega$. $\varphi(0)=z_0$. $\det\varphi'(0)=(\delta/M_2)^n$. 由(1.6.8)知：$K_\Omega^G(z_0)<+\infty$. 下面证明 $0<K_\Omega^G(z_0)$. 设 $g:G\to\Omega$. $g(0)=z_0$，g 全纯，$g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$. 因为 Ω 有界，故存在 $M>0$，使得 $\forall z\in G$，$|g_1(z)|^2+\cdots+|g_n(z)|^2\leqslant M^2$. 由定理 1，

得：
$$\frac{\partial g}{\partial z}\bigg|_{z=0}\overline{\frac{\partial g'}{\partial z}}\bigg|_{z=0}\leqslant M^2T_G(0,0).\tag{1.6.10}$$

由引理 1，得：

$$\det\left[\frac{\partial g}{\partial z}\bigg|_{z=0}\overline{\frac{\partial g'}{\partial z}}\bigg|_{z=0}\right]\leqslant\det[M^2T_G(0,0)].$$

易得：

$$\left|\det\frac{\partial g}{\partial z}\bigg|_{z=0}\right|\leqslant M^n\sqrt{\det T_G(0,0)}.$$

由(1.6.8)得：

$$K_\Omega^G(z_0) \geqslant \frac{1}{M^n\sqrt{T_G(0,0)}}.$$

Ⅵ.2.7 引理 4. 设 $F:\Omega_1\to\Omega_2$ 为一双全纯映射,则

$$C_{\Omega_1}^G(z_0) = C_{\Omega_2}^G(F(z_0))|\det F'(z_0)|,$$

$$K_{\Omega_1}^G(z_0) = K_{\Omega_2}^G(F(z_0))|\det F'(z_0)|.$$

证: 由定义易得:

注: 这说明 $C_\Omega^G(z_0)/K_\Omega^G(z_0)$ 为一解析不变量.

Ⅵ.2.8 定理 2. 如果 S 为一解析变换,把有界域 D 映入 D 内,且把域 D 的点 a 固定不变,则 S 在 a 点的函数行列式的模 $\leqslant 1$,在 a 点的函数行列式的模等于 1 的充分必要条件为 $S\in \mathrm{Aut}(D)$(见[Lu4]).

Ⅵ.2.9 引理 5. $C_\Omega^G(z_0)\in K_\Omega^G(z_0)$.

证: 设 $f:\Omega\to G$, $f(z_0)=0$,全纯;$g:G\to\Omega$, $g(0)=z_0$,全纯.设 $\varphi(z)=f(g(z))$,则 $\varphi:G\to G$, $\varphi(0)=0$. 根据定理 2.,得:$|\det\varphi'(0)|\leqslant 1$,所以 $|\det f'(z_0)|\,|\det g'(0)|\leqslant 1$,所以 $C_\Omega^G(z_0)\leqslant K_\Omega^G(z_0)$.

Ⅵ.2.10 定理 3. 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界可递域,则对任意 $z\in G$, $C_G^G(z)/K_G^G(z)=1$.

证:

$$C_G^G(0)=\sup\{|\det f'(0)|:f:G\to G,f(0)=0,f\text{ 全纯}\}.$$

根据定理 2,得:$|\det f'(0)|\leqslant 1$. 所以 $C_G^G(0)\leqslant 1$. 令 $\varphi(z)=z$,则

$$|\det\varphi'(0)|=1,\text{所以 } C_G^G(0)=1.$$

$$K_G^G(0)=\inf\left\{\frac{1}{|\det g'(0)|}:g:G\to G,g(0)=0,g\text{ 全纯}\right\}.$$

根据定理 2,得:$|\det g'(0)|\leqslant 1$. 所以 $K_G^G(0)\geqslant 1$. 令 $\varphi(z)=z$,则

$$|\det\varphi'(0)|=1,\text{所以 } K_G^G(0)=1.$$

对 $\forall z_0\in G$, $\exists\,\varphi_{z_0}\in\mathrm{Aut}(G)$, s.t. $\varphi_{z_0}(z_0)=0$. 由引理 4. 得:

$$\frac{C_G^G(z_0)}{K_G^G(z_0)}=\frac{C_G^G(0)|\det\varphi_{z_0}'(z_0)|}{K_G^G(0)|\det\varphi_{z_0}'(z_0)|}=1. \tag{1.6.11}$$

Ⅵ.2.11 定理 4. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域,$F_k:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是满足下面两个条件的全纯映射列:

(i) F_k 在域 Ω 上内闭一致收敛于全纯映射 F;

(ii) 存在 $a\in\Omega$,使得 $\det F'(a)\neq 0$.

那么(1)存在 a 的邻域 $U(U\subset\Omega)$ 以及充分大的整数 k_0,当 $k\geqslant k_0$ 时,F_k 在 U 中是双全纯的;

(2)存在 $F(a)$ 的邻域 V，使得当 $k\geqslant k_0$ 时，$V\subset F_k(U)$（见[Lu4]）.

Ⅵ.2.12　定理 5.　(Hurwitz)设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，f_k 是 D 上一列处处不为 0 的全纯函数.

如果 f_k 在 D 上内闭一致收敛于 f，那么 f 在 D 或者恒等于 0，或者处处不为 0.

Ⅵ.2.13　定理 6.[Lo]　每个有界对称域双全纯等价于一个有界对称的、包含原点的圆型域.

Ⅵ.2.14　定理 7.[Lo]　一个包含原点的圆型有界对称域是凸域.

Ⅵ.2.15　定理 8.　设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，D 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界凸域，$g:G\to\mathbf{C}^n$ 是一全纯映射. 如果 $g(G)\subset\overline{D}$ 且存在 $z_0\in G$ 使得 $g(z_0)\in D$，则 $g(G)\subset D$.（$\overline{D}$ 表示 D 的闭包）.

证： 假设存在 $a\in G$ 使得 $g(a)\in\partial D$. 设 $g(a)=(x_1^0+\sqrt{-1}y_1^0, x_2^0+\sqrt{-1}y_2^0,\cdots,x_n^0+\sqrt{-1}y_n^0)$，$x_0=(x_1^0,y_1^0,x_2^0,y_2^0,\cdots,x_n^0,y_n^0)$. 定义

$$D^*=\{x=(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n)\mid(x_1+\sqrt{-1}y_1,x_2+\sqrt{-1}y_2,\cdots,x_n+\sqrt{-1}y_n)\in D\}.$$

显然，D^* 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的包含原点的有界凸域且 $x_0\in\partial D^*$. 定义 $\mathbf{R}^{2n}$ 的 Minkowski 泛函为：

$$P(x)=\inf\left\{\lambda>0\,\middle|\,\frac{x}{\lambda}\in D^*\right\},\ x\in\mathbf{R}^{2n}.$$

由泛函分析知识知：$P(x)$ 是一连续的实值函数且是线性泛函. 定义 $X_0=\{\lambda x_0\mid\lambda\in\mathbf{R}\}$，$f_0(\lambda x_0)=\lambda$. 易知 f_0 是定义在 X_0 上的线性泛函，$P(x_0)=1$，$P(x)\leqslant1$，$x\in\overline{D^*}$；$P(x)<1$，$x\in D^*$. $f_0(\lambda x_0)=\lambda\leqslant P(\lambda x_0)$. 由 Hahn Banach 定理，存在 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的线性泛函 $f(x)$，满足：$f(x)\leqslant P(x)$，$x\in\mathbf{R}^{2n}$；$f(x)=f_0(x)$，$x\in X_0$. 设

$$f(x)=a_1x_1+b_1y_1+a_2x_2+b_2y_2+\cdots+a_nx_n+b_ny_n.$$

因为对 $\forall\,x\in D^*$，$P(x)<1$；$f_0(x_0)=1$，所以 $\forall\,x\in D^*$，$f(x)<1$；$f(x_0)=1$；设 $x_0=(x_1^0,y_1^0,x_2^0,y_2^0,\cdots,x_n^0,y_n^0)$，则对 $\forall\,x\in\overline{D^*}$，

$a_1(x_1-x_1^0)+b_1(y_1-y_1^0)+a_2(x_2-x_2^0)+b_2(y_2-y_2^0)+\cdots+a_n(x_n-x_n^0)+b_n(y_n-y_n^0)\leqslant0.$

令
$$\begin{aligned}F(z)=&(a_1-\sqrt{-1}b_1)(z_1)+(a_2-\sqrt{-1}b_2)(z_2)+\cdots\\&+(a_n-\sqrt{-1}b_n)(z_n)-(a_1-\sqrt{-1}b_1)(x_1^0+\sqrt{-1}y_1^0)\\&+(a_2-\sqrt{-1}b_2)(x_2^0+\sqrt{-1}y_2^0)+\cdots\\&+(a_n-\sqrt{-1}b_n)(x_n^0+\sqrt{-1}y_n^0),\end{aligned}$$

其中 $z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j$. 对 $\forall z \in D$, $\mathrm{Re} F(z) < 0$; $\forall z \in \bar{D}$, $\mathrm{Re} F(z) \leqslant 0$. 考虑全纯映射 $F \circ g$. $F(g(a)) = 0$, $\mathrm{Re} F(g(z_0)) < 0$, 故 $F \circ g$ 不恒等于常数, 由开映射定理 $F(g(G))$ 是 $\mathbf{C}$ 中的开集. 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(0,\delta) \subset F(g(G))$. 所以 $\exists b \in G$, 使得 $F(g(b)) = \delta/2$. 但是 $\mathrm{Re} F(g(b)) \leqslant 0$, 这导致矛盾.

Ⅵ.3 典型域的一个特征

Ⅵ.3.1 定理 9. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域, G 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界对称圆型域, 则 Ω 与 G 全纯等价的充分必要条件为: 存在 $z_0 \in \Omega$, 使得

$$\frac{C_\Omega^G(z_0)}{K_\Omega^G(z_0)} = 1.$$

证: (i) 必要性.

设 $F: \Omega \to G$ 为一双全纯映射, 注意到 G 是齐性域, 由引理 4 与定理 3, 可得: 对 $\forall z \in \Omega$

$$\frac{C_\Omega^G(z)}{K_\Omega^G(z)} = \frac{C_G^G(F(z))\,|\det F'(z)|}{K_G^G(F(z))\,|\det F'(z)|} = 1. \tag{1.6.12}$$

(ii) 充分性.

(a) 首先证明存在全纯映射 $f: \Omega \to G$, 满足 $f(z_0) = 0$, 使得 $C_\Omega^G(z_0) = |\det f'(z_0)|$. 由 $C_\Omega^G(z_0)$ 的定义知: 对 $\forall$ 自然数 k, 存在全纯映射 $f_k: \Omega \to G$, 满足 $f_k(z_0) = 0$,

$$C_\Omega^G(z_0) - (1/k) < |\det f_k'(z_0)| \leqslant C_\Omega^G(z_0). \tag{1.6.13}$$

由 Montel 的正规族理论, 存在 $\{k\}$ 的子列 $\{k_j\}$ 使得 f_{k_j} 在 Ω 上内闭一致收敛于全纯映射 f. 显然 f 全纯, $f(z_0) = 0$, 由 (1.6.13) 知: $|\det f'(z_0)| = C_\Omega^G(z_0)$. 因为 $\lim_{j \to +\infty} f_{k_j}(z) = f(z)$, 所以 $f(\Omega) \subset \bar{G}$. 由定理 7、8, 可得: $f(\Omega) \subset G$.

(b) 其次证明存在全纯映射 $g: G \to \Omega$, 满足 $g(0) = z_0$, 使得 $K_\Omega^G(z_0) = \dfrac{1}{|\det g'(0)|}$. 由 $K_\Omega^G(z_0)$ 的定义知: 对 $\forall$ 自然数 k, $\exists$ 存在全纯映射 $g_k: G \to \Omega$, 满足 $g_k(0) = z_0$,

$$K_\Omega^G(z_0) \leqslant \frac{1}{|\det g_k'(0)|} \leqslant K_\Omega^G(z_0) + \frac{1}{k}. \tag{1.6.14}$$

考虑 $H_k = f \circ g_k$, 则 $H_k: G \to G$, $H_k(0) = 0$. 由 Montel 的正规族理论, 存在 $\{k\}$ 的子列 $\{k_j\}$ 使得 H_{k_j} 在 G 上内闭一致收敛于全纯映射 H. 显然 $H(0) = 0$, $H(G) \subset \bar{G}$, 根据定理 8, 得 $H(G) \subset G$. 由 (1.6.14) 知:

$$|\det H'(0)| = \lim_{j\to+\infty} |\det f'(z_0)| |\det g'_{k_j}(0)| = 1.$$

由定理 2,得 $H\in \mathrm{Aut}(G)$. 因为 $H(0)=0$ 且 G 是有界圆型域,故 H 是一线性映射. 设 $H(z)=zA$,其中 A 是一 n 阶可逆矩阵. 由 Montel 的正规族理论,不妨设 g_{k_j} 在 G 上内闭一致收敛于 g,则 g 在 G 上全纯,$g(0)=z_0$,由(1.6.14)式:

$$|\det g'(0)| = \frac{1}{K_\Omega^G(z_0)}. \tag{1.6.15}$$

下面证明 $g(G)\subset\Omega$. 因为 $f\circ g_{k_j}$ 在 G 上内闭一致收敛于 H, 所以 $\det f'(g_{k_j}(z))\det g'_{k_j}(z)$在 G 上内闭一致收敛于 $\det H'(z)=\det A$. 设 $a\in G$, $\exists\,\delta>0$,使得$\overline{B(a,\delta)}\subset G$. 存在足够大的自然数 N, 当 $j>N$ 时, 对 $\forall\, z\in\overline{B(a,\delta)}$有:

$$|\det f'(g_{k_j}(z))\det g'_{k_j}(z) - \det A| < \frac{\det A}{2}.$$

所以, 当 $j>N$ 时, 对 $\forall\, z\in\overline{B(a,\delta)}$, $\det g'_{k_j}(z)\neq 0$. $\det g'_{k_j}(z)$ $(j>N)$ 在 $B(a,\delta)$上内闭一致收敛于 $\det g'(z)$. 由 Hurwitz 定理 $\det g'(z)$ 在 $B(a,\delta)$上恒为 0,或者处处不为 0. 如果 $\det g'(z)$在$B(a,\delta)$上恒为 0,由惟一性定理:$\det g'(z)$在 G 上恒为 0,这与 $|\det g'(0)|\neq 0$ 相矛盾. 所以 $\det g'(a)\neq 0$. 这就证明了对 $\forall\, z\in G$, $\det g'(z)\neq 0$. 由定理 4. 得:对 $\forall\, a\in G$, $\exists\, g(a)$的邻域 V 以及 a 的邻域 $U(U\subset G)$,使得 j 足够大时, $V\subset g_{k_j}(U)\subset\Omega$. 所以 $g(a)\in\Omega$,所以 $g(G)\subset\Omega$.

(c)证明 $f:\Omega\to G$ 为一双全纯映射. 考虑 $\varphi=g\circ f:\Omega\to\Omega$, $\varphi(z_0)=z_0$. 显然,

$$|\det\varphi'(z_0)| = |\det g'(0)|\,|\det f'(z_0)| = \frac{C_\Omega^G(z_0)}{K_\Omega^G(z_0)} = 1.$$

由定理 2:$\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega)$,所以 f 是单射. 考虑 $\psi=f\circ g: G\to G$, $\psi(0)=0$. 显然

$$|\det\psi'(0)| = |\det f'(z_0)|\,|\det g'(0)| = \frac{C_\Omega^I(z_0)}{K_\Omega^I(z_0)} = 1.$$

由定理 2, $\psi\in\mathrm{Aut}(G)$,所以 f 是满射. 所以 $f:\Omega\to G$ 为一双全纯映射.

VI.3.2 定理 10. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域, G 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界对称域,则 Ω 与 G 全纯等价的充分必要条件为:存在 $z_0\in\Omega$,使得

$$\frac{C_\Omega^G(z_0)}{K_\Omega^G(z_0)} = 1.$$

证: (i)必要性.

设 $F:\Omega\to G$ 为一双全纯映射,注意到 G 是齐性域,由引理 4 与定理 3 可得:对 $\forall z\in\Omega$

$$\frac{C_\Omega^G(z)}{K_\Omega^G(z)}=\frac{C_G^G(F(z))|\det F'(z)|}{K_G^G(F(z))|\det F'(z)|}=1.$$

(ii)充分性.

由定理 6,G 双全纯等价于一个有界对称的、包含原点的圆型域 G_1. 设 $\varphi:G\to G_1$ 为一双全纯映射.因为 G_1 是齐性的,故不妨设 $\varphi(0)=0$.由定义可得:

$$C_\Omega^{G_1}(z_0)=C_\Omega^G(z_0)|\det\varphi'(0)|,K_\Omega^{G_1}(z_0)=K_\Omega^G(z_0)|\det\varphi'(0)|.$$

所以

$$1=\frac{C_\Omega^G(z_0)}{K_\Omega^G(z_0)}=\frac{C_\Omega^{G_1}(z_0)}{K_\Omega^{G_1}(z_0)}.$$

由定理 10,知 Ω 与 G_1 全纯等价,故 Ω 与 G 全纯等价.最近,作者与苏简兵和赵振刚将定理 10 推广到 G 为在 Caratheodory 度量下完备的有界域,详见文献[YSZ].

本节内容取自文献[ZhY,YZg].

原书空白页

第二章

非 对 称 典 型 域

第二章　非对称典型域

自从 1959 年前苏联数学家 I. I. Pyateckii-Shapiro 给 Cartan 猜想以反例后，在此基础上，又引进了 Siegel 域的概念，并总结在其名著[Sha1]中．该书给出了三大类非对称域可递域的 Siegel 域的形式．陆启铿在[Lu2]中构造了这几类域的扩充空间，提出一个问题：除了 Pyateckii Shapiro 书中构造的几类非对称齐性域外，还存在其他的非对称齐性域吗？我们给这个问题以一个肯定的回答．不但给出了几类新的非对称可递域，而且给出了它们的扩充空间，Bergman 核函数及其曲率表示式等等．但由于“文化大革命”，直到 20 世纪 80 年代才正式发表．这些构成了本章的主要内容．

I. 非对称可递域的若干类型

目前，多复函数论有界可递域分类理论的研究集中于 Siegel 域的研究．Siegel 域的概念是 I. I. Pyateckii-Shapiro 在 1959 年首次举出的非对称有界可递域的例子的基础上提出的，进而并证明了任何有界可递域都解析等价于仿射可递的第一类或第二类 Siegel 域这一基本结果([Sha2])．自那以后，Siegel 域的研究已经取得了不少进展，但总的看来，这些研究偏重于域的自同构群的代数结构方面，研究其几何和函数论性质的尚属不多．

作者认为，多提供一些非对称 Siegel 域的实例——特别是这些实例如果和经典的对称域有密切联系——再进一步剖析这些非对称域和相应的对称域的异同，对于深入研究一般的 Siegel 域可能是有益处的．由这一角度观察文献，则已有的值得注意的例型是由 I. I. Pyateckii-Shapiro [sha1]引进的四类仿射可递的第二类 Siegel 域．它们是以自共轭锥为底构造出来的，相当于四类对称典型域加了一个“尾巴”．

本节从几类非自共轭锥出发，构造了几类新的非对称 Siegel 域．它们是第一类 Siegel 域，相当于对称典型域的子空间．至少从形式上看，它们较之[Sha1]中的几类例型来说是更接近于对称典型域的．事实上，这一点将在另文中得到证实．

本节除了构造法以外，还给出了锥的非自共轭性及域的非对称性的

证明.

Ⅰ.1　非自共轭锥

实欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 V 称为凸锥，如果任意两点属于 V，连接此两点的直线段也属于 V；并且，如果 $x\in V$，则 $\lambda x\in V$，$\lambda>0$. 今后假定锥 V 都不含整个直线.

对于锥 V 和任意一个欧氏度量(其由内积 (x,y) 决定)，点集

$$V^*=\{a\mid (a,x)>0,\text{对一切 } x\in V-\{0\}\}.$$

也是一个凸锥，称为 V 的共轭锥. 如果在某一欧氏度量下，$V=V^*$，就称 V 为自共轭的.

$\mathbf{R}^n$ 中的一线性变换群，使 V 不变者，记为 $G(V)$. 如果 $G(V)$ 在 V 上可递，则称 V 为仿射齐性的. $G(V)$ 称为 V 的运动群.

仿射齐性的自共轭锥[Vin]在仿射等价的意义下只有五类. 而对非自共轭锥，则举出一个五维的例子. 本节将引进几类新的仿射齐性锥，给出它们的运动群，证明它们都是非自共轭的、单可递的.

Ⅰ.1.1　考虑 $m\times m$ 的实对称方阵 Y，分块如下：

$$Y=Y',\ m_1+\cdots+m_s=m,$$

$$Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1s}\\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Y_{s1} & Y_{s2} & \cdots & Y_{ss}\end{pmatrix}\begin{matrix} m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_s\end{matrix} \tag{2.1.1}$$
$$\quad\ \ m_1 \qquad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

取 $1=k_1<k_2<\cdots<k_l=s$，令

$$Y_{ij}=0\quad(i\neq k_1,\cdots,k_l,\ j\neq i) \tag{2.1.2}$$

例如 $(k_1,k_2)=(1,s)$，则

$$Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1s}\\ Y_{21} & Y_{22} & & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \\ Y_{s1} & & & Y_{ss}\end{pmatrix},\quad Y=Y' \tag{2.1.3}$$

再如，$s=5$，$(k_1,k_2,k_3)=(1,3,5)$，则

$$Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & 0 & 0 & 0 \\ Y_{31} & 0 & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ Y_{41} & 0 & Y_{43} & Y_{44} & 0 \\ Y_{51} & 0 & Y_{53} & 0 & Y_{55} \end{pmatrix},\quad Y=Y' \qquad (2.1.4)$$

这样的对称方阵的集合将简记为 $S\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{pmatrix}$.

定义 1. 锥 $V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{pmatrix}$ 为

$$V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{pmatrix}=\left\{Y>0 \mid Y\in S\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{pmatrix}\right\}. \qquad (2.1.5)$$

显然,锥 V_{II} 的维数是

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i+1)+m_{k_1}(m_{k_1+1}+\cdots+m_s)+\cdots$$
$$+m_{k_{l-1}}(m_{k_{l-1}+1}+\cdots+m_s). \qquad (2.1.6)$$

定理 1. 锥 $V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{pmatrix}$ 是仿射齐性并且单可递.

证: 1)先对 $V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ 1,\quad s \end{pmatrix}$ 证明.考虑变换

$$Y\to AYA', \qquad (2.1.7)$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & & A_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix},\quad A_{ii}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \cdots & a_{1m_i}^{(i)} \\ 0 & a_{22}^{(i)} & & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & & a_{m_im_i}^{(i)} \end{pmatrix}.$$
$$\quad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

变换(2.1.7)将 $S\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ 1,\quad s \end{pmatrix}$ 变为其自己是明显的,(2.1.7)在 $V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ 1,\quad s \end{pmatrix}$ 的可递性在于证明对于任何 $Y_0\in V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ 1,\quad s \end{pmatrix}$,都存在(2.1.7)形状的 A,使 $AA'=Y_0$,

即

$$
\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & & A_{1s} \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & A_{ss} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} A'_{11} & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ A'_{1s} & & & A'_{ss} \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{s} A_{1j}A'_{1j} & A_{12}A'_{22} & \cdots, & A_{1s}A'_{ss} \\ A_{22}A'_{12} & A_{22}A'_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{ss}A'_{1s} & 0 & & A_{ss}A'_{ss} \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} Y^0_{11} & Y^0_{12} & \cdots & Y^0_{1s} \\ Y^0_{21} & Y^0_{22} & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ Y^0_{s1} & & & Y^0_{ss} \end{pmatrix}.
$$

熟知可取(2.1.7)形状之 A_{kk}，使 $A_{kk}A'_{kk}=Y^0_{kk}(1<k\leqslant s)$，再令 $A_{1k}=Y^0_{1k}A'^{-1}_{kk}$，即 $A_{1k}A'_{kk}=Y^0_{1k}$. 因此问题只在于证明

$$Y^0_{11}-A_{12}A'_{12}-\cdots-A_{1s}A'_{1s}>0.$$

也就是

$$Y^0_{11}-Y^0_{12}(Y^0_{22})^{-1}(Y^0_{12})'-\cdots-Y^0_{1s}(Y^0_{ss})^{-1}(Y^0_{1s})'>0. \qquad (2.1.8)$$

但这只需利用熟知的恒等式($|S_{22}|\neq 0$):

$$
\begin{pmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S'_{12} & S_{22} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} I & 0 \\ -S_{22}^{-1}S'_{12} & I \end{pmatrix}
=\begin{pmatrix} S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S'_{12} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix},
\qquad (2.1.9)
$$

此处令 $S_{11}=Y^0_{11}$, $S_{12}=(Y^0_{12},\cdots,Y^0_{1s})$, $S_{22}=\begin{pmatrix} Y^0_{22} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Y^0_{ss} \end{pmatrix}$，即得(2.1.8). 因此，仍可取(2.1.7)形状之 A_{11}，使

$$A_{11}A'_{11}=Y^0_{11}-Y^0_{12}(Y^0_{22})^{-1}(Y^0_{12})'-\cdots-Y^0_{1s}(Y^0_{ss})^{-1}(Y^0_{1s})'.$$

这样就证明了 $V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ 1, \quad s \end{pmatrix}$ 在(2.1.7)之下的可逆性. 同时熟知，将

正定对称矩阵 Y 写成AA'时，A 是上三角形，限定 A 的对角线元素是正的，那么这种表法是惟一的，因此如果限定 A_{ii} 的对角线元素全取正值就可得到 $V_{\text{II}}\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ 1, \quad s \end{pmatrix}$的单可递运动群.

2)讨论一般的 $V_{\text{II}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ 1, k_2, & \cdots, & k_{l-1}, s \end{pmatrix}$. 此时，

$$Y = Y', Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1s} \\ Y_{21} & \cdots & Y_{2s} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{s1} & \cdots & Y_{ss} \end{pmatrix}, Y_{ij} = 0 \ (i \neq 1, k_2, \cdots, k_{l-1}, s; i \neq j)$$

考虑运动群 $Y \to AYA'$，其中

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & \ddots & * \\ & & A_{ss} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = 0 \ (i \neq 1, k_2, \cdots, k_{l-1}, s; i < j),$$

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & \cdots & a_{1m_i}^{(i)} \\ 0 & \ddots & * \\ & & a_{m_i m_i}^{(i)} \end{pmatrix}. \qquad (2.1.10)$$

这样的矩阵易证是成群的，记作 $G_{\text{II}}\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}$. 要证 V_{II} 在 G_{II} 下的可递性，只需证明任给 $Y_0 \in V_{\text{II}}\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}$，都存在 $A \in G_{\text{II}}\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}$，使 $AA' = Y_0$. 书

$$Y_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_{11} & \widetilde{Y}_{12} \\ \widetilde{Y}_{21}' & \widetilde{Y}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\widetilde{Y}_{11} \in V_{\text{II}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_{k_{l-1}} - 1 \\ k_1, & \cdots, & k_{l-2}, k_{l-1} - 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Y}_{22}=\begin{pmatrix} Y_{k_{l-1}k_{l-1}} & \cdots & Y_{k_{l-1}s} \\ \vdots & \ddots & 0 \\ Y'_{k_{l-1}s} & 0 & Y_{ss} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Y}_{12}=\begin{pmatrix} Y_{1k_{l-1}} & \cdots & Y_{1s} \\ 0 & \cdots & 0 \\ Y_{k_2k_{l-1}} & \cdots & Y_{k_2s} \\ 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k_{l-2}k_{l-1}} & \cdots & Y_{k_{l-2}s} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

令

$$A=\begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ 0 & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

这里

$$\widetilde{A}_{11}\in G_{\mathrm{II}}\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_{k_{l-1}}-1 \\ k_1, & \cdots, & k_{l-2}, k_{l-1}-1 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{11}=\begin{pmatrix} A_{1k_{l-1}} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k_{l-1}-1\,k_{l-1}} & \cdots & A_{k_{l-1}-1\,s} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij}=0 \quad (i\neq 1,k_2,\cdots,k_{l-2})$$

$$\widetilde{A}_{22}=\begin{pmatrix} A_{k_{l-1}k_{l-1}} & \cdots & A_{k_{l-1}s} \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix},$$

那么 $AA'=Y_0$ 即 $\widetilde{A}_{22}\widetilde{A}'_{22}=\widetilde{Y}_{22}$, $\widetilde{A}_{12}\widetilde{A}'_{22}=\widetilde{Y}_{12}$, $\widetilde{A}_{11}\widetilde{A}'_{11}+\widetilde{A}_{12}\widetilde{A}'_{12}=\widetilde{Y}_{11}$. 但是由 1),存在上述形式的 $\widetilde{A}_{22}$,使 $\widetilde{A}_{22}\widetilde{A}'_{22}=\widetilde{Y}_{22}$. 再令 $\widetilde{A}_{12}=\widetilde{Y}_{12}\cdot\widetilde{A}'^{-1}_{22}$(此处易见,$\widetilde{A}_{22}^{-1}$ 也是 $\widetilde{A}_{22}$的形状,$\widetilde{Y}_{12}\widetilde{A}'^{-1}_{22}$和 $\widetilde{Y}_{12}$有同样的形状).

由恒等式(2.1.9)知,

$$\widetilde{Y}_{11}-\widetilde{A}_{12}\widetilde{A}'_{12}=\widetilde{Y}_{11}-\widetilde{Y}_{12}\widetilde{Y}_{22}^{-1}\widetilde{Y}'_{12}>0,$$

而 $\widetilde{A}_{12}\widetilde{A}'_{12}\in S\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_{k_{l-1}}-1 \\ k_1, & \cdots, & k_{l-2}, k_{l-1}-1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{Y}_{11}-\widetilde{Y}_{12}\widetilde{Y}'^{-1}_{22}\widetilde{Y}'_{12}$ 是低阶的这种方阵, 因此可以对阶数作归纳法, 即可以找到 $\widetilde{A}_{11}\in G_{\mathrm{II}}\begin{bmatrix} m_1,\cdots, & m_{k_{l-1}}-1 \\ k_1,\cdots,k_{l-2}, & k_{l-1}-1 \end{bmatrix}$ 使 $\widetilde{A}_{11}\widetilde{A}'_{11}=\widetilde{Y}_{11}-\widetilde{Y}_{12}\widetilde{Y}_{22}^{-1}\widetilde{Y}'_{12}$

这样,就有 $A=\begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ 0 & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}\in G_{\mathrm{II}}\begin{bmatrix} m_1, & \cdots & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$ 并且 $AA'=Y_0$.

同样的道理，如我们限定(2.1.10)之中 A_{kk} 的对角线元素全取正值，那么就可以得到一个单可递的运动群．

附注 1　如果令 $m_1=m_2=m_3=1$．那么 $V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix}1,1,1\\1,3\end{pmatrix}$ 就是

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{12} & y_{22} & 0 \\ y_{13} & 0 & y_{33} \end{bmatrix} > 0$$

这个锥就仿射等价于[Vin]中所举出的 5 维非自共轭锥的例子．

附注 2　令 $m_1=m_2=\cdots=m_n=1$，那么 $V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix}1,1,\cdots,1\\1,\quad n\end{pmatrix}$ 即

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_2 & t_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ y_n & 0 & & t_n \end{bmatrix} > 0, \quad \text{即} \quad \begin{cases} t_2\cdots t_n\left(y_1-\dfrac{y_2^2}{t_2}-\cdots-\dfrac{y_n^2}{t_n}\right)>0 \\ t_2>0 \\ \vdots \\ t_n>0 \end{cases}$$

这里如果令 $t_2=t_3=\cdots=t_n=t$，就得到

$$\begin{cases} y_1 t - y_2^2 - \cdots - y_n^2 > 0, \\ t>0. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

这就是[Shal]中所引进的锥 V_4．

Ⅰ.1.2　考虑 $m\times m$ 的 Hermite 矩阵 H，分块如下：

$$H=\bar{H}',H=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{22} & \cdots & H_{1s} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{s1} & H_{s2} & \cdots & H_{ss} \end{bmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix} \quad m=m_1+m_2+\cdots+m_s, \tag{2.1.12}$$
$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{matrix}$$

取 $1=k_1<k_2<\cdots<k_l=s$，令

$$H_{ij}=0(i\neq k_1,\cdots,k_l;i\neq j),$$

这样的 Hermite 方阵集合记为 $H\begin{pmatrix}m_1,\cdots,m_s\\k_1,\cdots,k_l\end{pmatrix}$.

定义 2. 锥 $V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix}m_1,\cdots,m_s\\k_1,\cdots,k_l\end{pmatrix}$ 为

$$V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix}m_1,\cdots,m_s\\k_1,\cdots,k_l\end{pmatrix}=\left\{H>0\,\middle|\,H\in H\begin{pmatrix}m_1,\cdots,m_s\\k_1,\cdots,k_l\end{pmatrix}\right\}, \tag{2.1.13}$$

显然，V_{I} 的维数 $=\sum_{i=1}^{s} m_i^2+2m_{k_1}(m_{k_1+1}+m_{k_1+2}+\cdots+m_s)+\cdots$

$$+2m_{k_{l-1}}(m_{k_{l-1}+1}+\cdots+m_s).$$

例如，$V_1\begin{pmatrix}m_1,\cdots,m_s\\1,\ s\end{pmatrix}$即

$$H=\overline{H}',H=\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s}\\ H_{21} & H_{22} & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ H_{s1} & 0 & & H_{ss}\end{pmatrix}>0.$$

定理 2. 锥 $V_1\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$是仿射齐性的，并且单可递.

证： 和定理 1 完全类似，只是运动群为

$$H\to AH\overline{A}'$$

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ & \ddots & & *\\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{ss}\end{pmatrix},\ A_{ii}=\begin{pmatrix}a_{11}^{(i)} & \cdots & a_{1m_i}^{(i)}\\ 0 & \ddots & *\\ & & a_{m_im_i}^{(i)}\end{pmatrix},$$

$$A_{ij}=0(i\neq k_1,\cdots,k_l;j>i).\tag{2.1.14}$$

这个群记为 $G_l\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$. V_1 在 G_1 下的可递性的证明，除将恒等式(2.1.9)换为

$$\begin{pmatrix}I & -H_{12}H_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ \overline{H}'_{12} & H_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ -\overline{(H_{12}H_{22}^{-1})}' & I\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}H_{11}-H_{12}H_{22}^{-1}\overline{H}'_{12} & 0\\ 0 & H_{22}\end{pmatrix}\tag{2.1.15}$$

以外，其余与定理 1 的证明全部相同.

同样，如果限制 A_{ii} 的对角线元素全为正数，也就得到(2.1.14)的一个单可递群.

I.1.3 考虑 $2m\times 2m$ 的 Hermite 方阵和斜对称方阵 J：

$$H=\overline{H},H=\begin{pmatrix}H_{11} & \cdots & H_{1s}\\ H_{21} & \cdots & H_{2s}\\ \vdots & & \vdots\\ H_{s1} & \cdots & H_{ss}\end{pmatrix}\begin{matrix}2m_1\\2m_2\\ \vdots\\2m_s\end{matrix}\quad m=2m_1+\cdots+2m_s,$$
$$\qquad\qquad 2m_1\ \cdots\ 2m_s$$

$$J=\begin{pmatrix}J_{m1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{ms}\end{pmatrix},\quad J_{mi}=\begin{pmatrix}j & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & j\end{pmatrix}_{2mi\times 2mi},j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

取 $1=k_1<k_2<\cdots<k_l=s$，满足

$$H_{ij}=0(i\neq k_1,\cdots,k_l;i\neq j)\text{和 } JH=\overline{H}J \tag{2.1.16}$$

这样的 H 的集合记为$J\begin{Bmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{Bmatrix}$.

定义 3. 锥 $V_{\mathrm{III}}\begin{Bmatrix}m_1 & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{Bmatrix}$为

$$V_{\mathrm{III}}\begin{Bmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{Bmatrix}=\left\{H>0\,\middle|\,H\in J\begin{Bmatrix}m_1 & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{Bmatrix}\right\}.$$

易知 V_{III} 的维数 $=\sum_{i=1}^{s}2m_i^2+4m_1(m_2+\cdots+m_s)$

$$+4m_{k_2}(m_{k_{2+1}}+\cdots+m_s)+\cdots$$
$$+4m_{k_{l-1}}(m_{k_{l-1}+1}+\cdots+m_s),$$

在证明 V_{III}的仿射齐性以前，先证一个引理.

引理 1. 锥 $H=\overline{H}'>0,JH=\overline{H}J$，在 $H\rightarrow AH\overline{A}',JA=\overline{A}J$ 之下是可递的，其中

$$J=\begin{pmatrix}j & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & j\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ & \ddots & *\\ 0 & & A_{nn}\end{pmatrix},$$

A_{ij}都是 2×2 矩阵，A_{ii}是 2×2 上三角方阵，$j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

证： 这个引理的证明可见于[Lu3]. 这里给出一个较简的证明，并从证明中易于看出如何决定单可递的子群.

问题仍然在于证，对任何 $H>0,JH=\overline{H}J$，要找到 A，适合上述条件使 $A\overline{A}'=H$.

先看 2×2 时，此时，

$$H=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ \overline{h}_{12} & h_{22}\end{pmatrix},j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};\quad jH=\overline{H}j\quad\text{即}\quad H=\begin{pmatrix}h_{11} & 0\\ 0 & h_{11}\end{pmatrix},$$

取
$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{h_{11}} & 0\\ 0 & \sqrt{h_{11}}\end{pmatrix}$$

即可.

在 $2n\times 2n$ 时，$H=(H_{ij})$，H_{ij}是 2×2，则 $JH=\bar{H}J$ 即为

$$jH_{ij}=\bar{H}_{ij}j.$$

根据 2×2 的结果，存在 A_{nn}满足$jA_{nn}=\bar{A}_{nn}j$，使

$$A_{nn}\bar{A}'_{nn}=H_{nn}.$$

令 $A_{1n}=H_{1n}\bar{A}'^{-1}_{nn}$，那么显然有

$$jA_{1n}=jH_{1n}\bar{A}'^{-1}_{nn}=\bar{H}_{1n}j\bar{A}'^{-1}_{nn}=\bar{H}_{1n}A'^{-1}_{nn}j=\bar{A}_{1n}j.$$

利用(2.1.15)式知

$$H_{n-1n-1}-A_{1n}\bar{A}'_{1n}>0,$$

并且

$$j(H_{n-1n-1}-A_{1n}\bar{A}'_{1n})=\overline{(H_{n-1n-1}-A_{1n}\bar{A}'_{1n})}j.$$

再利用 2×2 的结果，可以找到 A_{n-1n-1}是上三角的(其实是对角的)，使

$$jA_{n-1n-1}=\bar{A}_{n-1n-1}j,\quad A_{n-1n-1}\bar{A}'_{n-1n-1}=H_{n-1n-1}-A_{1n}\bar{A}'_{1n}.$$

这样逐步下去，就可以完成引理的证明.从证明中易见，当限制 A 的对角线全取正数，就可得到一单可递的子群.

定理 3. 凸锥 $V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$在下面的运动群下仿射可递，并有单可递的子群.群记为 $G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$.

$$H\in V_{\mathrm{III}},\ H\to AH\bar{A}'$$

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \vdots & 0 & \ddots & *\\ 0 & & & A_{ss}\end{pmatrix},A_{ij}=0,\quad (i\neq k_1,\cdots,k_l;i<j).\qquad(2.1.17)$$

而且有 $JA=\bar{A}J$，J 由(2.1.16)定义，A_{ii}本身也是上三角形.

证:(2.1.17)的确使 V_{III}不变.

$$\begin{aligned}J(AH\bar{A}')&=\bar{A}JH\bar{A}'=\bar{A}\bar{H}J\bar{A}'=-\bar{A}\bar{H}(\bar{A}J)'\\&=-\bar{A}\bar{H}(JA)'=\overline{AH\bar{A}'}J.\end{aligned}$$

1)先证 $V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ 1, & s\end{pmatrix}$在 $G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ 1, & s\end{pmatrix}$下可递.

要证任给$H_0\in V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ 1, & s\end{pmatrix}$，都存在

$$A\in G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ 1, & s\end{pmatrix}使$$

$$A\bar{A}'=H_0. \tag{2.1.18}$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & & A_{ss} \end{pmatrix}, H_0=\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s} \\ \bar{H}'_{12} & H_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{H}'_{1s} & 0 & & H_{ss} \end{pmatrix}.$$

(2.1.18)即 $A_{11}\bar{A}'_{11}+\cdots+A_{1s}\bar{A}'_{1s}=H_{11}$, $A_{1t}\bar{A}'_{tt}=H_{1t}$, $H_{tt}=A_{tt}\bar{A}'_{tt}(i>1)$. 根据引理 1,存在 A_{tt} 使 $J_{m_t}A_{tt}=\bar{A}_{tt}J_{m_t}$,满足

$$A_{tt}\bar{A}'_{tt}=H_{tt}. \tag{2.1.19}$$

令 $A_{1t}=H_{1t}\bar{A}'^{-1}_{tt}$,再由 $J_{m_1}H_{1t}=\bar{H}_{1t}J_{m_t}$ 知

$$J_{m_1}A_{1t}=\bar{A}_{1t}J_{m_t} \tag{2.1.20}$$

利用等式(2.1.15)即知

$$H_{11}-A_{12}\bar{A}'_{12}-\cdots-A_{1s}\bar{A}'_{1s}=H_{11}-H_{12}H_{22}^{-1}\bar{H}'_{12}-\cdots-H_{1s}H_{ss}^{-1}\bar{H}'_{1s}>0.$$

并且由(2.1.19)、(2.1.20)知

$$J_{m_1}(H_{11}-A_{12}\bar{A}'_{12}-\cdots-A_{1s}\bar{A}'_{1s})=\overline{(H_{11}-A_{12}\bar{A}'_{12}-\cdots-A_{1s}\bar{A}'_{1s})}J_{m_1}.$$

再利用引理 1,可找到 A_{11},满足

$$J_{m_1}A_{11}=\bar{A}_{11}J_{m_1} \text{和} A_{11}\bar{A}'_{11}=H_{11}-A_{12}\bar{A}'_{12}-\cdots-A_{1s}\bar{A}'_{1s},$$

这样得到的

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & & 0 \\ \vdots & & 0\ \ddots & \\ 0 & & & A_{ss} \end{pmatrix},$$

就满足定理之条件.

2) 一般的 $V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$,仍然要证对任何 $H\in V_{\mathrm{III}}$,要找到 $A\in G_{\mathrm{III}}$ 使 $A\bar{A}'=H$.

$$H=\begin{pmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{pmatrix}, \widetilde{H}_{11}\in G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_{k_{l-1}-1} \\ k_1, & \cdots, & k_{l-2}, k_{l-1}-1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{H}_{22}=\begin{pmatrix} H_{k_{l-1}k_{l-1}} & \cdots\cdots\cdots & H_{k_{l-1}s} \\ \vdots & H_{k_{l-1}+1\ k_{l-1}+1} & 0 \\ \bar{H}'_{k_{l-1}s} & 0 & H_{ss} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{H}_{12}=\begin{pmatrix} H_{1k_{l-1}} & \cdots\cdots & H_{1s}\\ \vdots & & \vdots \\ H_{k_{l-1}-1\ k_{l-1}} & \cdots & H_{k_{l-1}-1\ s}\end{pmatrix}$$

$$H_{ij}=0(i\neq k_1,\cdots,k_{l-2})$$

$$A=\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12}\\ 0 & \widetilde{A}_{22}\end{pmatrix},\widetilde{A}_{22}=\begin{pmatrix} A_{k_{l-1}k_{l-1}} & \cdots & \cdots & A_{k_{l-1}s}\\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & A_{ss}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{11}\in G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_{k_{l-1}-1}\\ k_1, & \cdots, & k_{l-2},k_{l-1}-1\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{12}=\begin{pmatrix} A_{1k_{l-1}} & \cdots & A_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{k_{l-1}-1\ k_{l-1}} & \cdots & A_{k_{l-1}-1\ s}\end{pmatrix},A_{ij}=0(i\neq k_1,\cdots,k_{l-2}))\qquad(2.1.21)$$

由 1),存在(2.1.21)形状之 $\widetilde{A}_{22}$,使 $\widetilde{A}_{22}\bar{\widetilde{A}}'_{22}=\widetilde{H}_{22}$,并且

$$J\widetilde{A}_{22}=\bar{\widetilde{A}}_{22}J,\qquad(2.1.22)$$

令 $\widetilde{A}_{12}=\widetilde{H}_{12}\bar{\widetilde{A}}'^{-1}_{22}$,易见必有 $J\widetilde{A}_{12}=\bar{\widetilde{A}}_{12}J$. 同前一样,因为

$$\widetilde{H}_{11}-\widetilde{H}_{12}\widetilde{H}_{22}^{-1}\widetilde{H}'_{12}>0,$$

对阶数作归纳法,就可以找到 $\widetilde{A}_{11}\in G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_{k_{l-1}-1}\\ k_1, & \cdots, & k_{l-2},k_{l-1}-1\end{pmatrix}$,

使 $\widetilde{A}_{11}\bar{\widetilde{A}}'_{11}=\widetilde{H}_{11}-\widetilde{H}_{12}\widetilde{H}_{22}^{-1}\bar{\widetilde{H}}'_{12}$. 这样,

$$A=\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12}\\ 0 & \widetilde{A}_{22}\end{pmatrix}\in G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$$

满足定理之条件. 证明中即可得到,如果限制 A_{ii} 的对角线元素是正的,就是单可递的.

I.1.4 本节主要证明,上面引入的 $V_{\mathrm{I}},V_{\mathrm{II}},V_{\mathrm{III}}$ 都是非自共轭的. 这里我们将充分利用[Vin]的结果. 在那里证明了,任何一个仿射齐性凸锥都可以通过有限步彼此交替的 S(Siegel)手续和 C(Convex)手续而得到.

定义 4. 仿射可递的凸锥 $V\in\mathbf{R}^n$,根据下面的方法可以作出一个实的 Siegel 域;取一个 V-齐性的双线性型(定义见[Shal]F,定义于 $\mathbf{R}^m$ 之

中，那么点集$(y,t)\in\mathbf{R}^{n+m}$，满足

$$y-F(t,t)\in V$$

就称为由 V,F 决定的实 Siegel 域，记作 $S(V)$，由 $V\to S(V)$的手续称为 S 手续．由于 F 是V－齐性的，因此 $S(V)$也是仿射齐性的．

定义 5． 对于任何一个仿射可递的实 Siegel 域 $S\in\mathbf{R}^{n+m}$，都对应着$\mathbf{R}^{n+m+1}$中的一个凸锥 $C(S)$：

$(y,t,r)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^1$，满足

$$\begin{cases} y^r-F(t,t)\in V, \\ r>0. \end{cases} \tag{2.1.23}$$

[Gin]中证明 $C(S)$是仿射可递的凸锥．并证明下面的重要结果[Gin]：

定理 4． 任何仿射齐性凸锥 V 都可以从 $V^{(1)}:\{y>0\}$出发，经有限步交替的 S 手续和C 手续而得到．这种结构在每一步相差一个仿射等价下是惟一的．

$$V^{(1)}\xrightarrow{S}S^{(2)}=S(V^{(1)})\xrightarrow{C}V^{(2)}=C(S^{(2)})\xrightarrow{S}S^{(3)}=S(V^{(2)})\longrightarrow\cdots$$
$$\longrightarrow S^{(l)}\xrightarrow{C}V^{(l)}=C(S^{(l)})=V \tag{2.1.24}$$

序列(2.1.24)称为 V 的生成序列．易见，S 手续 $V^{(i)}\to S^{(i+1)}$增加了维数 n_i，这是 $V^{(i)}$－双线性型 $F^{(i)}$的定义空间 $\mathbf{R}_i^{n_i}$ 的维数；而 C 手续 $S^{(i)}\to V^{(i)}$只增加了一维，空间记为 $\mathbf{R}_{ii}^1$．因而分解式(2.1.24)写成空间的形式为

$$\mathbf{R}_{11}^1\xrightarrow{S}\mathbf{R}_{11}^1\times\mathbf{R}_2^{n_2}\xrightarrow{C}\mathbf{R}_{11}^1\times\mathbf{R}_2^{n_2}\times\mathbf{R}_{22}^1\longrightarrow\cdots\xrightarrow{C}\mathbf{R}_{11}^1\times\mathbf{R}_2^{n_2}\times\cdots\times\mathbf{R}_l^{n_l}\times\mathbf{R}_{ll}^1 \tag{2.1.25}$$

并且[Gin]中还证明 $\mathbf{R}_j^{n_j}$ 作为双线性型 $\mathbf{F}^{(j)}$的定义空间可以分解为下列空间的直接积：$\mathbf{F}^{(j)}$取值于 $\mathbf{R}_{11}^1\times\mathbf{R}_2^{n_2}\times\mathbf{R}_{22}^1\times\cdots\times\mathbf{R}_{j-1,j-1}^1$，它限制在 $\mathbf{R}_{ii}^1(i\leqslant j-1)$上的部分诱导出一个双线性型 $F_i^{(j)}$，$\mathbf{R}_{ii}^1$是正向半实轴，记 $F_i^{(j)}$ 在 $\mathbf{R}_j^{n_j}$ 中的正定子空间为 $\mathbf{R}_{ij}$，则

$$\mathbf{R}_j^{n_j}=\mathbf{R}_{1j}\times\mathbf{R}_{2j}\times\cdots\times\mathbf{R}_{j-1,j} \tag{2.1.26}$$

以 n_{ij}表 $\mathbf{R}_{ij}(i<j)$的维数，那么由于生成序列在仿射等价下是惟一的，因此，n_{ij}是 V 的仿射不变量，并且当且仅当所有 $n_{ij}(i<j)$都相等时，V 才是自共轭的．我们将具体写出 $V_{\mathrm{I}},V_{\mathrm{II}},V_{\mathrm{III}}$的生成序列，由此即见它们的非自共轭性．

但为了简便只仔细讨论 $s=3,k_1=1,k_2=3$．其余的情形完全是一样的．

1°. $V_{\text{II}}\begin{Bmatrix} m_1, m_2, m_3, \\ 1, \quad 3 \end{Bmatrix}$的生成序列

$$Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y'_{12} & Y_{22} & 0 \\ Y'_{13} & 0 & Y_{33} \end{bmatrix}>0,\ Y_{ij}=(y_{kl}^{(i,j)}).$$

首先，$Y_{11}>0$ 的生成序列如下：

$$V^{(1)}=\{y_{11}^{(11)}>0\}\xrightarrow{S}S^{(2)}=\{y_{11}^{(11)}-(y_{12}^{(11)})^2>0\}\xrightarrow{C}V^{(2)}$$

$$=\left\{\begin{matrix} y_{11}^{(11)}y_{22}^{(11)}-(y_{12}^{(11)})^2>0 \\ y_{22}^{(11)}>0 \end{matrix}\right. \text{即} \begin{bmatrix} y_{11}^{(11)} & y_{12}^{(11)} \\ y_{12}^{(11)} & y_{22}^{(11)} \end{bmatrix}>0\Bigg\}$$

$$\xrightarrow{S}S^{(3)}=\left\{\begin{bmatrix} y_{11}^{(11)} & y_{12}^{(11)} \\ y_{12}^{(11)} & y_{12}^{(11)} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} y_{13}^{(11)} \\ y_{23}^{(11)} \end{bmatrix}(y_{13}^{(11)}\ y_{23}^{(11)})>0\right\}\xrightarrow{C}V^{(3)}$$

$$=\left\{\begin{matrix} \begin{bmatrix} y_{11}^{(11)} & y_{12}^{(11)} \\ y_{12}^{(11)} & y_{22}^{(11)} \end{bmatrix}y_{33}^{(11)}-\begin{bmatrix} y_{13}^{(11)} \\ y_{23}^{(11)} \end{bmatrix}(y_{13}^{(11)}\ y_{23}^{(11)})>0 \\ y_{33}^{(11)}>0 \end{matrix}\right.$$

$$\text{即}\begin{bmatrix} y_{11}^{(11)} & y_{12}^{(11)} & y_{13}^{(11)} \\ y_{12}^{(11)} & y_{22}^{(11)} & y_{23}^{(11)} \\ y_{13}^{(11)} & y_{23}^{(11)} & y_{33}^{(11)} \end{bmatrix}>0\Bigg\}\xrightarrow{S}*\rightarrow*\cdots\rightarrow V^{(m_1)}=\{Y_{11}>0\}.$$

这里利用了恒等式

$$\begin{pmatrix} I & ya' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y & a' \\ a & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -y'a & 1 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} Y-\frac{1}{y}a'a & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}. \tag{2.1.27}$$

继续下去，生成

$$V^{(m_1)}\xrightarrow{S}S^{(m_1+1)}\xrightarrow{C}\cdots\xrightarrow{C}V^{(m_1+m_2)}=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y'_{12} & Y_{22} \end{bmatrix}>0,$$

再继续下去，得到

$$V^{(m_1+m_2)}=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y'_{12} & Y_{22} \end{pmatrix}>0\xrightarrow{S}\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y'_{12} & Y_{22} \end{pmatrix}-\begin{bmatrix} y_{11}^{(13)} \\ \vdots \\ y_{1m_1}^{(13)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}(y_{11}^{(13)}\cdots y_{1m_1}^{(13)}0\cdots0)>0$$

$$
\rightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y'_{12} & Y_{22}\end{pmatrix}y_{11}^{(13)}-\begin{pmatrix}y_{11}^{(13)}\\ \vdots\\ y_{1m_1}^{(13)}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(y_{11}^{(13)}\cdots y_{1m_1}^{(13)}0\cdots 0)>0\\ \\ y_{11}^{(33)}>0\end{cases}
$$

即

$$
\left(\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12} & \begin{pmatrix}y_{11}^{(13)}\\ \vdots\\ y_{1m_1}^{(13)}\end{pmatrix}\\ Y'_{12} & Y_{22} & 0\\ (y_{11}^{(13)}\cdots y_{1m_1}^{(13)}) & 0 & y_{11}^{(33)}\end{pmatrix}>0\right)\rightarrow\cdots\xrightarrow{C}V^{(m_1+m_2+m_3)}
$$

$$
=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12} & Y_{13}\\ Y'_{12} & Y_{22} & 0\\ Y'_{13} & 0 & Y_{33}\end{pmatrix}>0.
$$

相应的 $V^{(j)}$ 双线性型为

$$
F^{(2)}-(y_{12}^{(11)})^2,F^{(3)}=\begin{pmatrix}y_{13}^{(11)}\\ y_{23}^{(11)}\end{pmatrix}(y_{13}^{(11)}\ \ y_{23}^{(11)}),\cdots,
$$

$$
F^{(m_1+m_2)}=\begin{pmatrix}y_{1m_2}^{(12)}\\ \vdots\\ y_{m_1m_2}^{(12)}\\ \vdots\\ y_{m_2-1\ m_2}^{(22)}\end{pmatrix}(y_{1m_2}^{(12)}\cdots y_{m_1m_2}^{(12)}\cdots y_{m_2\ 1\ m_2}^{(22)}),
$$

$$
F^{(m_1+m_2+1)}=\begin{pmatrix}y_{11}^{(13)}\\ \vdots\\ y_{m_11}^{(13)}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(y_{11}^{(13)}\cdots y_{m_11}^{(13)}0\cdots 0),\cdots,
$$

$$F^{(m_1+m_2+m_3)}=\begin{pmatrix} y_{1m_3}^{(13)} \\ \vdots \\ y_{m_1m_3}^{(13)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(y_{1m_3}^{(13)}\cdots y_{m_1m_3}^{(13)}0\cdots 0).$$

例如 $\quad F^{(3)}=\begin{pmatrix} y_{13}^{(11)}y_{13}^{(11)} & y_{13}^{(11)}y_{23}^{(11)} \\ y_{13}^{(11)}y_{23}^{(11)} & y_{23}^{(11)}y_{23}^{(11)} \end{pmatrix}$,因此 $\quad n_{23}=n_{13}=1$.

同理可见,当 $j\leqslant m_1+m_2$ 时,都有 $n_{ij}=1(i<j)$. 在 $j=m_1+m_2+1$ 时,由 $F^{(m_1+m_2+1)}$的表达式可见,有

$$n_{i,m_1+m_2+1}=1(i\leqslant m_1),n_{i,m_1+m_2+1}=0(m_1<i<m_1+m_2+1).$$

同理,$n_{ij}=1(i\leqslant m_1,j>m_1+m_2),n_{ij}=0(m_1<i<m_1+m_2+1,j>m_1+m_2)$.诸 n_{ij}不相等,由此得到 $V_{\mathrm{II}}\begin{Bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ 1,\ 3 \end{Bmatrix}$非自共轭,同样道理有 $V_{\mathrm{II}}\begin{Bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{Bmatrix}$是非自共轭的 (若 $l<s$).

2°. $V_{\mathrm{I}}\begin{Bmatrix} m_1,m_2,m_3 \\ 1,\ 3 \end{Bmatrix}$的生成序列为

$$V^{(1)}=\{h_{11}>0\}\xrightarrow{S}\{h_{11}-h_{12}\bar{h}_{12}>0\}\xrightarrow{C}V^{(2)}=\left\{\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \bar{h}_{12} & h_{22} \end{pmatrix}>0\right\}$$

$$\xrightarrow{S}*\longrightarrow\cdots\longrightarrow V^{(m_1+m_2)}=\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \bar{H}'_{12} & H_{22} \end{pmatrix}>0$$

$$\xrightarrow{S}\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \bar{H}'_{12} & H_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}(\bar{*}'\ 0)>0\xrightarrow{C}$$

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & * \\ \bar{H}'_{12} & H_{22} & 0 \\ \bar{*}' & 0 & h_{11}^{(33)} \end{pmatrix}>0\xrightarrow{S}*\longrightarrow\cdots\xrightarrow{C}V^{(m_1+m_2+m_3)}$$

$$=\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \bar{H}'_{12} & H_{22} & 0 \\ \bar{H}'_{13} & 0 & H_{33} \end{pmatrix}>0.$$

因此有 $n_{ij}=2(j\leqslant m_1+m_2,j>i);n_{ij}=0(i>m_1,j>m_1+m_2)$. 因而也有 $V_{\mathrm{I}}\begin{Bmatrix} m_1,m_2,m_3 \\ 1,\ 3 \end{Bmatrix}$是非自共轭的. 当 $l<s$ 时,同样道理可证

$V_{\mathrm{I}}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_t \\ k_1, & \cdots, & k_t\end{Bmatrix}$是非自共轭的.

3°. $V_{\mathrm{III}}\begin{Bmatrix} m_1, m_2, m_3 \\ 1,\ 3\end{Bmatrix}$的生成序列.

$$H=\begin{pmatrix}\widetilde H_{11} & \widetilde H_{12} & \widetilde H_{13}\\ \bar{\bar{\widetilde H}}'_{12} & H_{22} & 0\\ \bar{\bar{\widetilde H}}'_{13} & 0 & H_{33}\end{pmatrix}, H=\bar H', JH=\bar H'J, J=\begin{pmatrix}j & & \\ & \ddots & \\ & & j\end{pmatrix},$$

$$j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

写 $\widetilde H_{11}$等为

$$\widetilde H_{11}=\begin{pmatrix}H_{11}^{(11)} & \cdots & H_{1m_1}^{(11)}\\ \vdots & & \vdots\\ \overline{H_{1m_1}^{(11)'}} & \cdots & H_{m_1m_1}^{(11)}\end{pmatrix}, H_{ij}^{(11)}\text{等都是 } 2\times 2 \text{ 方阵}.$$

那么 $J\widetilde H_{11}=\bar{\bar H}_{11}J$ 即 $jH_{ij}^{(11)}=\bar H_{ij}^{(11)}j$，因此，$H_{ii}^{(11)}=\begin{pmatrix}h_{ii}^{(11)} & 0\\ 0 & h_{ii}^{(11)}\end{pmatrix}$，$H_{ij}^{(11)}=\begin{pmatrix}a & b\\ -\bar b & a\end{pmatrix}$，$i\neq j$. 生成序列为

$$V^{(1)}=\{h_{11}^{(11)}>0 \text{ 即 } H_{11}^{(11)}>0\}\xrightarrow{S}H_{11}^{(11)}-H_{12}^{(11)}\bar H'^{(11)}_{12}>0\xrightarrow{C}$$

$$V^{(2)}=\begin{cases}h_{12}^{(11)}H_{11}^{(11)}-H_{12}^{(11)}\bar H'^{(11)}_{12}>0,\\ h_{22}^{(11)}>0.\end{cases}$$

即

$$\left\{\begin{pmatrix}H_{11}^{(11)} & H_{12}^{(11)}\\ \bar H'^{(11)}_{12} & H_{22}^{(11)}\end{pmatrix}>0\right\}\xrightarrow{S}\cdots\xrightarrow{C}V^{(m_1+m_2)}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}\widetilde H_{11} & \widetilde H_{12}\\ \bar{\bar H}'_{12} & \widetilde H_{22}\end{pmatrix}>0\right\}\xrightarrow{S}\begin{pmatrix}\widetilde H_{11} & \widetilde H_{12}\\ \bar{\bar H}'_{12} & \widetilde H_{22}\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}H_{11}^{(13)}\\ \vdots\\ H_{m_11}^{(13)}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(H'^{(13)}_{11}\cdots\bar H'^{(13)}_{m_11}\ 0\cdots 0)>0\xrightarrow{C}\begin{pmatrix}\widetilde H_{11} & \widetilde H_{12} & *\\ \bar{\bar H}'_{12} & \widetilde H_{22} & 0\\ \bar{*}' & 0 & H_{11}^{(33)}\end{pmatrix}>0\longrightarrow\cdots$$

$$\longrightarrow V^{(m_1+m_2+m_3)} = \left\{ \begin{pmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} & \widetilde{H}_{13} \\ \bar{H}'_{12} & \widetilde{H}_{22} & 0 \\ \bar{H}'_{13} & 0 & \widetilde{H}_{33} \end{pmatrix} > 0 \right\}.$$

这里的 $V^{(t)}$ – 双线性型是

$$F^{(2)} - H_{12}^{(11)} \bar{H}'^{(11)}_{12} = \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & * \\ * & a\bar{a} + b\bar{b} \end{pmatrix},$$

故 $n_{12} = 4$，其余类似，最后有

$n_{ij} = 4, (i < j, j \leqslant m_1 + m_2); n_{ij} = 0, (i < j, i > m_1, j > m_1 + m_2)$.

因此 $V_{\mathrm{III}} \begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 当 $l < s$ 时是非自共轭锥.

总结 1°,2°,3°为下述定理:

定理 5. 当 $l < s$ 时，锥 $V_{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$,

$V_{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}, V_{\mathrm{III}} \begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 都是非自共轭锥.

在本节结尾时，关于 V_{III} 可以再加几句，就是如果我们采用四元数的语言，那么 V_{III} 可以叙述成和 $V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}$ 完全一样，只不过变量取在四元数体上.这是因为对于任何一个四元数 $\sigma = a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d = (a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d)\mathrm{j} = z_1 + z_2\mathrm{j}$, z_1, z_2 是两复数.那么

$$\sigma \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \tag{2.1.28}$$

是一同构(保持乘法).如果用 H 表示一四元方阵，$H = H_1 + H_2\mathrm{j}$, H_1, H_2 是两个复数方阵，那么

$$H \leftrightarrow \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ -\bar{H}_2 & \bar{H}_1 \end{pmatrix} \tag{2.1.29}$$

定义了四元矩阵环和 $2n \times 2n$ 的特殊矩阵环之间的同构.熟知，四元数体中可以引进"共轭":

$$\sigma \to \bar{\sigma} = a - \mathrm{i}b - \mathrm{j}c - \mathrm{k}d$$

诱导到四元矩阵环上就是

$$H \to \bar{H} \leftrightarrow \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \bar{H}_2 & H_1 \end{pmatrix}$$

再如同通常的转置方阵，定义转置运算"′"，那么

$$H^* = (\overline{H})' = \overline{(H')} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{H}_1' & -H_2' \\ \overline{H}_2' & H_1' \end{pmatrix}$$

易证

$$(AB)^* = B^* A^* \tag{2.1.30}$$

对任何 $m \times n$ 四元矩阵 A 和 $n \times m$ 四元矩阵 B 成立. 因此立得,对任何 $1 \times n$ 四元向量 z 和四元 Hermite 方阵 $H(H^* = H)$,都有

$$zHz^* = (zHz^*)^* = \text{实数}. \tag{2.1.31}$$

由此就可以定义:四元 Hermite 方阵 H 称为定正的,如果对任何四元向量 $z \neq 0$,都有

$$zHz^* > 0. \tag{2.1.32}$$

如果

$$H = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1n} & \bar{\sigma}_{2n} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} = H',$$

σ_{ij} 是四元数. 利用(2.1.28), $\sigma_{ij} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ -\bar{b}_{ij} & \bar{a}_{ij} \end{pmatrix}$,那么

$$H \leftrightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ -\bar{b}_{11} & \bar{a}_{11} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{1n} & b_{1n} \\ -b_{1n} & \bar{a}_{1n} \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} \bar{a}_{1n} & -b_{1n} \\ \bar{b}_{1n} & \bar{a}_{1n} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{nn} & b_{nn} \\ -b_{nn} & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{12}' & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ H_{1n}' & H_{2n}' & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix} = \widetilde{H}.$$

也就是说,四元 Hermite 方阵 H 正好惟一对应着复数域上一个 $2n \times 2n$ Hermite 方阵 $\widetilde{H}$. 由于(2.1.28)、(2.1.29)是同构,再注意(2.1.32)关于定正的定义,就可知四元 Hermite 方阵 $H > 0$ 的充要条件是 $\widetilde{H} > 0$(在复数域上). 但注意到 $\widetilde{H}$ 的特殊形状就不难验证

$$J\widetilde{H} = \widetilde{H}J, J = \begin{pmatrix} j & & \\ & \ddots & \\ & & j \end{pmatrix}_{2n \times 2n}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.33}$$

这一条件也完全确定了 $\widetilde{H}$ 的形状. 而(2.1.33)正好就是锥 $V_{Ⅲ}$ 的定义中所用的条件.

I.2. 非对称可递域的新类型

I.2.1 本节在§1中引进的几类锥的基础上,按照 Siegel 域的作法,引进几类新的有界可递域,它们的特殊情况就是[Sha1]中引进的几类

非对称域.

今后以 $C\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,\ k_l \end{pmatrix}$ 表示下面形状之矩阵:

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix},\quad \begin{matrix} Z_{ij}=0,\ i\neq k_1,\cdots,k_l,\ j>i, \\ \text{及}\quad j\neq k_1,\cdots,k_l,\ i>j. \end{matrix}$$
$$\qquad\quad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

其中 $1=k_1<k_2<\cdots<k_l=s$. 如果 $l=s$ 就是通常的方阵. 如 $l=s$, 那么 $C\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ 1,\quad s \end{pmatrix}$ 中的矩阵即

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & Z_{22} & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ Z_{s1} & & & Z_{ss} \end{pmatrix}.$$

定义 以 $S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}$ 分别记以 $V_{\mathrm{I}},V_{\mathrm{II}},V_{\mathrm{III}}$ 为锥的第一类 Siegel 域,即

$$\begin{aligned} &S_{\mathrm{I}}:\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')>0, \quad Z\in C\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\ \cdots,k_l \end{pmatrix}. \\ &S_{\mathrm{II}}:\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z})>0, Z=Z', \quad Z\in C\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\ \cdots,k_l \end{pmatrix}. \qquad (2.1.34) \\ &S_{\mathrm{III}}:\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')>0, JZ=Z'J, \quad Z\in C\begin{pmatrix} 2m_1,\cdots,2m_s \\ k_1,\ \cdots,k_l \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这里如果 $l=s$,那么 $S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}$ 就是通常的典型域,是对称的.

定理 6. 域 $S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}$ 都是可递的,并解析等价于有界域.

证: 事实上,无论 $S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}$ 都可以写成 $Z=X+\mathrm{i}Y$, $Y\in V_{\mathrm{I}},V_{\mathrm{II}},V_{\mathrm{III}}$. 而 $V_{\mathrm{I}},V_{\mathrm{II}},V_{\mathrm{III}}$ 是仿射可递的(见§1 中定理 1,2,3). 再由 Siegel 域理论的基本事实[Sha1],就知 $S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}$ 都是可递的.

至于 $S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}$ 解析等价于有界域,是因为它们都是相应的典型域 $\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')>0$; $\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z})>0, Z=Z'$; $\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')>0, JZ=Z'J$ 的子流形,而后者熟知是解析等价于有界域的. 定理证毕.

现在再以 $V_{\mathrm{I}},V_{\mathrm{II}},V_{\mathrm{III}}$ 为锥,构造第二类 Siegel 域. 这里的做法可以很多,我们只取最典型的:取

$$U_1=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1s} \\ 0 & U_{22} & \cdots & U_{2s} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & U_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix},$$
$$\qquad\quad n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_s$$

$$U_2=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1s} \\ 0 & V_{22} & \cdots & V_{2s} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & V_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, \tag{2.1.35}$$
$$\qquad\quad p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_s$$

其中

$$U_{ij}=0, \quad V_{ij}=0 \quad (i\neq k_1,\cdots,k_l;j>i).$$

作 V_{I}-Hermite 型 $F(U,V)$，$U=(U_1,U_2)$：

$$F(U,V)=U_1\overline{V}_1'+\overline{V}_2U_2'. \tag{2.1.36}$$

定义 6．域 W_{I} 为

$$\frac{1}{i}(Z-\overline{Z}')-U_1\overline{U}'_1-\overline{U}_2U_2'>0, Z\in C\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\ \cdots,\ k_l \end{bmatrix}, \tag{2.1.37}$$

U 由(2.1.35)定义，取

$$U=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1s} \\ 0 & U_{22} & \cdots & U_{2s} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & U_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, U_{ij}=0 \quad (i\neq k_1,\cdots,k_l;j>i) \tag{2.1.38}$$
$$\qquad\quad n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_s$$

作 V_{II} - Hermite 型：$F(U,V)=U\overline{V}'+\overline{V}U'$

定义域 W_{II} 为

$$\frac{1}{i}(Z-\overline{Z})-U\overline{U}'-\overline{U}U'>0, Z=Z',$$

$$Z\in C\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\ \cdots,k_l \end{bmatrix}, U \text{ 由(2.1.38)定义}. \tag{2.1.39}$$

取 U 仍如(2.1.38)，但作 V_{III} − Hermite 型：

$$F(U,V)=U\overline{V}'+J\overline{V}U'J$$

定义 W_{III} 为

$$\frac{1}{i}(Z-\overline{Z}')-U\overline{U}' \quad J\overline{U}U'J>0, JZ=Z'J,$$

$$Z \in C\begin{bmatrix} 2m_1, & \cdots, & 2m_s \\ k_1 & \cdots, & k_l \end{bmatrix}, U \text{ 由(2.1.38)定义}. \tag{2.1.40}$$

这里如果令 $l=s$,那么它们就是[Sha1]中所引进的三类非对称域.

定理 7. $W_{\mathrm{I}}, W_{\mathrm{II}}, W_{\mathrm{III}}$ 都是可递的,且解析等价于有界域.

证: 根据 Siegel 域的基本事实,这只要验证 V - Hermite 型的 V - 齐性就够了(见[Sha1]).对于 $V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}, V_{\mathrm{III}}$ 运动群分别是

$$H \to AH\bar{A}', \quad Y \to AYA', \quad H \to AH\bar{A}',$$

其中 $A \in G_j\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}, j = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$.

在 W_{I} 中,令 $U_1 \to AU_1, U_2 \to AU_2, A \in G_{\mathrm{I}}$ 这一变换显然将(2.1.35)型矩阵变为同形式的矩阵,并且有

$$U_1\bar{V}_1' + \bar{V}_2U_2' \to A(U_1\bar{V}_1' + \bar{V}_2U_2')\bar{A}'.$$

在 W_{II} 中,令 $U \to AU, A \in G_{\mathrm{II}}$ 则

$$U\bar{V}' + \bar{V}U' \to AUV'A' + A\bar{V}U'A' = A(U\bar{V}' + \bar{V}U')A'.$$

在 W_{III} 中,令 $U \to AU, A \in G_{\mathrm{III}}$,故 $JA = \bar{A}J$,则

$$U\bar{V}' + J\bar{V}U'J \to AU\bar{V}'\bar{A}' + JAVU'A'J = A[U\bar{V}' + J\bar{V}U'J]A'.$$

因此,对应于 $W_{\mathrm{I}}, W_{\mathrm{II}}, W_{\mathrm{III}}$ 的 V - Hermite 型都是 V - 齐性的,因而 $W_{\mathrm{I}}, W_{\mathrm{II}}, W_{\mathrm{III}}$ 是可递的.至于它们解析等价于有界域,那是因为它们都是[Sha1]中所引进的三类非对称域的子流形,而后者[Sha1]中已证解析等价于有界域.

I.2.2 本节在于证明上面引入的 $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}, W_{\mathrm{I}}, W_{\mathrm{II}}, W_{\mathrm{III}}$ 当 $l < s$ 时都是非对称的,当 $l = s$ 时,$S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}$ 熟知是对称的,而 $W_{\mathrm{I}}, W_{\mathrm{II}}, W_{\mathrm{III}}$ 的非对称性已在[Sha1]中讨论过.可见 I. I. Pyateckii-Shapiro 所构造的著名非对称域仅是此处的一个特殊情况.

我们由下面的引理开始.

引理 2. $\mathscr{D}$ 为有界域,$0 \in \mathscr{D}$,如果 φ_0 是 $\mathscr{D}$ 在 $z=0$ 的对合,以 G_0 表 $\mathscr{D}$ 的解析自同胚群在 $z=0$ 的固定分群,那么对任何 $\varphi \in G_0$,都有

$$\varphi\varphi_0 = \varphi_0\varphi, \tag{2.1.41}$$

并且,如果 φ 的不动点集合 $\mathscr{D}_\varphi$ 是一个域,那么 φ_0 同样是 $\mathscr{D}_\varphi$ 在 $z=0$ 的对合.

这个引理见[Sha1].特别要指出,对合 φ_0 在 $z=0$ 处的展开式为

$$\varphi_0: \begin{cases} w_i = -z_i + \text{高次项}, \\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{2.1.42}$$

我们利用这个引理来证明

定理 8. 域 $S_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix}1,1,1\\1,3\end{pmatrix}$ 即

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z})>0,\quad Z=\begin{bmatrix}z_1 & z_2 & z_3\\ z_1 & t_2 & 0\\ z_3 & 0 & t_3\end{bmatrix}\tag{2.1.43}$$

是非对称的.

为此先证

引理 3. $S_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix}1,1,1\\1,3\end{pmatrix}$在 $Z=\mathrm{i}I$ 的固定分群包含下述变换:

$$Z\to W=\begin{bmatrix}w_1 & w_2 & w_3\\ w_2 & \xi_2 & 0\\ w_3 & 0 & \xi_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}w_1=z_1-c_2(a_2+c_2t_2)^{-1}z_2^2-c_3(a_3+c_3t_3)^{-1}z_3^2\\ w_j=z_j(a_j+c_jt_j)^{-1} \qquad\qquad (j=2,3)\\ \xi_j=(a_j+c_jt_j)^{-1}(-c_j+a_jt_j)\end{cases}\tag{2.1.44}$$

其中 a_j,c_j 是实数,并满足

$$\begin{bmatrix}a_j & -c_j\\ c_j & a_j\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_j & -c_j\\ c_j & a_j\end{bmatrix}'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.\tag{2.1.45}$$

证:事实上,变换(2.1.44)可以写成

$$W=(A+ZC)^{-1}(-C+ZA),$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & c_3\end{bmatrix}.$$

条件(2.1.45)就是

$$\begin{pmatrix}A & C\\ C & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & C\\ C & A\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},\tag{2.1.46}$$

而条件(2.1.46)易证正是将$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z})>0$变为$\frac{1}{2\mathrm{i}}(W-\bar{W})>0$.引理证毕.

今后为了方便,将 $S_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix}1,1,1\\1,3\end{pmatrix}$作一个平移,变为

$$I+\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z})>0,Z=\begin{bmatrix}z_1 & z_2 & z_3\\ z_2 & t_2 & 0\\ z_3 & 0 & t_3\end{bmatrix}.$$

变换(2.1.44)在平移后的域中 $Z=0$ 处的展开为

$$\begin{cases} w_1=z_1-\dfrac{c_2z_2^2}{(a_2+ic_2)}-\dfrac{c_3z_3^2}{a_3+ic_3}-\dfrac{c_2^2z_2^2t_2}{(a_2+ic_2)^2}+\dfrac{c_3^2z_2^2t_3}{(a_3+ic_3)^2}+\cdots \\ w_j=\dfrac{z_j}{a_j+ic_j}-\dfrac{c_j}{(a_j+ic_j)^2}z_jt_j+\dfrac{c_j^2}{(a_j+ic_j)^3}z_jt_j^2+\cdots \qquad j=2,3 \\ \xi_j=\dfrac{a_j-ic_j}{a_j+ic_j}t_j-\dfrac{c_j(a_j-ic_j)}{(a_j+ic_j)^2}t_j^2+\dfrac{c_j^2(a_j-ic_j)}{(a_j+ic_j)^3}t_j^3+\cdots \qquad j=2,3 \end{cases}$$

(2.1.47)

另外我们还要用到一个事实,即典型域

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z})>0,\quad Z=Z'$$

在 $Z=\mathrm{i}I$ 的对合为 $Z\to -Z^{-1}$,写成 $I+\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z})>0, Z=Z'$,则在 $Z=0$ 处的对合为

$$W=-Z-\mathrm{i}Z^2+Z^3+\cdots \tag{2.1.48}$$

现在回到定理 8 的证明. 假定域是对称的,它在 $Z=0$ 处的对合为 φ_0,由引理 2

$$\varphi_0: W=-Z+\cdots$$

考虑域在 $Z=0$ 的固定分群中的以下元素:

$$\varphi_1: Z\to\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}Z\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1&z_2&-z_3\\z_2&t_2&0\\-z_3&0&t_3\end{pmatrix}.$$

φ_1 的固定点集即 $\mathscr{D}_{\varphi_1}$ 显然为 $z_3=0$ 和

$$1+\frac{1}{2\mathrm{i}}(t_3-\bar{t}_3)>0 \text{ 及 } I+\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_2&t_2\end{pmatrix}-\overline{\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_2&t_2\end{pmatrix}}\right]>0$$

的拓扑积,根据引理 2 和(2.1.48)有

$$\begin{cases} w_3|_{z_3=0}=0 \\ \xi_3|_{z_3=0}=-t_3-\mathrm{i}t_3^2+t_3^3+\cdots \\ \begin{pmatrix}w_1&w_2\\w_2&\xi_2\end{pmatrix}_{z_3=0}=-\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_2&t_2\end{pmatrix}-\mathrm{i}\begin{pmatrix}z_1^2+z_2^2&z_2(z_1+t_2)\\z_2(z_1+t_2)&z_2^2+t_2^2\end{pmatrix} \\ \quad+\begin{pmatrix}(z_1^2+z_2^2)z_1+z_2^2(z_1+t_2)&*\\(z_1^2+z_2^2)z_2+z_2t_2(z_1+t_2),&z_2^2(z_1+t_2)+t_2(z_2^2+t_2^2)\end{pmatrix}+\text{高次项}. \end{cases} \tag{2.1.49}$$

同理,有

$$
\begin{cases}
w_2|_{z_2=0}=0\\
\xi_2|_{z_2=0}=-t_2-\mathrm{i}t_2^2+t_2^3+\cdots\\
\begin{pmatrix} w_1 & w_3\\ w_3 & \xi_3\end{pmatrix}_{z_2=0}=-\begin{pmatrix} z_1 & z_3\\ z_3 & t_3\end{pmatrix}-\mathrm{i}\begin{pmatrix} z_1^2+z_3^2 & z_3(z_1+t_3)\\ z_3(z_1+t_3) & z_3^2+t_3^2\end{pmatrix}\\
\quad+\begin{pmatrix} (z_1^2+z_3^2)z_1+(z_1+t_3)z_3^2 & *\\ (z_1^2+z_3^2)z_3+(z_1+t_3)z_3t_3, & z_3^2(z_1+t_3)+t_3(z_3^2+t_3^2)\end{pmatrix}+\text{高次项}.
\end{cases}
\tag{2.1.50}
$$

由上面两式可以决定 φ_0 的展开式中除了含有因子 z_2z_3 以外的一切项，因为任何不同时含有 z_2 和 z_3 的项，都会分别在(2.1.49)，(2.1.50)中出现.因此

$$
\varphi_0:\begin{cases}
w_1=-z_1-\mathrm{i}(z_1^2+z_2^2+z_3^2)+az_2z_3+(z_1^3+2z_1z_2^2+2z_1z_3^2+z_2^2t_2\\
\qquad +z_3^2t_3)+z_2z_3\sum_1 z+\text{四次项以上}.\\
w_2=-z_2-\mathrm{i}z_2(z_1+t_2)+bz_2z_3+(z_1^2z_2+z_2^3+z_2t_2^2+z_1z_2t_2)\\
\qquad +z_2z_3\sum_2 z+\text{四次项以上}.\\
w_3\text{ 与 }w_2\text{ 相似}.\\
\xi_2=-t_2-\mathrm{i}(t_2^2+z_2^2)+cz_2z_3+(z_1z_2^2+2z_2^2t_2+z_2^3)\\
\qquad +z_2z_3\sum_3 z+\text{四次项以上}\\
\xi_3\text{ 与 }\xi_2\text{ 相似}.
\end{cases}
\tag{2.1.51}
$$

其中$\sum_1 z$，$\sum_2 z$，$\sum_3 z$ 都是线性项

$$
\sum_i z=a_iz_1+b_iz_2+c_iz_3+d_it_1+e_it_2.
$$

利用 φ_0 和引理 3 中(2.1.47)相交换的性质，可以证明

$$
a=b=c=0 \tag{2.1.52}
$$

证明的方法是一样的，例如 $b=0$：

$$
\varphi\varphi_0:w_2=\frac{1}{(a_2+\mathrm{i}c_2)}[-z_2-\mathrm{i}(z_1+t_2)z_2+bz_2z_3+\cdots]
$$

$$
\qquad -\frac{c_2z_2t_2}{(a_2+\mathrm{i}c_2)^2}+\text{高次项}.
$$

$$
\varphi_0\varphi:w_2=-\left[\frac{z_2}{a_2+\mathrm{i}c_2}-\frac{c_2z_2t_2}{(a_2+\mathrm{i}c_2)^2}+\cdots\right]-\mathrm{i}\frac{z_2}{a_2+\mathrm{i}c_2}
$$

$$
\times\left(z_1+\frac{a_2-\mathrm{i}c_2}{a_2+\mathrm{i}c_2}t_2\right)+\frac{bz_2z_3}{(a_2+\mathrm{i}c_2)(a_3+\mathrm{i}c_3)}+\text{高次项}.
$$

由于(2.1.41)，比较 z_3z_2 的系数，再注意 a_3,c_3 的任意性，就有 $b=0$. 在(2.1.52)的基础上计算$\sum_2 z$.

$$\varphi\varphi_0 : w_2 - \frac{1}{(a_2+\mathrm{i}c_2)}[-z_2-\mathrm{i}z_2(z_1+t_2)+(z_1^2z_2+z_2^3+z_2t_2^2$$

$$+z_1z_2t_2)+z_2z_3\sum_2 z]+(-1)\frac{c_2}{(a_2+\mathrm{i}c_2)^2}[(-z_2-\mathrm{i}(z_1$$

$$+t_2)z_2)(-t_2-\mathrm{i}(t_2^2+z_2^2))]-\frac{c_2^2}{(a_2+\mathrm{i}c_2)^3}z_2t_2^2+\text{高次项}.$$

$$\varphi_0\varphi : w_2 = \left[\frac{z_2}{a_2+\mathrm{i}c_2}-\frac{c_2z_2t_2}{(a_2+\mathrm{i}c_2)^2}+\frac{c_2^3}{(a_2+\mathrm{i}c_2)^3}z_2t_2^2+\cdots\right]$$

$$+\frac{\mathrm{i}c_3z_2z_3^2}{(a_2+\mathrm{i}c_2)(a_3+\mathrm{i}c_3)}+\frac{z_2z_3}{(a_2+\mathrm{i}c_2)(a_3+\mathrm{i}c_3)}\sum_2\varphi(z)$$

$$+\text{不含 } z_2z_3 \text{ 的三次项}+\text{高次项},$$

$\sum_2\varphi(z)$表示 $z \xrightarrow{\varphi} \varphi(z)$的一次项,比较 $z_2z_3\sum_2 z$ 的系数,可见必须$\sum_2 z = \lambda z_3$,并且有

$$\lambda - \frac{\mathrm{i}c_3}{a_3+\mathrm{i}c_3}+\frac{\lambda}{(a_3+\mathrm{i}c_3)^2},\text{即}\quad \lambda=\frac{\mathrm{i}c_3(a_3+\mathrm{i}c_3)}{(a_3+\mathrm{i}c_3)^2-1}$$

这和 λ 是常数相矛盾,此矛盾说明 φ_0 不能是对合,因此定理得证.

定理 9. $S_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}2, & 2, & 2\\ 1, & 3\end{pmatrix}$为非对称域,$S_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}2, & 2, & 2\\ 1, & 3\end{pmatrix}$即

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')>0, JZ=Z'J, J-\begin{pmatrix}\jmath & & \\ & \jmath & \\ & & \jmath\end{pmatrix}, \jmath=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$Z=\begin{pmatrix}Z_{11} & Z_{12} & Z_{13}\\ Z_{21} & Z_{22} & 0\\ Z_{31} & 0 & Z_{33}\end{pmatrix}$$

其中 Z_{ij}都是 2×2 方阵.

证:因为 $JZ=Z'J$,易知 Z 有下列形状:

$$Z-\begin{pmatrix}z_1 & 0 & z_4 & z_5 & z_8 & z_9\\ 0 & z_1 & z_6 & z_7 & z_{10} & z_{11}\\ z_7 & -z_5 & z_2 & 0 & 0 & 0\\ -z_6 & z_4 & 0 & z_2 & 0 & 0\\ z_{11} & -z_9 & 0 & 0 & z_3 & 0\\ -z_{10} & z_8 & 0 & 0 & 0 & z_3\end{pmatrix},$$

写

$$Z_1=\begin{pmatrix} z_1 & 0 & z_4 & z_5 \\ 0 & z_1 & z_6 & z_7 \\ z_7 & -z_5 & z_2 & 0 \\ -z_6 & z_4 & 0 & z_2 \end{pmatrix},$$

则 $S_{Ⅲ}\begin{pmatrix}2, 2, 2\\ 1, 3\end{pmatrix}$可书为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2i}(Z_1-\bar{Z}_1')y_3+\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} z_8-\bar{z}_{11} & z_9+z_{10} \\ z_{10}+\bar{z}_9 & z_{11}-\bar{z}_8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{11}-\bar{z}_8 & -(z_9+\bar{z}_{10}) \\ -(z_{10}+\bar{z}_9) & (z_8-\bar{z}_{11}) \end{bmatrix}>0, \\ y_3=\dfrac{1}{2i}(z_3-z_3). \end{cases}$$

由此即见，域允许以下之解析自同胚：

$z_8\to z_{11}, z_{11}\to z_8, z_9\to z_{10}, z_{10}\to z_9$，其余不变，

同理，允许以下之解析自同胚：

$$z_1\to z_1, z_2\to z_2, z_3\to z_3, z_4\to z_6, z_6\to z_4, z_5\to z_7,$$
$$z_7\to z_5, z_8\to z_{11}, z_{11}\to z_8, z_9\to z_{10}, z_{10}\to z_9.$$

这一自同胚的不动点为

$$Z=\begin{pmatrix} z_1 & 0 & z_4 & z_5 & z_8 & z_9 \\ 0 & z_1 & z_5 & z_4 & z_9 & z_8 \\ z_4 & -z_5 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ -z_5 & z_4 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\ z_8 & -z_9 & 0 & 0 & z_3 & 0 \\ -z_9 & z_8 & 0 & 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2i}(Z-Z')>0,$$

这不动点所生成的区域允许以下之解析自同胚：

$$Z\to Z'.$$

因为 $JZ'=-JZ'JJ=-JJZJ=ZJ$，而 $Z\to Z'$的不动点集合即$Z=Z'$，为

$$Z=\begin{pmatrix} z_1 & 0 & z_4 & 0 & z_8 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_4 & 0 & z_8 \\ z_4 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_4 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\ z_8 & 0 & 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & z_8 & 0 & 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix},$$

即域

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\begin{pmatrix} z_1 & z_4 & z_8 \\ z_4 & z_2 & 0 \\ z_8 & 0 & z_3 \end{pmatrix} - \overline{\begin{pmatrix} z_1 & z_4 & z_8 \\ z_4 & z_2 & 0 \\ z_8 & 0 & z_3 \end{pmatrix}}\right] > 0,$$

由定理 8 即得此域之非对称性. 定理证毕.

现在可以证明本节下面的两个主要结果.

定理 10. 当 $l < s$ 时, $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}$ 都是非对称的.

证: 先考虑 S_{II},

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z - \bar{Z}) > 0, Z = Z', Z \in C\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}.$$

因为 $l < s$, 设 $1, 2, \cdots, s$ 中第一个不在 $k_1, \cdots, k_l$ 之中的数为 j, 显然 $1 < j < s$, 那么

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{1s} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & Z_{jj} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ Z'_{1s} & * & 0 & & & & Z_{ss} \end{pmatrix}.$$

考虑解析自同胚

$$Z \to I_0 Z I_0', \quad I_0 = \begin{pmatrix} I & & & & & & \\ & -I & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & I & & & \\ & & & & I & & \\ & & & & & -I & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & I \end{pmatrix},$$

(其中标注 j 的箭头横跨前 j 个对角块.)

这一自同胚之不动点集合为

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\overline{Z})>0,\ Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & 0 & \cdots & 0 & Z_{1j} & 0 & \cdots & 0 & Z_{1s} \\ 0 & \ddots & & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \\ 0 & & & \ddots & & & 0 & & \\ Z_{1j}' & & & & Z_{jj} & & & & \\ 0 & & 0 & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & \ddots & \\ Z_{1s}' & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & Z_{ss} \end{pmatrix},$$

也就是

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{1j} & Z_{1s} \\ Z_{1j}' & Z_{jj} & 0 \\ Z_{1s}' & 0 & Z_{ss} \end{pmatrix}-\overline{\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{1j} & Z_{1s} \\ Z_{1j}' & Z_{jj} & 0 \\ Z_{1s}' & 0 & Z_{ss} \end{pmatrix}}\right]>0$$

和一些对称典型域的直乘积. 对上面区域再使用解析自同胚

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{1j} & Z_{1s} \\ Z_{1j}' & Z_{jj} & 0 \\ Z_{1s}' & 0 & Z_{ss} \end{pmatrix}\to I_*\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{1j} & Z_{1s} \\ Z_{1j}' & Z_{jj} & 0 \\ Z_{1s}' & 0 & Z_{ss} \end{pmatrix}I_*',$$

$$I_*=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ \\ m_j \\ \\ m_s \end{matrix}$$

其不动点为

$$\begin{pmatrix}
z_{11}^{(11)} & & 0 & z_{11}^{(1j)} & & 0 & z_{11}^{(1s)} & & 0 \\
& \ddots & & & & & & & \\
0 & & z_{m_1m_1}^{(11)} & & & & & & \\
z_{11}^{(1j)} & & & z_{11}^{(jj)} & & & & 0 & \\
& & & & \ddots & & & & \\
0 & & & & & z_{m_jm_j}^{(jj)} & & & \\
z_{11}^{(1s)} & & & & 0 & & z_{11}^{(ss)} & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & & z_{m_sm_s}^{(ss)}
\end{pmatrix}$$

不动点所成之区域为

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\begin{pmatrix} z_{11}^{(11)} & z_{11}^{(1j)} & z_{11}^{(1s)} \\ z_{11}^{(1j)} & z_{11}^{(jj)} & 0 \\ z_{11}^{(1s)} & 0 & z_{11}^{(ss)} \end{pmatrix} - \overline{\begin{pmatrix} z_{11}^{(11)} & z_{11}^{(1j)} & z_{11}^{(1s)} \\ z_{11}^{(1j)} & z_{11}^{(jj)} & 0 \\ z_{11}^{(1s)} & 0 & z_{11}^{(ss)} \end{pmatrix}}\right] > 0.$$

与一些上半平面之直乘积,由定理 8,这是非对称的,因此 S_{II} 非对称.

再考虑 S_I,即域 $\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')>0, Z\in C\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}$. 事实上考虑解析自同胚 $Z\to Z'$. 那么不动点的集合就是 S_{II},已证 S_{II} 非对称,由引理 2 得 S_I 非对称.

最后考虑 S_{III}. $\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')>0, JZ=Z'J, Z\in C\begin{bmatrix} 2m_1,\cdots,2m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}$, $l<s$,任取 $1,2,\cdots,s$ 不在 $k_1,\cdots,k_l$ 之中的一个例如 r,考虑解析自同胚 $Z\to I_0ZI_0'$,其中

$$I_0=\begin{pmatrix}
I & & & & & & & & \\
& -I & & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & & \\
& & & I & & & & & \\
& & & & I & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & & & -I & & & \\
& & & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & -I & \\
& & & & & & & & I
\end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ r \end{matrix}$$

这的确是自同胚,因为 I_0 可与 J 交换. 而此自同胚之不动点所成之区域为

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{1r} & Z_{1s} \\ Z_{r1} & Z_{rr} & 0 \\ Z_{s1} & 0 & Z_{ss} \end{pmatrix} - \overline{\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{1r} & Z_{1s} \\ Z_{r1} & Z_{rr} & 0 \\ Z_{s1} & 0 & Z_{ss} \end{pmatrix}}'\right] > 0, JZ = Z'J$$

和一些对称域之直积,对此域再使用解析自同胚:

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{1r} & Z_{1s} \\ Z_{r1} & Z_{rr} & 0 \\ Z_{s1} & 0 & Z_{ss} \end{pmatrix} \longrightarrow I_1 \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{1r} & Z_{1s} \\ Z_{r1} & Z_{rr} & 0 \\ Z_{s1} & 0 & Z_{ss} \end{pmatrix} I_1',$$

$I_1 =$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \\ & & -\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & & \\ & -\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \\ & & -\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_r \\ 2m_s \end{matrix}$$

其不动点所成之区域为

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}[Z - \overline{Z}'] > 0, \quad JZ = Z'J,$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11}^{(11)} & z_{12}^{(11)} & z_{11}^{(1r)} & z_{12}^{(1r)} & z_{11}^{(1s)} & z_{12}^{(1s)} \\ z_{21}^{(11)} & z_{22}^{(11)} & z_{21}^{(1r)} & z_{22}^{(1r)} & z_{21}^{(1s)} & z_{22}^{(1s)} \\ z_{11}^{(r1)} & z_{12}^{(r1)} & z_{11}^{(rr)} & z_{12}^{(rr)} & 0 & 0 \\ z_{21}^{(r1)} & z_{22}^{(r1)} & z_{21}^{(rr)} & z_{22}^{(rr)} & 0 & 0 \\ z_{11}^{(s1)} & z_{12}^{(s1)} & 0 & 0 & z_{11}^{(ss)} & z_{12}^{(ss)} \\ z_{21}^{(s1)} & z_{22}^{(s1)} & 0 & 0 & z_{21}^{(ss)} & z_{22}^{(ss)} \end{pmatrix}$$

和一些对称域之直积,由定理 9,它是非对称域. 故 S_{III} 也是非对称域. 定理证毕.

定理 11. 当 $l<s$ 时，$W_{\mathrm{I}}, W_{\mathrm{II}}, W_{\mathrm{III}}$ 是非对称域.

证：无论 $W_{\mathrm{I}}, W_{\mathrm{II}}, W_{\mathrm{III}}$ 都具有以下形式：

$$\frac{1}{2i}(Z-\bar{Z}')-F(U,U)>0.$$

其中 Z,F 满足一些附加条件. 但它们都允许以下之解析自同胚：

$$Z\to Z, U\to -U$$

而在此自同胚下之不动点集即 $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}$. 当 $l<s$ 时，要证的结论由定理 10 即得.

Ⅰ.2.3. 以上面的锥 $V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}, V_{\mathrm{III}}$ 为基础，还可以考虑一些其他的锥及相应的域. 因为没有什么典型的意义，只以 V_{II} 为例简单讨论一下.

对 $Y\in V_{\mathrm{II}}\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$，$Y$ 有形式

$$Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1s} \\ Y'_{12} & Y_{22} & \cdots & Y_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y'_{1s} & Y'_{2s} & \cdots & Y_{ss} \end{bmatrix}, Y_{ij}=0, (i\neq k_1,\cdots,k_l, j>i).$$

$Y_{11}, Y_{22}, \cdots, Y_{ss}$ 本来可以是任意的对称方阵，如果它们可以分成若干组：$Y_{i_1i_1},\cdots,Y_{i_qi_q}$；$Y_{j_1j_1},\cdots,Y_{j_pj_p}$；…；每组彼此相等，$Y_{i_1i_1}=Y_{i_2i_2}=\cdots=Y_{i_qi_q}$；$Y_{j_1j_1}=Y_{j_2j_2}=\cdots=Y_{j_pj_p}$；…；这样也组成一个齐性锥. 其仿射运动群为

$$Y\to AYA', A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & A_{ss} \end{bmatrix}, A_{ij}=0, i\neq k_1,\cdots,k_1; j>i.$$

诸 $A_{11}\cdots, A_{ss}$ 也分成若干组：

$$A_{i_1i_1}=A_{i_2i_2}=\cdots=A_{i_qi_q}; A_{j_1j_1}=A_{j_2j_2}=\cdots=A_{j_pj_p};\cdots;$$

可以证明这些锥一般是非自共轭的，但也含有自共轭锥.

以这种锥为底，作第一类或第二类 Siegel 域，在各个具体的情形，利用[Sha1]中的结果和本文前节的结果，都不难判别其对称与否. 在这些域中，特别考虑以下一类：

$$
锥\ V_{\mathrm{IV}}:\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & \cdots & Y_{1s} \\ Y'_{12} & Y_{22} & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ Y'_{1s} & & & & Y_{22} \end{pmatrix} > 0.
$$

最简单的就是 $V_4: y_1 y_2 - y_3^2 - \cdots - y_n^2 > 0, y_2 > 0$.

以 V_{IV} 为底作 Siegel 域,最简单的就是第四类对称典型域,如果 Y_{22} 是$\geqslant 2$ 阶的方阵,那么对应的域就是非对称的.

以 V_4 为底,取 $F(U,U) = U\overline{U}' + \overline{U}U'$,

$$
U = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & u_1 T_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & u_1 T_n \end{pmatrix}
$$

则 $F(U,U) \in V_4$,必须有 $T_i\overline{T}'_j + T_j\overline{T}'_i = 2\delta_{ij}I$.

令

$$
Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 & \cdots & z_{n+2} \\ z_3 & z_2 & & 0 \\ \vdots & & 0 \ddots & \\ z_{n+2} & & & z_2 \end{pmatrix}
$$

则

$$
\frac{1}{2i}(Z - \overline{Z}) - \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & u_1 T_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & u_1 T_n \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} v & u \\ 0 & u_1 T_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & u_1 T_n \end{pmatrix}}' - \overline{\begin{pmatrix} v & u \\ 0 & u_1 T_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & u_1 T_n \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & u_1 T_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & u_1 T_n \end{pmatrix}' > 0
$$

就是[Sha1]中所列举的第四类非对称域.

本节内容来自[ZJY],[ZJY2].

Ⅱ. 非对称典型域的扩充空间

我们在[ZJY]中引进了几类新的非对称典型域,使[Sha1]中的例子为其特殊情形.本文主要讨论这些域的扩充空间.所谓扩充空间的问题也就是引进无穷远点的问题.单复变的 Gauss 平面可以引进惟一的无穷远点而使平面紧致,从而使各种问题的讨论有所裨益.在多复变中,对于

四类对称典型域而言,它们的扩充空间是熟知的[Lu3]、而对于非对称域这方面的工作却只有[Lu7].

所谓有界可递域的扩充空间,就是定义一个复流形,一般是齐性的,使有界可递域可以实现为其中的"超圆"."超圆"一词最早来源于华罗庚教授关于矩阵几何的工作.例如 Gauss 平面中引进齐次坐标使平面扩充成为一维复射影空间:$\mathscr{Z}=(z_1,z_2)$,z_1,z_2 不同时为零,$\mathscr{Z}_1$ 与 $\mathscr{Z}_2$ 等价当且仅当 $\mathscr{Z}_1=\lambda\mathscr{Z}_2,\lambda\neq0$. 在坐标邻域 $z_1\neq0$ 之中,局部坐标定义为 $z_1^{-1}z_2=z$,$z_1=0$ 的点称为"∞",显然"∞"只有一点.现在我们取 $H=[1,-1]$,那么点集 $\mathscr{Z}$ 满足

$$\mathscr{Z}H\bar{\mathscr{Z}}'>0$$

的点集就称为由 H 定义的"超圆".上式中点的全部在 $z_1\neq0$ 的坐标邻域之中,用局部坐标写,就是

$$1-|z|^2>0.$$

众所周知,适当的扩充空间对于研究可递域本身是很有意义的.这可以举出可递域的解析自同胚群的问题为例,如果扩充空间定义得适当(对于一域而言,扩充空间不是惟一的),那么可递域的解析自同胚群的连通部分,就可以从扩充空间的运动群限制在超圆上而得到,这不仅对于对称典型域早已得到证实,而且对于非对称域而言,在一些情形也已得到证实.

Ⅱ.1

我们利用[Lu7]中所引进的齐次复流形 $\mathscr{B}(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$来实现[ZJY]中的一些非对称域的扩充空间.

流形 $\mathscr{B}(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$的作法如下,在集合 $E(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$:

$$E=\left\{\mathscr{Z}\,\middle|\,\mathscr{Z}=\begin{pmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12} & \cdots & \cdots & \mathscr{Z}_{1p}\\ 0 & \mathscr{Z}_{22} & \cdots & \cdots & \mathscr{Z}_{2p}\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & & & & \mathscr{Z}_{pp}\end{pmatrix}\begin{matrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ \\ r_p\end{matrix},\ \mathscr{Z}_{ii}\text{的秩为 } r_i\right\}\quad(2.2.1)$$

$$\qquad r_1+s_1\quad r_2+s_2\quad\cdots\quad r_p+s_p$$

中引进等价关系:$\mathscr{Z}_1\sim\mathscr{Z}_2$,当且仅当 $\mathscr{Z}_2=P\mathscr{Z}_1$,其中

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & \cdots & P_{1p} \\ & P_{22} & \cdots & \cdots & P_{2p} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & P_{pp} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_p \end{matrix} \quad \det P\neq 0, \qquad (2.2.2)$$

$$\begin{matrix} r_1 & & r_2 & \cdots & r_p \end{matrix}$$

$\mathscr{Z}$ 所在的等价类记为 $\pi(\mathscr{Z})$，全体 $\pi(\mathscr{Z})$ 所成的集合记作 $\mathscr{B}(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$．[Lu7]中证明，这是一个齐性复流形，一般是非紧致的．其局部坐标可以这样给出：坐标邻域 $M(\alpha)$，$\alpha=(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1};\cdots;\alpha_{p1},\cdots,\alpha_{pr_p})$ 为 $\mathscr{Z}_{tt}$ 的第 $\alpha_{t1},\cdots,\alpha_{tr_t}$ 列所成子式 $\mathscr{Z}_{tt}^1$ 非异，那么

$$\mathscr{Z}=\begin{pmatrix} (\mathscr{Z}_{11}^1\mathscr{Z}_{11}^2)P(\alpha_1) & (\mathscr{Z}_{12}^1\mathscr{Z}_{12}^2)P(\alpha_2) & \cdots & (\mathscr{Z}_{1p}^1\mathscr{Z}_{1p}^2)P(\alpha_p) \\ & (\mathscr{Z}_{22}^1\mathscr{Z}_{22}^2)P(\alpha_2) & \cdots & (\mathscr{Z}_{2p}^1\mathscr{Z}_{2p}^2)P(\alpha_p) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\mathscr{Z}_{pp}^1\mathscr{Z}_{pp}^2)P(\alpha_p) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \mathscr{Z}_{11}^1 & \cdots & \mathscr{Z}_{1p}^1 & \mathscr{Z}_{11}^2 & \cdots & \mathscr{Z}_{1p}^2 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \mathscr{Z}_{pp}^1 & & & \mathscr{Z}_{pp}^2 \end{pmatrix} NP(\alpha)=(Z_1,Z_2)NP(\alpha).$$

$$(2.2.3)$$

这里 N 是某一确定的置换方阵 $P(\alpha)=\begin{pmatrix} P(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\alpha_P) \end{pmatrix}$，$P(\alpha_t)$ 是依赖于 $\alpha_t=(\alpha_{t1},\cdots,\alpha_{tr_t})$ 的置换方阵．邻域 $M(\alpha)$ 中的局部坐标定义为

$$\pi(\mathscr{Z})\xrightarrow{\theta(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)}Z_1^{-1}Z_2=Z,$$

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1p} \\ 0 & Z_{22} & \cdots & Z_{2p} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & Z_{pp} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{matrix}, \qquad (2.2.4)$$

$$\begin{matrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_p \end{matrix}$$

由此，(2.2.3)可以写作 $\mathscr{Z}=P(I,Z)NP(\alpha)$，$P$ 是非异方阵．

复流形 $\mathscr{B}(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$ 显然允许运动群 $G(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$：

$$\mathscr{Z}=\mathscr{Y}Q,\ Q=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & \cdots & Q_{1p} \\ & Q_{22} & \cdots & \cdots & Q_{2p} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & Q_{pp} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1+s_1 \\ r_2+s_2 \\ \vdots \\ \\ r_p+s_p \end{matrix} \quad \det Q\neq 0,$$

$$\begin{matrix} r_1+s_1 & r_2+s_2 & \cdots & r_p+s_p \end{matrix} \tag{2.2.5}$$

[Lu7]中证明 $G(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$是可递群．

同[Lu7]，引进复子流形 $\mathscr{R}_J(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$．假定 J 是$(m+n)$阶非异对称或斜对称方阵，$m=r_1+\cdots+r_p$，$n=s_1+\cdots+s_p$，那么有$\pi(\mathscr{Y})$，满足 $\mathscr{Y}J\mathscr{Y}'=0$，就称为子流形 $\mathscr{R}_J(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$．

再引进所谓超圆 $\mathscr{R}_H$．这里 H 是$(m+n)$阶非异 Hermite 方阵，那么$\pi(\mathscr{Y})$满足

$$\mathscr{Y}H\bar{\mathscr{Y}}'>0, \tag{2.2.6}$$

就称为由 H 所定义的超圆．它可以是空集，如果非空就是 $\mathscr{R}(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$中的开集，而 $\mathscr{R}_H\cap\mathscr{R}_J=\mathscr{R}_{HJ}$就叫做 $\mathscr{R}_J$ 中的超圆，或 $\mathscr{R}_J$ 是 $\mathscr{R}_{HJ}$的扩充空间．

现在我们取 $m=n$，$r=r_1+\cdots+r_q$，$s=s_1+\cdots+s_q$，$r_{q+1}+\cdots+r_{q+l}=n-r-s$，$s_{q+1}+\cdots+s_{q+l}=n-r-s$，$r_{q+l+1}+\cdots+r_p=s$，$s_{q+l+1}+\cdots+s_p=r$．取

$$H_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}I^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}I^{(n-r-s)} & 0 \\ 0 & 0 & I^{(s)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}I^{(n-r-s)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}I^{(r)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

令 $H=N'H_0N$，N 为(2.2.3)所定义之转置方阵．考虑 $\mathscr{R}_H$，H 由上述方阵确定．可以如同[Lu7]一样证明，$\mathscr{R}_H$ 全部落在坐标邻域$M(\alpha)$，$\alpha=(1,2,\cdots,r_1;1,2,\cdots,r_2;\cdots,1,2,\cdots,r_p)$之中，则 $\mathscr{R}_H$ 的点用$M(\alpha)$的局部坐标可以写作

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & I & 0 & 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} H_0 \overline{\begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}}' >0, \tag{2.2.7}$$

这里

$$R_{11}=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & \cdots & Z_{1q} \\ 0 & Z_{22} & \cdots & \cdots & Z_{2q} \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & Z_{qq} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_q \end{matrix},$$
$$\qquad\quad \begin{matrix} s_1 & s_2 & \cdots & & s_q \end{matrix}$$

$$R_{12}=\begin{pmatrix} Z_{1\,q+1} & \cdots & Z_{1\,q+l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{q\,q+1} & & Z_{q\,q+l} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ \vdots \\ r_q \end{matrix},$$
$$\qquad\quad \begin{matrix} s_{q+1} & \cdots\cdots & s_{q+l} \end{matrix}$$

$$R_{13}=\begin{pmatrix} Z_{1\,q+l+1} & \cdots & Z_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{q\,q+l+1} & \cdots & Z_{qp} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ \vdots \\ r_q \end{matrix},\quad R_{22}=\begin{pmatrix} Z_{q+1\,q+1} & \cdots & \cdots & Z_{q+1\,q+l} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & Z_{q+l\,q+l} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_{q+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{q+l} \end{matrix},$$
$$\qquad\quad \begin{matrix} s_{q+l+1} & \cdots & s_p \end{matrix}\qquad\qquad\qquad \begin{matrix} s_{q+1} & \cdots & \cdots & s_{q+l} \end{matrix}$$

$$R_{23}=\begin{pmatrix} Z_{q+1\,q+l+1} & \cdots & Z_{q+1\,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{q+l\,q+l+1} & \cdots & Z_{q+l\,p} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_{q+1} \\ \vdots \\ r_{q+l} \end{matrix},$$
$$\qquad\quad \begin{matrix} s_{q+l+1} & \cdots & s_p \end{matrix}$$

$$R_{33}=\begin{pmatrix} Z_{q+l+1\,q+l+1} & \cdots & \cdots & Z_{q+l+1\,p} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & Z_{pp} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_{q+l+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_p \end{matrix}$$
$$\qquad\quad \begin{matrix} s_{q+l+1} & \cdots\cdots & s_p \end{matrix}$$

这里如果我们再取 $r_1=s_{q+l+1}, r_2=s_{q+l+2},\cdots,r_q=s_p$；$s_1=r_{q+l+1},\cdots,s_q=r_p$；$r_{q+1}=s_{q+1},\cdots,r_{q+l}=s_{q+l}$，并且 $q=p-q-l$. 取

$$J=N'J_0N,$$

$$J_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I^{(n-r-s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I^{(s)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I^{(n-r-s)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I^{(r)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

那么 $\mathscr{B}_H \cap \mathscr{B}_I$ 的点可以写作

$$\begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} J_0 \begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}' = 0,$$

$$\begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} H_0 \overline{\begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}}' > 0, \tag{2.2.8}$$

由第一式得到：$R_{13} = R'_{13}, R_{12} = R'_{23}, R_{22} = R'_{22}, R_{11} = R'_{33}$，注意到 R_{ij} 的分划形状，必有

$$R_{22} = \begin{pmatrix} Z_{q+1\,q+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_{q+l\,q+l} \end{pmatrix}, \quad R_{11} = R'_{33} = \begin{pmatrix} Z_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_{qq} \end{pmatrix},$$

经过简单的计算，(1.8)可以写作

$$\frac{1}{i}\left[\begin{pmatrix} R_{13} & R_{12} \\ R'_{12} & R_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{R}_{13} & \overline{R}_{12} \\ \overline{R}'_{12} & \overline{R}_{22} \end{pmatrix}\right]$$
$$- \begin{pmatrix} R_{11} \\ 0 \end{pmatrix} (\overline{R}'_{11} \quad 0) - \begin{pmatrix} \overline{R}_{11} \\ 0 \end{pmatrix} (R'_{11} \quad 0) > 0. \tag{2.2.9}$$

注意到 R_{22} 的形状，就可知这是[ZJY]中所构造的非对称域 W_{II} 中之一个．从这里已经可以看出，要利用流形 $\mathscr{B}(r_1, \cdots, r_p; s_1, \cdots, s_p)$ 来实现[ZJY]中所引进的所有非对称域，可能是困难的．

Ⅱ.2.

Ⅱ.2.1 本节将定义新的齐性复流形．

考虑具有以下性质的矩阵的集合：

$$\mathscr{Y} = \begin{pmatrix} \mathscr{Y}_{11} & \mathscr{Y}_{12} & \cdots & \cdots & \mathscr{Y}_{1p} \\ & \mathscr{Y}_{22} & \cdots & \cdots & \mathscr{Y}_{2p} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathscr{Y}_{pp} \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_p \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \mathscr{Y}_{ii} \text{ 的秩为 } r_i, \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{2.2.10}$$
$$\qquad r_1 + s_1 \quad r_2 + s_2 \quad \cdots \quad r_p + s_p$$

取 l 个正整数：$1<k_1<k_2<\cdots<k_l<p$ 和 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_l$ 满足

$$k_i<\rho_i\leqslant p.$$

所谓(k,ρ)型矩阵，是指(2.2.10)中有

$$\begin{aligned}
&\mathscr{Z}_{k_1,k_1+1}=\mathscr{Z}_{k_1,k_1+2}=\cdots=\mathscr{Z}_{k_1,\rho_1}=0,\\
&\mathscr{Z}_{k_2,k_2+1}=\mathscr{Z}_{k_2,k_2+2}=\cdots=\mathscr{Z}_{k_2,\rho_2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\mathscr{Z}_{k_l,k_l+1}=\mathscr{Z}_{k_l,k_l+2}=\cdots=\mathscr{Z}_{k_l,\rho_l}=0
\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

的矩阵．例如 $p=5,k_1=2,k_2=3,\rho_1=3,\rho_2=4$，

$$\mathscr{Z}=\begin{pmatrix}\mathscr{Z}_{11}&\mathscr{Z}_{12}&\mathscr{Z}_{13}&\mathscr{Z}_{14}&\mathscr{Z}_{15}\\0&\mathscr{Z}_{22}&0&\mathscr{Z}_{24}&\mathscr{Z}_{25}\\0&0&\mathscr{Z}_{33}&0&\mathscr{Z}_{35}\\0&0&0&\mathscr{Z}_{44}&\mathscr{Z}_{45}\\0&0&0&0&\mathscr{Z}_{55}\end{pmatrix}\tag{2.2.12}$$

这种性质的矩阵集合，记为 $E\begin{pmatrix}r_1,\cdots,r_p\\s_1,\cdots,s_p\end{pmatrix}\begin{vmatrix}k_1,\cdots,k_l\\\rho_1,\cdots,\rho_l\end{vmatrix}$，简记为 $E\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\begin{vmatrix}k\\\rho\end{vmatrix}$.

现在在其中引进等价关系：

$\mathscr{Z}_1\sim\mathscr{Z}_2$ 当且仅当 $\mathscr{Z}_2=P\mathscr{Z}_1,\det P\neq0$，

$$P=\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}&\cdots&\cdots&P_{1p}\\0&P_{22}&\cdots&\cdots&P_{2p}\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\\vdots&&0&\ddots&\vdots\\0&&&&P_{pp}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&P_{k_1k_1+1}=P_{k_1k_1+2}=\cdots=P_{k_1\rho_1}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_{k_lk_l+1}=P_{k_lk_l+2}=\cdots=P_{k_l\rho_l}=0
\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

这是一个等价关系．主要之点就在于(2.2.13)形式之 P 成为一个矩阵群．这当然不难仔细说明，但我们举一个例说明也就够了．例如，$k_1=2$.

$$
\begin{pmatrix}
P_{11} & P_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{1\rho_1+1} & \cdots & P_{1p} \\
 & P_{22} & 0 & \cdots & 0 & P_{2\rho_1+1} & \cdots & P_{2p} \\
 & & P_{33} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
 & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & P_{pp}
\end{pmatrix} \cdot
\begin{pmatrix}
Q_{11} & Q_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & Q_{1\rho_1+1} & \cdots & Q_{1p} \\
 & Q_{22} & 0 & \cdots & 0 & Q_{2\rho_1+1} & \cdots & Q_{2p} \\
 & & Q_{33} & & * & \cdots & \cdots & * \\
 & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & Q_{pp}
\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix}
P_{11}Q_{11} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
 & P_{22}Q_{22} & 0 & \cdots & 0 & P_{22}Q_{2\rho_1+1} & \cdots & * \\
 & & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
 & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & P_{pp}Q_{pp}
\end{pmatrix}.
$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & \cdots & P_{1\rho_1} & P_{1\rho_1+1} & \cdots & P_{1p} \\ & P_{22} & 0 & \cdots & 0 & P_{2\rho_1+1} & \cdots & p_{2p} \\ & & \ddots & & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & P_{\rho_1\rho_1} & & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & P_{pp} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & \cdots & P_{1\rho_1} \\ & P_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & * \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & * \end{pmatrix}^{-1} & * \\ & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & P_{22}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & \ddots & * & & \vdots & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & * & * & \cdots & * \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & * \end{pmatrix}.$$

以 $\pi(\mathscr{L})$ 记 $\mathscr{L}$ 的等价类，那么全体 $\pi(\mathscr{L})$ 的集合记为 $\mathscr{B}\left\{\begin{matrix} r_1,\cdots,r_p \\ s_1,\cdots,s_p \end{matrix}\middle| \begin{matrix} k_1,\cdots,k_l \\ \rho_1,\cdots,\rho_l \end{matrix}\right\}$.

我们有

定理 1. $\mathscr{B}\left\{\begin{matrix} r_1,\cdots,r_p \\ s_1,\cdots,s_p \end{matrix}\middle| \begin{matrix} k_1,\cdots,k_l \\ \rho_1,\cdots,\rho_l \end{matrix}\right\}$是一个齐性复流形，并且当 $\rho>1$ 时，它是非紧致的．

证： 1°．以 π 表示 $\mathscr{L}\to\pi(\mathscr{L})$ 的投影，$\pi(\mathscr{L})$ 的拓扑由 $E\left\{\begin{matrix} r_1,\cdots,r_p \\ s_1,\cdots,s_p \end{matrix}\middle| \begin{matrix} k_1,\cdots,k_l \\ \rho_1,\cdots,\rho_l \end{matrix}\right\}$的拓扑诱导得到．因此投影 π 是开映射．其次

π 是连续的，事实上，任取 $\mathscr{B}\begin{bmatrix} r_1,\cdots,r_p & k_1,\cdots,k_l \\ s_1,\cdots,s_p & \rho_1,\cdots,\rho_l \end{bmatrix}$ 中开集 O，按定义，E 中存在开集 B，使 $\pi(B)=O$，任取(2.13)之 P，PB 仍然是 E 中开集，则

$$\pi^{-1}(O)=\sum_p PB=\text{开集}.$$

和号中 P 跑遍一切(2.2.13)之 P. 因此 π 连续又开．

2° 在 $\mathscr{B}\begin{bmatrix} r_1,\cdots,r_p & k_1,\cdots,k_l \\ s_1,\cdots,s_p & \rho_1,\cdots,\rho_l \end{bmatrix}$ 中规定坐标邻域系 $\{M(\alpha),\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p),\alpha_1=\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1};\cdots;\alpha_p=\alpha_{p1},\cdots,\alpha_{pr_p}\}$ 如下：$\mathscr{X}\in E\begin{bmatrix} r_1,\cdots,r_p & k_1,\cdots,k_l \\ s_1,\cdots,s_p & \rho_1,\cdots,\rho_l \end{bmatrix}$，其中 $\mathscr{X}_{ii}$ 之第 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 诸列所成子式非异．如果 $\pi(\mathscr{X})\in M(\alpha)$，则有

$$\mathscr{X}=\begin{bmatrix} (\mathscr{X}_{11}^1\mathscr{X}_{11}^2)P(\alpha_1) & \cdots & \cdots & (\mathscr{X}_{1p}^1\mathscr{X}_{1p}^2)P(\alpha_p) \\ & (\mathscr{X}_{22}^1\mathscr{X}_{22}^2)P(\alpha_2) & \cdots & (\mathscr{X}_{2p}^1\mathscr{X}_{2p}^2)P(\alpha_p) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\mathscr{X}_{pp}^1\mathscr{X}_{pp}^2)P(\alpha_p) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathscr{X}_{11}^1 & \mathscr{X}_{12}^1 & \cdots & \mathscr{X}_{1p}^1 & \mathscr{X}_{11}^2 & \cdots & \cdots & \mathscr{X}_{1p}^2 \\ & \mathscr{X}_{22}^1 & \cdots & \mathscr{X}_{2p}^1 & & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathscr{X}_{pp}^1 & & & & \mathscr{X}_{pp}^2 \end{bmatrix}NP(\alpha)=(Z_1,Z_2)NP(\alpha),\tag{2.2.14}$$

其中 Z_1,Z_2 都是 (k,ρ) 型矩阵，N 是一个确定的置换方阵，$P(\alpha)=[p(\alpha_1),\cdots,P(\alpha_p)]$，$P(\alpha_i)$ 是与 $(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{ir_i})$ 有关的置换方阵．

在 $M(\alpha)$ 中定义局部坐标为

$$\pi(\mathscr{X})\xrightarrow{\theta(\alpha)}Z_1^{-1}Z_2=Z,\tag{2.2.15}$$

这里 Z 仍然是 (k,ρ) 型矩阵，即

$$Z=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & \cdots & Z_{1p} \\ 0 & Z_{22} & \cdots & \cdots & Z_{2p} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & Z_{pp} \end{bmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_p \end{matrix},\quad \begin{matrix} s_1 & s_2 & \cdots & \cdots & s_p \end{matrix}\quad \begin{matrix} Z_{k_1k_1+1}=\cdots=Z_{k_1\rho_1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ Z_{k_lk_l+1}=\cdots=Z_{k_l\rho_l}=0. \end{matrix}\tag{2.2.16}$$

3° Hausdorff 性．设 $\pi(\mathscr{X}_1)\neq\pi(\mathscr{X}_2)$. 如果 $\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2$ 在同一坐标邻域之

中，Z^1,Z^2 是它们的局部坐标，$Z^1\neq Z^2$，那么显然可以找出两不相交之邻域分别包含 Z^1,Z^2. 如果 $\mathscr{Z}_1,\mathscr{Z}_2$ 不在同一坐标邻域之中，无妨假定 $\mathscr{Z}_1$ 在 $M(\alpha_0)$之中，

$$\alpha_0=\begin{bmatrix}1, & 2, & \cdots, & r_1\\ 1, & 2, & \cdots, & r_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1, & 2, & \cdots, & r_p\end{bmatrix},\mathscr{Z}_1=(I,Z^1)N.$$

因为 $\mathscr{Z}\to\pi(\mathscr{Z})$是开连续映射，因此 $\mathscr{B}$ 中闭集的原象是闭集．在 Z^1 附近作一包含(I,Z^1)的开集 U_1 和 U_2，使 $\pi(\mathscr{Z}_1)\in U_1\subset\overline{U}_1\subset U_2\subset\overline{U}_2\subset M(\alpha_0)$. 考虑 π^{-1}，则 $\pi^{-1}(U_1)$是 $E\begin{pmatrix}r & k\\ s & \rho\end{pmatrix}$中的开集，包含 $\mathscr{Z}_1$. 再考虑 $E-\pi^{-1}(\overline{U}_2)$，由上述 $\pi^{-1}(\overline{U}_1)$是闭的，故 $E-\pi^{-1}(\overline{U}_2)$是开集，并显然包含 $\mathscr{Z}_2$. 于是 U_1 和 $\pi(E-\pi^{-1}(\overline{U}_2))$就是分别包含 $\pi(\mathscr{Z}_1)$和 $\pi(\mathscr{Z}_2)$的两开集．

4° 复解析性．设 $\pi(\mathscr{Z})\in M(\alpha)\cap M(\beta),\alpha\neq\beta$. 则由(2.14)，

$$\mathscr{Z}=(I,Z)NP(\alpha)=R(I,W)NP(\beta)$$

$$R(I,W)=(I,Z)NP(\alpha)p^{-1}(\beta)N^{-1}=(I,Z)\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

因为 $\det R\neq0$，故 $\det(A+ZC)\neq0$，因此

$$W=(A+ZC)^{-1}(B+ZD)\tag{2.2.17}$$

对 Z 而言是复解析的．

5° 齐性．运动群为

$\mathscr{Z}\to\mathscr{Z}Q$，

$$Q=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12} & \cdots & \cdots & Q_{1p}\\ & Q_{22} & \cdots & \cdots & Q_{2p}\\ & 0 & \ddots & & \vdots\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & Q_{pp}\end{pmatrix}\begin{matrix}r_1+s_1\\ r_2+s_2\\ \vdots\\ \vdots\\ r_p+s_p\end{matrix}\quad\begin{matrix}Q_{k_1k_1+1}=\cdots=Q_{k_1\rho_1}=0\\ Q_{k_2k_2+1}=\cdots=Q_{k_2\rho_2}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ Q_{k_lk_l+1}=\cdots=Q_{k_l\rho_l}=0\end{matrix}$$
$$\qquad r_1+s_1\quad r_2+s_2\quad\cdots\quad r_p+s_p\tag{2.2.18}$$

要证，任给 $\pi(\mathscr{Z}_1)\neq\pi(\mathscr{Z}_2)$，要找到(2.2.18)形状之 Q，使

$$\mathscr{Z}_1Q=\mathscr{Z}_2.$$

我们对 p 用归纳法．$p=1$ 时，就是通常的 Grassmann 流形，这当然是正确的．现设 $p-1$ 时正确．令

$$\mathscr{Z}_1=\begin{pmatrix}\tilde{\mathscr{Z}}_1 & \tilde{\mathscr{Z}}_{12}\\ 0 & \mathscr{Z}_{pp}\end{pmatrix},\mathscr{Z}_2=\begin{pmatrix}\tilde{\mathscr{W}}_1 & \tilde{\mathscr{W}}_{12}\\ 0 & \mathscr{W}_{pp}\end{pmatrix},$$

则 $\tilde{\mathscr{Z}}_1,\tilde{\mathscr{W}}_1$ 属于 $p-1$ 的情形．由归纳法，存在

$$\tilde{Q}_1=\begin{pmatrix}Q_{11} & \cdots & Q_{1\,p-1}\\ & \ddots & \vdots\\ & & Q_{p-1\,p-1}\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}Q_{k_1k_1+1}=\cdots=Q_{k_1p_1}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ Q_{k_lk_l+1}=\cdots=Q_{k_lp_l}=0.\end{matrix}$$

和 Q_{pp} 使得 $\tilde{\mathscr{Z}}_1\tilde{Q}_1=\tilde{\mathscr{W}}_1,\mathscr{Z}_{pp}Q_{pp}=\mathscr{W}_{pp}$．因此

$$Q=\begin{pmatrix}\tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_{12}\\ 0 & Q_{pp}\end{pmatrix}$$

满足 $\mathscr{Z}_1Q=\mathscr{Z}_2$ 的充要条件是

$$\tilde{\mathscr{Z}}_1\tilde{Q}_{12}=\tilde{\mathscr{W}}_{12}-\tilde{\mathscr{Z}}_{12}Q_{pp},\tag{2.2.19}$$

$\tilde{\mathscr{Z}}_{12},\tilde{\mathscr{W}}_{12}$都是同一类型的矩阵

$$\tilde{\mathscr{Z}}_{12}=\underset{r_p+s_p}{\begin{pmatrix}\mathscr{Z}_{1p}\\ \mathscr{Z}_{2p}\\ \vdots\\ \mathscr{Z}_{p-1\,p}\end{pmatrix}}\begin{matrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_{p-1}\end{matrix},\quad \tilde{\mathscr{W}}_{12}=\underset{r_p+s_p}{\begin{pmatrix}\mathscr{W}_{1p}\\ \vdots\\ \vdots\\ \mathscr{W}_{p-1\,p}\end{pmatrix}}\begin{matrix}r_1\\ \vdots\\ \vdots\\ r_{p-1}\end{matrix},$$

其中 $\mathscr{Z}_{ip}$ 和 $\mathscr{W}_{ip}$ 可能有相同的若干个为零．(2.2.19)要求解出 $\tilde{Q}_{12}$ 也是这种形状之矩阵．如果 $\mathscr{Z}_{ip}=0$（随之 $\mathscr{W}_{ip}=0$），$\tilde{\mathscr{Z}}_1$ 中第 i 行除了 $\mathscr{Z}_{ii}$ 外全为零，我们可以把 $\tilde{\mathscr{Z}}_1$ 中那些全行只有 $\mathscr{Z}_{ii}\neq 0$ 的行和相应的列（$i=p-1$ 除外）留下，得到矩阵

$$\tilde{\mathscr{Z}}_1\to\begin{pmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{1*} & \cdots & \mathscr{Z}_{1\,p-1}\\ & \mathscr{Z}_{**} & \cdots & *\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \mathscr{Z}_{p-1\,p-1}\end{pmatrix}.$$

把(2.2.19)右端之列向量中零元素去掉，(2.19)归结到求解

$$\begin{pmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{1*} & \cdots & \mathscr{Z}_{1\,p-1}\\ & \mathscr{Z}_{**} & \cdots & *\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \mathscr{Z}_{p-1\,p-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{1p}\\ *\\ \vdots\\ Q_{p-1\,p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ \vdots\\ *\end{pmatrix}.\tag{2.2.20}$$

而(2.2.20)根据下面的引理和通常的消去法，是容易解出的．最后将零补到解出之$(Q'_{1p},*,\cdots,*,Q'_{p-1\,p})'$中去，就可以得到 $\tilde{Q}_{12}$，而这就是

所要证明的.

引理 1. 对于任何 $m\times n(n\geqslant m)$ 矩阵 $\mathscr{Z}$,秩为 m. 和 $m\times p$ 矩阵 $\mathscr{W}$,都存在 $n\times p$ 矩阵 A,使

$$\mathscr{Z}A=\mathscr{W}. \tag{2.2.21}$$

证:事实上,根据 Grassmann 流形的可递性,存在 $m\times m$ 的非异方阵 R 和 $n\times n$ 的非异方阵 B,使

$\mathscr{Z}=R(I,0)B=(R,0)B=(I,0)\begin{pmatrix}R&0\\0&I\end{pmatrix}B=(I,0)B_1$,其中 B_1 是 $n\times n$ 的非异方阵. 因而(2.2.21)为 $(I,0)B_1A=\mathscr{W}$,任取 $n\times p$ 矩阵 A_1,使 A_1 的前 m 行正好是 $\mathscr{W}$,那么令 $A=B_1^{-1}A_1$ 即可. 引理证毕.

回到群(2.2.18)来. 运动群(2.2.18)是复解析的,事实上,$\mathscr{Z}\to\mathscr{Z}Q$ 如果 $\pi(\mathscr{Z})\in M(\alpha)$,$\pi(\mathscr{Z}Q)\in M(\beta)$,则一方面 $\mathscr{Z}Q\sim(I,\mathscr{W})NP(\beta)$,而同时,$\mathscr{Z}Q\sim(I,Z)NP(\alpha)Q$. 因此,

$$R(I,\mathscr{W})NP(\beta)=(I,Z)NP(\alpha)Q,$$

$$R(I,\mathscr{W})=(I,Z)NP(\alpha)QP^{-1}(\beta)N^{-1}=(I,Z)\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}.$$

因为 $\det R\neq0$,故 $\det(A+ZC)\neq0$,所以

$$\mathscr{W}=(A+ZC)^{-1}(B+ZD) \tag{2.2.22}$$

对于 Z 是复解析的.

6.°当 $p>1$ 时它是非紧的,证明同[Lu7]. 定理证毕.

利用 $\mathscr{B}\begin{pmatrix}r_1,\cdots,r_p & k_1,\cdots,k_l\\ s_1,\cdots,s_p & \rho_1,\cdots,\rho_l\end{pmatrix}$ 及其适当定义的子流形,就可以得到[ZJY]中很多非对称域的扩充空间. 先以一个例子说明这点,由此可以看出一般的作法.

例 1 求 $\frac{1}{i}(Z-\overline{Z})-U\overline{U}'-\overline{U}U'>0$ 的扩充空间,其中

$$Z=Z'=\begin{pmatrix}Z_{11}&Z_{12}&Z_{13}&Z_{14}&Z_{15}\\Z_{12}'&Z_{22}&0&0&0\\Z_{13}'&0&Z_{33}&Z_{34}&Z_{35}\\Z_{14}'&0&Z_{34}'&Z_{44}&0\\Z_{15}'&0&Z_{35}'&0&Z_{55}\end{pmatrix},U=\begin{pmatrix}U_{11}&U_{12}\\0&0\\U_{31}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

我们取 $\mathscr{B}\begin{pmatrix}r_1,\cdots,r_7 & 2,4\\ s_1,\cdots,s_7 & 6,5\end{pmatrix}$,假定 $\pi(\mathscr{Z})\in M(\alpha_0)$,其中

$$
\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & r_1 \\ 1, & 2, & \cdots, & r_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1, & 2, & \cdots, & r_p \end{pmatrix},
$$

$$
\mathscr{Z} = \begin{pmatrix}
\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12} & \mathscr{Z}_{13} & \mathscr{Z}_{14} & \mathscr{Z}_{15} & \mathscr{Z}_{16} & \mathscr{Z}_{17} \\
 & \mathscr{Z}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathscr{Z}_{27} \\
 & & \mathscr{Z}_{33} & \mathscr{Z}_{34} & \mathscr{Z}_{35} & \mathscr{Z}_{36} & \mathscr{Z}_{37} \\
 & & & \mathscr{Z}_{44} & 0 & \mathscr{Z}_{46} & \mathscr{Z}_{47} \\
 & & & & \mathscr{Z}_{55} & \mathscr{Z}_{56} & \mathscr{Z}_{57} \\
 & & & & & \mathscr{Z}_{66} & \mathscr{Z}_{67} \\
 & & & & & & \mathscr{Z}_{77}
\end{pmatrix}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix}
(I, Z_{11}) & (0, Z_{12}) & (0, Z_{13}) & (0, Z_{14}), \cdots, & (0, Z_{17}) \\
 & (I, Z_{22}) & 0 & \cdots\cdots\cdots \; 0 & (0, Z_{27}) \\
 & & (I, Z_{33}) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (0, Z_{37}) \\
 & & & (I, Z_{44}), 0, * \cdots & * \\
 & & & \ddots & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & (I, Z_{77})
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
(I, Z_{11}) & (0, Z_{13}) & (0, Z_{14}) & (0, Z_{15}) & (0, Z_{17}) & (0, Z_{12}) & (0, Z_{16}) \\
 & (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0, Z_{27}) & (I, Z_{22}) & (0,0) \\
 & (I, Z_{33}) & (0, Z_{34}) & (0, Z_{35}) & (0, Z_{37}) & (0,0) & (0, Z_{36}) \\
 & & (I, Z_{44}) & (0,0) & (0, Z_{47}) & (0,0) & (0, Z_{46}) \\
 & & & (I, Z_{55}) & (0, Z_{57}) & (0,0) & (0, Z_{56}) \\
 & & & & (0, Z_{67}) & (0,0) & (I, Z_{66}) \\
 & & & & (I, Z_{77}) & (0,0) & (0,0)
\end{pmatrix} N_1
$$

$$
= \begin{pmatrix}
I & & & & & & & Z_{13} & Z_{11} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{17} & Z_{12} & Z_{16} \\
 & I & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{27} & Z_{22} & 0 \\
 & & I & & & & & Z_{33} & 0 & Z_{34} & Z_{35} & Z_{37} & 0 & Z_{36} \\
 & & & I & & & & 0 & 0 & Z_{44} & 0 & Z_{47} & 0 & Z_{46} \\
 & & & & I & & & 0 & 0 & 0 & Z_{55} & Z_{57} & 0 & Z_{56} \\
 & & & & & I & & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{67} & 0 & Z_{66} \\
 & & & & & & I & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{77} & 0 & 0
\end{pmatrix} N_2 N_1
$$

$$
=\begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} N_2 N_1, \tag{2.2.23}
$$

这里 R_{ij} 等表示相应位置的子块. N_1, N_2 是确定的两个置换方阵. 令 $N_3 = N_2 N_1$,

$$
H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

取 $H = N_3' H_0 N_3, J = N_3' J_0 N_3$, 则 $\mathscr{B}_H \left(\begin{matrix} r_1, & \cdots, & r_7 \\ s_1, & \cdots, & s_7 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2, & 4 \\ 6, & 5 \end{matrix}\right): \mathscr{Z}H\overline{\mathscr{Z}}' > 0$, 一定有 $\pi(\mathscr{Z}) \in M(\alpha_0)$, α_0 如上述. 因此 $\mathscr{B}_H$ 的点有局部坐标(2.2.23)的表示. 现在考虑 $\mathscr{B}_H \cap \mathscr{B}_J: \mathscr{Z}H\overline{\mathscr{Z}}' > 0, \mathscr{Z}J\mathscr{Z}' = 0$, 后者即:

$$
\begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} J_0 \begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}' = 0,
$$

即 $R_{13} = R_{13}', R_{12} = R_{23}', R_{33} = R_{11}', R_{22} = R_{22}'$.

前者即

$$
\begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} H_0 \overline{\begin{pmatrix} I & & & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & I & & 0 & R_{22} & R_{23} \\ & & I & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}}' > 0
$$

这就是

$$
\frac{1}{\mathrm{i}}\left[\begin{pmatrix} R_{13} & R_{12} \\ R_{23} & R_{22} \end{pmatrix} - \overline{\begin{pmatrix} R_{13} & R_{12} \\ R_{23} & R_{22} \end{pmatrix}}'\right] - \begin{pmatrix} R_{11} \\ 0 \end{pmatrix}(\overline{R}_{11}' \quad 0) - \begin{pmatrix} \overline{R}_{33}' \\ 0 \end{pmatrix}(R_{33} \quad 0) > 0, \tag{2.2.24}
$$

其中

$$R_{13}=R'_{13}=\begin{pmatrix}Z_{17}&Z_{12}&Z_{16}\\Z_{27}&Z_{22}&0\\Z_{37}&0&Z_{36}\end{pmatrix},$$

$$R_{12}=R'_{23}=\begin{pmatrix}Z_{14}&Z_{15}\\0&0\\Z_{34}&Z_{35}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z_{47}&0&Z_{46}\\Z_{57}&0&Z_{56}\end{pmatrix}',$$

$$R_{22}=R'_{22}=\begin{pmatrix}Z_{44}&0\\0&Z_{55}\end{pmatrix},$$

$$R_{11}=R'_{33}=\begin{pmatrix}Z_{13}&Z_{11}\\0&0\\Z_{33}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z_{67}&0&Z_{66}\\Z_{77}&0&0\end{pmatrix}'.$$

将此代入(2.2.24),换一组变量就得到

$$\frac{1}{i}\left[\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}&W_{13}&W_{14}&W_{15}\\W'_{12}&W_{22}&0&0&0\\W'_{13}&0&W_{33}&W_{34}&W_{35}\\W'_{14}&0&W'_{34}&W_{44}&0\\W'_{15}&0&W'_{35}&0&W_{55}\end{pmatrix}-\overline{\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}&W_{13}&W_{14}&W_{15}\\W'_{12}&W_{22}&0&0&0\\W'_{13}&0&W_{33}&W_{34}&W_{35}\\W'_{14}&0&W'_{34}&W_{44}&0\\W'_{15}&0&W'_{35}&0&W_{55}\end{pmatrix}}'\right]$$

$$-\begin{pmatrix}U_{11}&U_{12}\\0&0\\U_{31}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}U_{11}&U_{12}\\0&0\\U_{31}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}}'-\overline{\begin{pmatrix}U_{11}&U_{12}\\0&0\\U_{31}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}U_{11}&U_{12}\\0&0\\U_{31}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}'>0,$$

这就是本例所给的域,它实现为 $\mathscr{D}_J$ 中的超圆 $\mathscr{D}_{J\cap H}$,其中 J 与 H 由上面定义,这一个域属于[ZJY]中的 W_{II}.

注 如果只取 $\mathscr{D}_H$,则得到

$$\frac{1}{i}\left[\begin{pmatrix}R_{13}&R_{12}\\R_{23}&R_{22}\end{pmatrix}-\overline{\begin{pmatrix}R_{13}&R_{12}\\R_{23}&R_{22}\end{pmatrix}}'\right]-\begin{pmatrix}R_{11}\\0\end{pmatrix}(\overline{R}'_{11}\quad 0)$$

$$\begin{pmatrix}\overline{R}'_{33}\\0\end{pmatrix}(R_{33}\quad 0)>0, \qquad (2.2.25)$$

其中 R_{ij} 由(2.2.23)定义.(2.2.25)属于[ZJY]中之 W_{I}.

Ⅱ.2.2 现在我们来给出较一般的方法以推广上面的例子.仍然以 W_{II} 为例:

$$\frac{1}{\mathrm{i}}[Z-\overline{Z}]-U\overline{U}'-\overline{U}U'>0,\ Z=Z' \qquad (2.2.26)$$

其中

$$Z=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{13} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{ss} \end{bmatrix},\ Z_{ij}=0,i<j,i\neq k_1,\cdots,k_l,$$

$$1=k_1<k_2<\cdots<k_l<s.$$

为了讨论方便,取$(k_1,\cdots,k_l)=(1,3,\cdots,2l-1)$.其余情况也完全类似.(2.2.26)式中的

$$U=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & \cdots & U_{1,l-1} & U_{1l} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ U_{31} & U_{32} & \cdots & \cdots & U_{3,l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ U_{51} & U_{52} & \cdots & U_{5,l-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{2l-1,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

考虑矩阵:

$$\mathscr{A}(Z,U,V)=$$

$$\begin{bmatrix}
 & U_{11} & \cdots & \cdots & U_{1l} & Z_{1,2l} & \cdots & Z_{1s} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & \cdots & Z_{1,2l-1} \\
 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & Z_{21} & Z_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
I & U_{31} & \cdots & U_{3,l-1} & 0 & Z_{3,2l} & \cdots & Z_{3s} & \vdots & 0 & Z_{33} & \cdots & \cdots & Z_{3,2l-1} \\
 & 0 & \vdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & Z_{44} & 0\ \cdots & 0 \\
 & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\
 & U_{2l-1,1} & 0 & \cdots & 0 & Z_{2l-1,2l} & \cdots & Z_{2l-1,s} & Z_{2l-1,1} & 0 & Z_{3,2l-1} & 0 & \ddots & Z_{2l-1,2l-1} \\
 & & & & & Z_{2l,2l} & 0\ \cdots & 0 & Z_{2l,1} & 0 & Z_{2l,3} & 0 & * & Z_{2l,2l-1} \\
I & & 0 & & & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & 0 & 0 & Z_{ss} & Z_{s1} & 0 & Z_{s3} & 0 & * & Z_{s,2l-1} \\
 & & & & & & & & V_{11} & 0 & V_{13} & 0 & \vdots & V_{1,2l-1} \\
 & I & 0 & & & & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
 & & & & & & & & \vdots & \vdots & V_{2l-3,3} & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & V_{2l-1,1} & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0
\end{bmatrix}$$

(2.2.27)

把 $\mathscr{A}(Z,U,V)$ 作一次列调换，按 $U_{1l},Z_{22},U_{3,l-1},Z_{44},U_{5,l-2},Z_{66},\cdots,U_{2l-1,1},Z_{2l\,2l},Z_{2l+1\,2l+1},\cdots,Z_{ss},Z_{11},Z_{33},\cdots,Z_{2l-1\,2l-1}$ 所在的列，顺序排好，对角线元素 $U_{1l},Z_{22},\cdots,Z_{ss},V_{1l},V_{3l-1},\cdots,V_{2l-11}$ 都换以 $(I,U_{1l}),(I,Z_{22}),\cdots,(I,V_{2l-1,1})$ 而其余元素 U_{12},Z_{12} 等都换以 $(0,U_{12}),(0,Z_{12})$ 等等. 则

$$\mathscr{A}(Z,U,V)=$$

$$\begin{pmatrix}
(I,U_{1l}) & (0,U_{12}) & (0,U_{1,l-1}) & (0,Z_{34}) & \cdots & (0,U_{11}) & (0,Z_{1\,2l}) & \cdots & (0,Z_{1s}) & (0,Z_{1\,2l-1}) & \cdots & (0,Z_{11}) \\
 & (I,Z_{22}) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (0,Z_{21}) \\
 & & (I,U_{3,l-1}) & (0,Z_{34}) & \cdots & (0,U_{31}) & (0,Z_{3\,2l}) & \cdots & (0,Z_{3s}) & (0,Z_{3\,2l-1}) & \cdots & (0,Z_{31}) \\
 & & & (I,Z_{44}) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (0,Z_{41}) \\
 & & & & \ddots & (0,U_{2l-1\,1}) & (0,Z_{2l-1\,2l}) & \cdots & \cdots & \cdots & & (0,Z_{2l-1\,1}) \\
 & & & & & & (I,Z_{2l\,2l}) & 0 & \cdots\ 0 & (0,Z_{2l\,2l-1}) & \cdots & (0,Z_{2l\,1}) \\
 & & & & & & \ddots & 0 & \cdots\ 0 & (0,Z_{2l+1\,2l-1}) & \cdots & (0,Z_{2l+1\,1}) \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots\ \vdots\ 0 & \vdots & \vdots & \cdots \\
 & & 0 & & & & & & (I,Z_{ss}) & (0,Z_{s\,2l-1}) & \cdots & (0,Z_{s1}) \\
 & & & & & & & & & (I,V_{1l}) & \cdots & (0,V_{11}) \\
 & & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & (I,V_{2l-1\,1})
\end{pmatrix} N$$

(2.2.28)

用齐次坐标来写，(2.2.28) 可书为

$$\begin{pmatrix}
\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12} & \mathscr{Z}_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathscr{Z}_{1\,2l} & \cdots & \cdots & \mathscr{Z}_{1s} & \cdots & \cdots & \mathscr{Z}_{1\,s+l} \\
 & \mathscr{Z}_{22} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \mathscr{Z}_{2\,s+l} \\
 & & \mathscr{Z}_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathscr{Z}_{3\,2l} & \cdots & \cdots & \mathscr{Z}_{3s} & \cdots & \cdots & \mathscr{Z}_{3\,s+l} \\
 & & & \mathscr{Z}_{44} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \mathscr{Z}_{4\,s+l} \\
 & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \ddots & \mathscr{Z}_{2l\,2l} & 0 & \cdots & 0 & \mathscr{Z}_{2l\,s+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{2l\,s+l} \\
 & & & & & & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \mathscr{Z}_{2l+1\,s+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{2l+1\,s+l} \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots\ 0 & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \ddots & \mathscr{Z}_{ss} & \mathscr{Z}_{s\,s+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{s\,s+l} \\
 & & & & & & & & & & \mathscr{Z}_{s+1\,s+1} & \cdots & \mathscr{Z}_{s+1\,s+l} \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & \mathscr{Z}_{s+l\,s+l}
\end{pmatrix}.$$

因此，我们自然地考虑流形

$$\mathscr{B}\begin{bmatrix} r_1,\cdots,r_{s+l} & 2, & 4, & \cdots, & 2l, & 2l+1, & \cdots, s \\ s_1,\cdots,s_{s+l} & s+l-1, & s+l-1, & \cdots, & s, & s, & \cdots, s \end{bmatrix},$$

令 $\mathscr{Z}$ 为上一矩阵的形式，我们有

$$\mathscr{Z} = R\begin{pmatrix} (I,U_{1l}) & (0,Z_{12}) & \cdots & \cdots & \cdots & (0,Z_{11}) \\ & (I,Z_{22}) & 0 & \cdots & 0 & (0,Z_{21}) \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & (I,V_{2l-1\,1}) \end{pmatrix}$$

$$= R\mathscr{A}(Z,U,V)N, \tag{2.2.29}$$

因此，令 $H = N'H_0N, J = N'J_0N$ 其中 N 由(2.2.28)、(2.2.29)定义，

$$H_0 = \begin{pmatrix} & & & & & \mathrm{i}I \\ & & & & \mathrm{i}I & \\ & & & I & & \\ & & & & -I & \\ & -\mathrm{i}I & & & & \\ \mathrm{i}I & & & & & \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} & & & & & I \\ & & & & I & \\ & & & I & & \\ & & I & & & \\ & -I & & & & \\ -I & & & & & \end{pmatrix},$$

则 $\mathscr{Z} \in \mathscr{B}_J \cap \mathscr{B}_H$ 就有 $\mathscr{A}(Z,U,V)NHN'\overline{\mathscr{A}(Z,U,V)}' > 0$, (2.2.30)

$$\mathscr{A}(Z,U,V)NHN'\mathscr{A}(Z,U,V)' = 0, \tag{2.2.31}$$

将(2.2.27)写成 $\mathscr{A}(Z,U,V) = \begin{pmatrix} I & & & U & Z_{12} & Z_{11} \\ & I & & 0 & Z_{22} & Z_{23} \\ & & I & 0 & 0 & V \end{pmatrix}$.

则由(2.2.31)得到 $Z_{11} = Z'_{11}, Z_{22} = Z'_{22}, Z_{12} = Z'_{23}, U = V'$，而(2.2.30)即

$$\frac{1}{\mathrm{i}}(Z - \overline{Z}') - U\overline{U}' - V'\overline{V} > 0,$$

其中

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{23} & Z_{22} \end{pmatrix},$$

用上面对称条件代入就有

$$\frac{1}{\mathrm{i}}(Z - \overline{Z}) - U\overline{U}' - \overline{U}U' > 0. \tag{2.2.32}$$

其中

$$Z=\begin{pmatrix}
Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & \cdots & \cdots & Z_{1\,2l-1} & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{1s}\\
Z'_{12} & Z_{22} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\vdots & 0 & Z_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{3\,2l-1} & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{3s}\\
\vdots & \vdots & \vdots & Z_{44} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & Z_{2l-1\,2l-1} & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{2l-1\,s}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & Z_{2l\,2l} & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\
Z'_{1s} & 0 & Z'_{3s} & 0 & \vdots & \vdots & Z'_{2l-1\,s} & 0 & & & Z_{ss}
\end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix}
U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1\,l-2} & U_{1\,l-1} & U_{1l}\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
U_{31} & U_{32} & \cdots & \cdots & U_{3\,l-1} & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
U_{51} & U_{52} & \cdots & U_{5\,l-2} & 0 & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
U_{2l-1\,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}.$$

Ⅱ.2.3 本节考虑更一般的扩充空间的构造法.

考虑一组方阵集合 $L_1,L_2,\cdots,L_k$.每个 L_i 都是线性群的一个子群.也就是说,$A,B\in L_i$,则 $AB\in L_i$,$A^{-1}\in L_i$.

对于 $A_i\in L_i$,取 A_{ij},使下面的方阵

$$A=\begin{pmatrix}
A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1k}\\
 & A_2 & \cdots & A_{2k}\\
 & & \ddots & \\
 & 0 & & A_k
\end{pmatrix}$$

也组成一个群.这样的 $A_{ij}(i<j)$称为和 $L_1,\cdots,L_k$ 相配.例如,$L_1,\cdots,L_k$ 是通常的上三角方阵群,则任意的 A_{ij}就和 $L_1,\cdots,L_k$ 相配.再如

$$L_1=\left\{\begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & 0 \\ & & * \end{pmatrix}\right\},\quad L_2=\left\{\begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & 0 \\ & & * \end{pmatrix}\right\},$$

则 A_{12}取成

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \text{型或} \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{型}$$

都和 L_1, L_2 相配，事实上，这是因为

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & * & * & * & * \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & 0 \\ & & & & & * \end{bmatrix}.$$

型的方阵成为线性群的一个子群．再例如

$$L_1 = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & 0 \\ & & * \end{bmatrix} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{则 } A_{12} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

就和 L_1, L_2 相配．因为，如果 $\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_{12} \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$，

则易见有
$$C_{12} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}.$$

现在我们对 m 阶矩阵群的子群 L 和一个置换方阵所成群中的子群 $P(L)$，联系一矩阵集合 $\tilde{L}$ 具如下性质：

$\mathscr{Y} \in \tilde{L}$，存在 $N \in P(L)$，使 $\mathscr{Y} = (\mathscr{Y}_1, \mathscr{Y}_2)N$，而 $\mathscr{Y}_1 \in L$，并且对任何 $R \in L$，都有 $R\mathscr{Y} \in \tilde{L}$． (2.2.33)

例如

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} Z_{11} & * & * \\ & Z_{22} & 0 \\ & & Z_{13} \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{则 } \tilde{L} = \begin{bmatrix} \mathscr{Y}_{11} & \mathscr{Y}_{12} & \mathscr{Y}_{13} \\ 0 & \mathscr{Y}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathscr{Y}_{33} \end{bmatrix}.$$

其中 $\mathscr{Y}_{ii}$ 的秩同其行数．同理，

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & 0 \\ * & Z_{22} & 0 \\ * & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \right\} \to \tilde{L} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathscr{Y}_{11} & 0 & 0 \\ \mathscr{Y}_{21} & \mathscr{Y}_{22} & 0 \\ \mathscr{Y}_{31} & 0 & \mathscr{Y}_{33} \end{bmatrix} \right\}.$$

现在我们对上面所叙述的系统 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_k$ 作下面的矩阵集合 $E(\tilde{L}_1, \cdots, \tilde{L}_k)$：

$$
\mathscr{Y}=\begin{pmatrix}
\widetilde{\mathscr{Y}}_{11} & \mathscr{Y}_{12} & \cdots & \mathscr{Y}_{1k} \\
 & \widetilde{\mathscr{Y}}_{22} & \cdots & \mathscr{Y}_{2k} \\
 & & \ddots & \vdots \\
0 & & & \widetilde{\mathscr{Y}}_{kk}
\end{pmatrix}. \tag{2.2.34}
$$

其中 $\widetilde{\mathscr{Y}}_{ii}\in\widetilde{L}_i(i=1,\cdots,k)$，而 $\mathscr{Y}_{12},\cdots,\mathscr{Y}_{1k},\cdots,\mathscr{Y}_{k-1\,k}$ 是和 $\widetilde{L}_1,\cdots,\widetilde{L}_k$ 相配的．

根据 $\widetilde{L}_i$ 的定义(2.2.33)，有

$$
\mathscr{Y}=\begin{pmatrix}
(\mathscr{Y}_{11}^1,\mathscr{Y}_{11}^2)N_1 & (\widetilde{\mathscr{Y}}_{12}^1,\mathscr{Y}_{12}^2)N_2 & \cdots & (\widetilde{\mathscr{Y}}_{1k}^1,\mathscr{Y}_{1k}^2)N_k \\
 & (\mathscr{Y}_{22}^1,\mathscr{Y}_{22}^2)N_2 & \cdots & (\mathscr{Y}_{2k}^1,\mathscr{Y}_{2k}^2)N_k \\
 & & \ddots & \vdots \\
 & & & (\mathscr{Y}_{kk}^1,\mathscr{Y}_{kk}^2)N_k
\end{pmatrix},\ N_i\in P(L_i).
$$

在 $E(\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2,\cdots,\widetilde{L}_k)$之中引进等价关系

$$
\mathscr{Y}_1\sim\mathscr{Y}_2\Leftrightarrow\mathscr{Y}_2=\widetilde{P}\mathscr{Y}_1,\ \widetilde{P}=\begin{pmatrix}
\widetilde{P}_{11} & \widetilde{P}_{12} & \cdots & \widetilde{P}_{1k} \\
 & \widetilde{P}_{22} & \cdots & \widetilde{P}_{2k} \\
 & & \ddots & \vdots \\
 & & & \widetilde{P}_{kk}
\end{pmatrix}, \tag{2.2.35}
$$

其中 $\widetilde{P}_{ii}\in L_i$，$\widetilde{P}_{12},\cdots,\widetilde{P}_{1k},\cdots,\widetilde{P}_{k-1\,k}$ 和 $\mathscr{Y}_{12}^1,\cdots,\mathscr{Y}_{k-1\,k}$ 相同形式，即和 $L_1,\cdots,L_k$ 是相配的．

$\mathscr{Y}$ 的等价类以 $\pi(\mathscr{Y})$ 表之，全体 $\pi(\mathscr{Y})$ 的集合记以 $\mathscr{B}(\widetilde{L}_1,\cdots,\widetilde{L}_k)$．则有

定理 2． $\mathscr{B}(\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2,\cdots,\widetilde{L}_k)$是一个复流形．

证：1．$\mathscr{Y}$ 作为复欧氏空间中矩阵的集合，由于诸 $\mathscr{Y}_{ii}$ 的秩是满的，故是开集．$\mathscr{Y}\mapsto\pi(\mathscr{Y})$这个投射是开映射．其次，设 O 是 $\mathscr{B}(\widetilde{L}_1,\cdots,\widetilde{L}_k)$中开集，按定义 $E(\widetilde{L}_1,\cdots,\widetilde{L}_k)$中开集使 $\pi(B)=O$，则 $\pi^{-1}(O)=\sum_{\widetilde{P}}\widetilde{P}O$，其 $\widetilde{P}$ 跑遍(2.2.35)定义的矩阵，是一个开集，由此 π 是连续的．

2．局部坐标系由 $N_1,N_2,\cdots,N_k$ 标志，这里 $N_i\in P(L_i)$．$\mathscr{Y}$ 属于坐标邻域 $M(N_1,\cdots,N_k)$，如果 $\widetilde{\mathscr{Y}}_{ii}=(\widetilde{\mathscr{Y}}_{ii}^1,\widetilde{\mathscr{Y}}_{ii}^2)N_i$，$\widetilde{\mathscr{Y}}_{ii}^1\in L_i$．$M(N_1,\cdots,N_k)$中的局部坐标定义为

$$
\begin{pmatrix}
\widetilde{\mathscr{Y}}_{11}^1 & \cdots & \widetilde{\mathscr{Y}}_{1k}^1 \\
0 & \ddots & \vdots \\
 & & \widetilde{\mathscr{Y}}_{kk}^1
\end{pmatrix}^{-1}
\begin{pmatrix}
\widetilde{\mathscr{Y}}_{11}^2 & \cdots & \widetilde{\mathscr{Y}}_{1k}^2 \\
0 & \ddots & \vdots \\
 & & \widetilde{\mathscr{Y}}_{kk}^2
\end{pmatrix}=\widetilde{Z}. \tag{2.2.36}
$$

因此，

$$\mathscr{Z}=\begin{pmatrix}\tilde{\mathscr{Z}}_{11}^{1} & \cdots & \tilde{\mathscr{Z}}_{1k}^{1}\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & \tilde{\mathscr{Z}}_{kk}^{1}\end{pmatrix}(I,\tilde{Z})N_0N. \qquad (2.2.37)$$

这里 N_0 是一个固定的排列方阵，而 $N=[N_1,\cdots,N_k]$. 由于 $\mathscr{Z}_{ii}\in\tilde{L}_i$(定义(2.2.33))，故

$$(I,\ \tilde{Z})N_0N=\begin{pmatrix}(I,\ \tilde{Z}_{11}) & & \cdots & (0,\ \tilde{Z}_{1k})\\ & (I,\ \tilde{Z}_{22}) & \cdots & (0,\ \tilde{Z}_{2k})\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & (I,\ \tilde{Z}_{kk})\end{pmatrix}\in E(\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k).$$

而局部坐标变换的复解析性可如定理 1 那样证之.

3. Hausdorff 性的证明同定理 1.

定理 2 证毕.

如果我们不对群 $L_1,L_2,\cdots,L_k$ 及相应的 $\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k$ 作进一步的假定，那么 $\mathscr{B}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2,\cdots,\tilde{L}_k)$ 的齐性是难以看出的. 但正如我们下面所讨论的，在常见的情形下它都是齐性的. 适当地选取 $L_1,\cdots,L_k$ 及 $\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k$ 可以使我们得到[ZJY]中几乎所有的非对称域的扩充空间，而只有[ZJY]中的第一类 Siegel 域 $S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}$ 等尚需在 $\mathscr{B}(\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k)$ 的基础上加以变化.

考虑类似于 $E(\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k)$ 的 $E_0(\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k)$:

$$\mathscr{Z}=\begin{pmatrix}\tilde{\mathscr{Z}}_{11} & \tilde{\mathscr{Z}}_{12} & \cdots & \tilde{\mathscr{Z}}_{1k}\\ & \tilde{\mathscr{Z}}_{22} & \cdots & \tilde{\mathscr{Z}}_{2k}\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & \tilde{\mathscr{Z}}_{kk}\end{pmatrix},$$

其中 $\mathscr{Z}_{ii}\in\tilde{L}_i(i\neq1,k)$，至于 $\tilde{\mathscr{Z}}_{11},\tilde{\mathscr{Z}}_{kk}$ 为

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathscr{Z}}_{11}=(\tilde{\mathscr{Z}}_{11}^{1},0)N_1,\quad N_1\in P(L_1),\tilde{\mathscr{Z}}_{11}^{1}\in L_1,\\ &\tilde{\mathscr{Z}}_{kk}=(\tilde{\mathscr{Z}}_{kk}^{1},0)N_k),\quad N_k\in P(L_k),\tilde{\mathscr{Z}}_{kk}^{1}\in L_k.\end{aligned}\qquad(2.2.38)$$

这种形式的 $E_0(\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k)$ 在等价关系

$$\mathscr{Z}_1\sim\mathscr{Z}_2\iff\mathscr{Z}_2=\tilde{P}\mathscr{Z}_1,\ \tilde{P}=\begin{pmatrix}\tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} & \cdots & \tilde{P}_{1k}\\ & \tilde{P}_{22} & \cdots & \tilde{P}_{2k}\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & \tilde{P}_{kk}\end{pmatrix},\ P_{ii}\in L_i$$

(2.2.39)

下面和定理 2 一样证明也成为一个复流形. 并且在我们下面要遇到的情

况下都是可递的．这个复流形我们记为 $\mathscr{B}_0(\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k)$．

下面我们利用 $\mathscr{B}(\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k)$和 $\mathscr{B}_0(\tilde{L}_1,\cdots,\tilde{L}_k)$来得出[ZJY]中绝大多数的非对称域的扩充空间．我们将用一些代表性的非对称域的例子来说明，例子的作法已经包含了一般情况下的全部要点．

例 2 求 W_I 的扩充空间．

$$W_I:\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')-U\bar{U}'-\bar{V}V'>0,$$

其中

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s}\\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{ss}\end{pmatrix},\quad \begin{matrix} Z_{k_ij}=0\\ Z_{jk_i}=0\end{matrix},\quad j>k_i,\ 1<k_1<k_2<\cdots<k_l<s$$

$$U=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1s}\\ & U_{22} & \cdots & U_{2s}\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & U_{ss}\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1s}\\ & V_{22} & \cdots & V_{2s}\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & V_{ss}\end{pmatrix},\qquad(2.2.40)$$

$$U_{k_ij}=0,\ V_{k_ij}=0,\ j>k_i,\ i=1,2,\cdots,l.$$

严格写来(2.2.40)需加上分块的阶数，但它在今后的讨论中不起本质作用，我们将其略去．以后也将同样这样做．

取流形 $\mathscr{B}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$，其中

$$L_1=\begin{pmatrix} *_{11} & *_{12} & \cdots & *_{1s}\\ & *_{22} & \cdots & *_{2s}\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & *_{ss}\end{pmatrix},\quad *_{k_ij}=0,\ j>k_i,$$

$$i=1,2,\cdots,l,\ \det(*_{ii})\neq 0,$$

$$L_2=\begin{pmatrix} *_{11} & & 0 & \\ \vdots & *_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ *_{s1} & *_{s2} & & *_{ss}\end{pmatrix},\quad *_{jk_i}=0,\ j>k_i,$$

$$i=1,2,\cdots,l,\ \det(*_{ii})\neq 0,$$

显然，L_1,L_2 都成群．下面的矩阵和 L_1、L_2 相配

$$\begin{pmatrix} *_{11} & \cdots & *_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ *_{s1} & \cdots & *_{ss}\end{pmatrix},\ *_{k_ij}=0,\ *_{jk_i}=0,\ j>k_i,\ i=1,2,\cdots,l.$$

复流形 $\mathscr{B}(\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2)$可以写为

$$\mathscr{Z}=\begin{pmatrix}\widetilde{\mathscr{Z}}_{11} & \widetilde{\mathscr{Z}}_{12}\\ 0 & \widetilde{\mathscr{Z}}_{22}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathscr{Z}}_{11}=\begin{pmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12} & \cdots & \mathscr{Z}_{1s}\\ & \mathscr{Z}_{22} & \cdots & \mathscr{Z}_{2s}\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & \mathscr{Z}_{ss}\end{pmatrix}\in\widetilde{L}_1,\quad \widetilde{\mathscr{Z}}_{22}=\begin{pmatrix}w_{11} & & & \\ \vdots & w_{22} & & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ w_{s1} & w_{s2} & \cdots & w_{ss}\end{pmatrix}\in\widetilde{L}_2$$

$$\mathscr{Z}_{kj}=0,\ j>k_i,\qquad\qquad w_{jk_i}=0,\ j>k_i$$

$$\widetilde{\mathscr{Z}}_{12}=\begin{pmatrix}x_{11} & \cdots & x_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{s1} & \cdots & x_{ss}\end{pmatrix},\quad x_{kj}=0,\quad x_{jk_i}=0,\quad j>k_i.$$

在第一个坐标邻域之中

$$\mathscr{Z}=\begin{pmatrix}\left(I,\ \begin{matrix}U_{11} & \cdots & U_{1s}\\ \ddots & & \vdots\\ 0 & \ddots & \vdots\\ & & U_{ss}\end{matrix}\right) & \left(0,\ \begin{matrix}Z_{11} & \cdots & Z_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ Z_{s1} & \cdots & Z_{ss}\end{matrix}\right)\\ (0,\ 0) & \left(I,\ \begin{matrix}V_{11} & & \\ \vdots\ \ddots & & 0\\ \vdots & \ddots & \\ V_{s1} & \cdots & V_{ss}\end{matrix}\right)\end{pmatrix}N,\qquad(2.2.41)$$

其中 $U_{kj}=0, V_{jk_i}=0, Z_{kj}=0, Z_{jk_i}=0, j>k_i, i=1,2,\cdots,l$.

(2.2.41)也可以写作

$$\mathscr{Z}=R\begin{pmatrix}I & 0 & U & Z\\ 0 & I & 0 & V'\end{pmatrix}N_0$$

N_0 是某一固定的排列方阵．取 $H=N'_0H_0N_0$,

$$H_0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \mathrm{i}I\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & -I & 0\\ -\mathrm{i}I & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $\mathscr{B}_H$ 就有：$\frac{1}{\mathrm{i}}(Z-Z')-U\overline{U}'-\overline{V}V'>0$,这就是(2.2.40)所要讨论的．因此复流形 $\mathscr{B}(\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2)$就是域(2.2.40)的扩充空间．下面证明流形 $\mathscr{B}(\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2)$是齐性的．其运动群为

$$\mathscr{Z}=\begin{pmatrix}\tilde{\mathscr{Z}}_{11} & \tilde{\mathscr{Z}}_{12}\\ 0 & \tilde{\mathscr{Z}}_{22}\end{pmatrix}\to\mathscr{Z}Q,\quad Q=\begin{pmatrix}\tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12}\\ 0 & \tilde{Q}_{22}\end{pmatrix},\tag{2.2.42}$$

$$\tilde{Q}_{11}=\begin{pmatrix}Q_{11} & \cdots & Q_{1s}\\ 0 & \ddots & \vdots\\ & & Q_{ss}\end{pmatrix},\ \tilde{Q}_{22}=\begin{pmatrix}P_{11} & & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{s1} & \cdots & P_{ss}\end{pmatrix},\ \tilde{Q}_{12}=\begin{pmatrix}R_{11} & \cdots & R_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ R_{s1} & \cdots & R_{ss}\end{pmatrix},$$

满足 $Q_{k_j}=0, P_{ik_i}=0, R_{k_j}=0, R_{ik_i}=0,\ j>k_i,\ i=1,2\cdots,l$. $\det Q_{ii}\neq 0$, $\det P_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,s$.

要证 $\mathscr{B}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$在(2.2.42)下是齐性的,即对任两点 $\mathscr{Z}, w\in E(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$都要找到(2.2.42)之 Q 使

$$\mathscr{Z}Q=w.\tag{2.2.43}$$

(2.2.43)分块写出就是

$$\tilde{\mathscr{Z}}_{11}\tilde{Q}_{11}=\tilde{w}_{11},\ \tilde{\mathscr{Z}}_{22}\tilde{Q}_{22}=\tilde{w}_{22},\ \tilde{\mathscr{Z}}_{11}\tilde{Q}_{12}+\tilde{\mathscr{Z}}_{12}\tilde{Q}_{22}=\tilde{w}_{12}.$$

$\tilde{\mathscr{Z}}_{11}\tilde{Q}_{11}=\tilde{w}_{11}$之可解已在定理1中证明,同样的理由对 $\tilde{\mathscr{Z}}_{22}\tilde{Q}_{22}=\tilde{w}_{22}$之可解亦成立. 问题归结为找 $\tilde{Q}_{12}$使

$$\tilde{\mathscr{Z}}_{11}\tilde{Q}_{12}=\tilde{w}_{12}-\tilde{\mathscr{Z}}_{12}\tilde{Q}_{22},\tag{2.2.44}$$

这里 $\tilde{\mathscr{Z}}_{12},\tilde{\mathscr{Z}}_{11},\tilde{w}_{12},\tilde{Q}_{12},\tilde{Q}_{22}$都必须满足(2.2.42)所示之形状. 一般(2.2.44)之可解可借助于归纳法,但是较繁. 我们用下面的简单例子说明证明的实质.

例如

$$\tilde{\mathscr{Z}}_{11}=\begin{pmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12} & \mathscr{Z}_{13}\\ 0 & \mathscr{Z}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \mathscr{Z}_{33}\end{pmatrix},\ \tilde{Q}_{12}=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{13}\\ Q_{21} & Q_{22} & 0\\ Q_{31} & 0 & Q_{33}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{w}_{12}-\tilde{\mathscr{Z}}_{12}\tilde{Q}_{22}=\begin{pmatrix}*_{11} & *_{12} & *_{13}\\ *_{21} & *_{22} & 0\\ *_{31} & 0 & *_{33}\end{pmatrix},$$

那么(2.2.44)成为

$$(\mathscr{Z}_{33}Q_{31},0,\mathscr{Z}_{33}Q_{33})=(*_{31},0,*_{33}),$$

$$(\mathscr{Z}_{22}Q_{21},\mathscr{Z}_{22}Q_{22},0)=(*_{21},*_{22},0),$$

$$(\mathscr{Z}_{11}\mathscr{Z}_{12}\mathscr{Z}_{13})\begin{pmatrix}Q_{11}\\ Q_{21}\\ Q_{31}\end{pmatrix}=*_{11},\ (\mathscr{Z}_{11},\mathscr{Z}_{12},\mathscr{Z}_{13})\begin{pmatrix}Q_{12}\\ Q_{22}\\ 0\end{pmatrix}=*_{12},$$

$$(\mathscr{Z}_{11},\mathscr{Z}_{12},\mathscr{Z}_{13})\begin{pmatrix}Q_{13}\\0\\Q_{33}\end{pmatrix}=*_{13},$$

因为 $\mathscr{Z}_{11},\mathscr{Z}_{22},\mathscr{Z}_{33}$的秩同其行数，应用定理 1 中之引理立可得到 $\widetilde{Q}_{12}$之可解．因此$\mathscr{B}(\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2)$是齐性复流形．

注意，这里只是以 W_{I} 为例，要求 W_{II}，W_{III} 的相应扩充空间，只要再同样讨论 $\mathscr{B}_J(\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2)$，$J$ 是适当的斜对称方阵就可以了．

例 3 求

$$\frac{1}{2i}\left[\begin{pmatrix}Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n}\\ Z'_{12} & Z_{22} & & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \\ Z'_{1n} & & & Z_{nn}\end{pmatrix}-\overline{\begin{pmatrix}Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n}\\ Z'_{12} & Z_{22} & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0\\ Z'_{1n} & & & Z_{nn}\end{pmatrix}}\right]>0$$

的扩充空间．

取复流形

$$\mathscr{Z}=\begin{pmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathscr{Z}_{1n+1}\\ & \mathscr{Z}_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathscr{Z}_{2n+1}\\ & & \mathscr{Z}_{33} & 0 & \cdots & 0 & \mathscr{Z}_{3n+1}\\ & 0 & & \ddots & & & \vdots\\ & & & & \ddots & & \vdots\\ & & & & & \ddots & \vdots\\ & & & & & & \mathscr{Z}_{n+1\,n+1}\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\1\\1\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\qquad(2.2.45)$$

$$\begin{matrix}2 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & 2\end{matrix}$$

其中 $\mathscr{Z}_{11}=(\mathscr{Z}_{11}^1,0)$，$\mathscr{Z}_{n+1\,n+1}=(\mathscr{Z}_{n+1\,n+1}^1,0)$，$\mathscr{Z}_{11}^1\neq0$，$\mathscr{Z}_{n+1\,n+1}^1\neq0$．$\mathscr{Z}_{ij}$都是 1×2 而秩为 1 的向量．等价关系

$$\mathscr{Z}_1\sim\mathscr{Z}_2,\ \mathscr{Z}_2=P\mathscr{Z}_1,\ P=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{1\,n+1}\\ & P_{22} & 0 & \cdots & 0 & P_{1\,n+1}\\ & & \ddots & & & \vdots\\ & & & \ddots & & \vdots\\ & & & & \ddots & \vdots\\ & & & & & P_{n+1\,n+1}\end{pmatrix},$$

这就是上面所叙述的复流形 $\mathscr{B}_u(\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2,\widetilde{L}_3)$，其中 L_1，L_3 是非零复数乘法群，而 L_2 是下述矩阵组成的子群：

$$\begin{pmatrix} * & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ & * & & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & & * & 0 \\ & & & & & * \end{pmatrix}.$$

回到(2.2.45),

$$\mathscr{Y}=\begin{pmatrix} \mathscr{Y}_{11}^1 & \mathscr{Y}_{12}^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathscr{Y}_{1\,n+1}^1 & 0 & \mathscr{Y}_{12}^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathscr{Y}_{1\,n+1}^2 \\ & \mathscr{Y}_{22}^1 & 0 & \cdots & 0 & \mathscr{Y}_{2\,n+1}^1 & & \mathscr{Y}_{22}^2 & 0 & \cdots & 0 & \mathscr{Y}_{2\,n+1}^2 \\ & & \ddots & & & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \mathscr{Y}_{n+1\,n+1}^1 & & & & & & 0 \end{pmatrix} N,$$

取 $H-N'H_0N$,

$$H_0-\begin{pmatrix} & & & & & \mathrm{i} \\ & & & & \mathrm{i}I & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & -\mathrm{i}I & & & & \\ -\mathrm{i} & & & & & \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ n \\ 1 \\ 1 \\ n \\ 1 \end{matrix}$$

则 $\mathscr{Y}H\bar{\mathscr{Y}}'>0$ 的点,易证 $\mathscr{Y}N'$ 的前 $n+1$ 列子式不等于零,即超圆 $\mathscr{B}_H$ 的点全部落在第一个坐标邻域之中,用局部坐标写就是

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 & Z_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{1\,n+1} \\ & \ddots & & & & & Z_{22} & 0 & \cdots & 0 & Z_{2\,n+1} \\ & & \ddots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & & Z_{nn} & Z_{n\,n+1} \\ & & & & & 1 & & & & & 0 \end{pmatrix} H_0.$$

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 & Z_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{1\,n+1} \\ & \ddots & & & & & Z_{22} & 0 & \cdots & 0 & Z_{2\,n+1} \\ & & \ddots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & & Z_{nn} & Z_{n\,n+1} \\ & & & & & 1 & & & & & 0 \end{pmatrix}}' > 0,$$

也就是

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\begin{pmatrix} Z_{1\,n+1} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{2\,n+1} & Z_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ Z_{n\,n+1} & 0 & & Z_{nn} \end{pmatrix} - \overline{\begin{pmatrix} Z_{1\,n+1} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{2\,n+1} & Z_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ Z_{n\,n+1} & 0 & & Z_{nn} \end{pmatrix}}'\right] > 0.$$

如果考虑 $\mathscr{R}_{HJ}$，$H = N'H_0N$，而 J 由

$$J = N'J_0N,\ J_0 = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & I & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & I & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ n \\ 1 \\ 1 \\ n \\ 1 \end{matrix}$$

定义，则 $\mathscr{Z}J\mathscr{Z}' = 0$，就有 $(Z_{12},\cdots,Z_{1n}) = (Z_{2\,n+1},\cdots,Z_{n\,n+1})$. 因此，$\mathscr{R}_J$ 就是所求的扩充空间.

例 4 求一般的 $S_{\mathrm{I}}(S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}})$ 的扩充空间.

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z - \bar{Z}') > 0,\ Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{s1} & & Z_{ss} \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} Z_{k_t j} = 0,\ Z_{jk_t} = 0,\ j > k_t \\ 1 < k_1 < k_2 < \cdots < k_l < s. \end{matrix} \tag{2.2.46}$$

事实上，无妨设 $k_l = s-1$，因为否则就把 $Z_{s-1,s-1}, Z_{ss}, Z_{s-1,s}, Z_{s,s-1}$ 合成一块. 沿对角线从 Z_{ss} 往上，第一个遇到的不在 $k_1,\cdots,k_l$ 中的数（除 s 外）假定是 j_0，即

$$
Z=\begin{pmatrix}
Z_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots Z_{1s} \\
\vdots & Z_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & Z_{j_0j_0} & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{j_0s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & Z_{j_0+1\,j_0+1} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
Z_{s1} & * & \vdots & & Z_{sj_0} & 0 & \cdots & \cdots & Z_{ss}
\end{pmatrix}
$$

现在我们取复流形 $\mathscr{H}_0(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2,\tilde{L}_3)$,其中

$$
L_1=\begin{pmatrix}
*_{11} & \cdots & \cdots & *_{1j_0} \\
 & *_{22} & \cdots & *_{2j_0} \\
 & & \ddots & \vdots \\
0 & & & *_{j_0j_0}
\end{pmatrix},\quad *_{kj}=0,\ j>k_i,\ k_i<j_0,
$$

$$
L_2=\begin{pmatrix}
*_{j_0+1\,j_0+1} & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & *_{ss}
\end{pmatrix},
$$

$$
L_3=\begin{pmatrix}
\tilde{*}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \tilde{*}_{22} & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\tilde{*}_{j_01} & \tilde{*}_{j_02} & \cdots & \tilde{*}_{j_0j_0}
\end{pmatrix},\ \tilde{*}_{jk_i}=0,\ j>k_i,\ k_i<j_0.
$$

如果 $\mathscr{Z}N'$ 的前面方阵非异,则

$$
\mathscr{Z}\sim\begin{pmatrix}
I & & & 0 & \tilde{Z}_{12} & \tilde{Z}_{11} \\
 & I & & 0 & \tilde{Z}_{22} & \tilde{Z}_{21} \\
 & & I & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}N, \tag{2.2.47}
$$

其中

$$
\begin{pmatrix}
\tilde{Z}_{11} & \tilde{Z}_{12} \\
\tilde{Z}_{21} & \tilde{Z}_{22}
\end{pmatrix}\text{就是(2.2.46)},\ \tilde{Z}_{22}=\begin{pmatrix}
Z_{j_0+1\,j_0+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & Z_{ss}
\end{pmatrix}.
$$

然后用我们多次应用的 H,就可以得到

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')>0.$$

其中 Z 如(2.2.46)所示．因此 $\mathscr{B}_0$ 就是(2.2.46)的扩充空间．如果考虑 $\mathscr{B}_J^*\cap\mathscr{B}_{II}$，而

$$J=N'J_0N,\ J_0=\begin{pmatrix} & & & & & I\\ & & & & I & \\ & & & I & & \\ & & I & & & \\ & -I & & & & \\ -I & & & & & \end{pmatrix},$$

就得到 S_{II}：$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z})>0$，$Z=Z'$，$Z$ 如(2.2.46)所示．

如取

$$J_0=\begin{pmatrix} & & & & & K\\ & & & & K & \\ & & & I & & \\ & & I & & & \\ & -K & & & & \\ -K & & & & & \end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

就得到 S_{III}：$\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')>0$，$JZ=Z'J$，$J=\left[\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]$.

例 5 求下述形式的 W_{I}（W_{II}，W_{III}）的扩充空间：

$$\frac{1}{\mathrm{i}}(Z-\bar{Z}')-U\bar{U}'-\bar{V}V'>0 \tag{2.2.48}$$

其中

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ Z_{s1} & \cdots & Z_{ss}\end{pmatrix},\quad \begin{matrix} Z_{k_ij}=0 & j>k_i\\ Z_{jk_i}=0 & j>k_i\end{matrix}\qquad 1<k_1<\cdots<k_l<s$$

$$U=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1q} \\ 0 & U_{22} & \cdots & U_{2q} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & U_{qq} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1q} \\ 0 & V_{22} & \cdots & V_{2q} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & V_{qq} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} q<s, \\ U_{k_i j}=0,\ V_{k_i j}=0 \\ j>k_i,\ k_i\leqslant q. \end{matrix}$$

无妨设 $k_l=s-1$，从 $Z_{s-1,s-1}$ 沿对角线往上数，第一个不在 $k_1,k_2,\cdots,k_l$ 之中的数设为 p，那么扩充空间的作法根据 $q>p$ 或 $q\leqslant p$ 而分为不同的情况．这两种情况我们分别用两个最简单的例子表明，例子的作法可以无困难地推广到一般情形去．

其一，设

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & 0 \\ Z_{31} & 0 & Z_{33} \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ 0 & v_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.49}$$

那么其扩充空间为

$$\mathscr{Y}=\begin{pmatrix} \mathscr{Y}_{11} & \mathscr{Y}_{12} & \mathscr{Y}_{13} & \mathscr{Y}_{14} & \mathscr{Y}_{15} \\ 0 & \mathscr{Y}_{22} & 0 & \mathscr{Y}_{24} & \mathscr{Y}_{25} \\ 0 & 0 & \mathscr{Y}_{33} & \mathscr{Y}_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathscr{Y}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathscr{Y}_{55} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{Y}_{ij}\text{都是 } 1\times 2 \text{ 矩阵}, \mathscr{Y}_{ii}\text{秩为 } 1.$$

等价关系为 $\mathscr{Y}_1\sim\mathscr{Y}_2$，如果 $\mathscr{Y}_2=P\mathscr{Y}_1$，其中

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ 0 & p_{22} & 0 & p_{24} & p_{25} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} \end{pmatrix}, \quad \det P\neq 0,$$

用 $\mathscr{B}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2,\tilde{L}_3)$ 语言，这里 $L_1=\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\}$，$L_2=\{(\ *\ )\}$，$L_3=$

$\left\{\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}\right\}$. 然后再用我们一贯使用的 $H,(J,K)$就可以得到所要求的扩充空间.

其二,设

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ Z_{21} & Z_{22} & 0 & 0 & 0 \\ Z_{31} & 0 & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} \\ Z_{41} & 0 & Z_{43} & Z_{44} & 0 \\ Z_{51} & 0 & Z_{53} & 0 & Z_{55} \end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ 0 & v_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.50}$$

其扩充空间为

$$\mathscr{Y}=\begin{pmatrix} \mathscr{Y}_{11} & \mathscr{Y}_{12} & 0 & \mathscr{Y}_{14} & \mathscr{Y}_{15} & \mathscr{Y}_{16} & \mathscr{Y}_{17} & \mathscr{Y}_{18} \\ & \mathscr{Y}_{22} & 0 & 0 & 0 & \mathscr{Y}_{26} & \mathscr{Y}_{27} & 0 \\ & & \mathscr{Y}_{33} & \mathscr{Y}_{34} & \mathscr{Y}_{35} & \mathscr{Y}_{36} & 0 & \mathscr{Y}_{38} \\ & & & \mathscr{Y}_{44} & 0 & \mathscr{Y}_{46} & 0 & \mathscr{Y}_{48} \\ & & & & \mathscr{Y}_{55} & \mathscr{Y}_{56} & 0 & \mathscr{Y}_{58} \\ & & & & & \mathscr{Y}_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & \mathscr{Y}_{76} & \mathscr{Y}_{77} & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & \mathscr{Y}_{88} \end{pmatrix},$$

$\mathscr{Y}_{ij}$是 1×2 矩阵,
$\mathscr{Y}_{ii}$之秩为 1,
$\mathscr{Y}_{33}=(\mathscr{Y}^1_{33},0)$,
$\mathscr{Y}_{88}=(\mathscr{Y}^1_{88},0)$.

等价关系为 $\mathscr{Y}_1\sim\mathscr{Y}_2 \Leftrightarrow \mathscr{Y}_2=P\mathscr{Y}_1$, 其中

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & P_{14} & P_{15} & P_{16} & P_{17} & P_{18} \\ & P_{22} & 0 & 0 & 0 & P_{26} & P_{27} & 0 \\ & & P_{33} & P_{34} & P_{35} & P_{36} & 0 & P_{38} \\ & & & P_{44} & 0 & P_{46} & 0 & P_{48} \\ & & & & P_{55} & P_{56} & 0 & P_{58} \\ & & & & & P_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & P_{76} & P_{77} & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & P_{88} \end{pmatrix},\ \det P\neq 0,$$

用 $\mathscr{B}_0(\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \cdots, \widetilde{L}_5)$的语言，是

$$L_1=\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\},\ L_2=\{(\ *\ )\},\ L_3=\left\{\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\},$$

$$L_4=\left\{\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}\right\},\ L_5=\{(\ *\ )\}.$$

但 $\widetilde{L}_2$ 是$(\mathscr{Y}_{33}^1,0)$形式，$\widetilde{L}_5$ 是$(\mathscr{Y}_{88}^1,0)$形式，上面的点的局部坐标（在第一个坐标邻域下）为

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & Z_{14} & Z_{15} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ & u_{22} & 0 & 0 & 0 & Z_{21} & Z_{22} & 0 \\ & & 0 & Z_{34} & Z_{35} & Z_{31} & 0 & Z_{33} \\ & & & Z_{44} & 0 & Z_{41} & 0 & Z_{43} \\ & & & & Z_{55} & Z_{51} & 0 & Z_{53} \\ & & & & & v_{11} & 0 & 0 \\ & & & & & v_{12} & v_{22} & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

然后利用一再使用的 H，就可以实现(2.2.50)为 $\mathscr{B}_0(\widetilde{L}_1,\cdots,\widetilde{L}_5)$的超圆.

例 6 现在我们可以很容易的求出

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}(Z-\bar{Z})-U\bar{U}'-\bar{U}U'>0, \\ Z=Z', \end{cases}$$

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1q} & \cdots & Z_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{q1} & \cdots & Z_{qq} & \cdots & Z_{qs} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{s1} & \cdots & Z_{sq} & \cdots & Z_{ss} \end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1q} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & U_{qq} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.51}$$

的扩充空间了.

我们取复流形 $\mathscr{B}(\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2,\widetilde{L}_3)$即可，其中

$$L_1=\left\{\begin{pmatrix} *_{11} & \cdots & *_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & & *_{qq} \end{pmatrix}\right\},\ L_2=\left\{\begin{pmatrix} *_{q+1\,q+1} & \cdots & *_{q+1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ *_{s\,q+1} & \cdots & *_{ss} \end{pmatrix}\right\},$$

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \widetilde{*}_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ \widetilde{*}_{q1} & & & \widetilde{*}_{qq} \end{pmatrix} \right\}$$

此即

$$\mathscr{X} = \begin{pmatrix} \mathscr{X}_{11} & \cdots & \mathscr{X}_{1q} & \mathscr{X}_{1\,q+1} & \cdots & \mathscr{X}_{1s} & \cdots & \mathscr{X}_{1,s+q} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \mathscr{X}_{qq} & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & \mathscr{X}_{q+1\,q+1} & \cdots & \mathscr{X}_{q+1\,s} & \cdots & \mathscr{X}_{q+1\,s+q} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & \mathscr{X}_{s\,q+1} & \cdots & \mathscr{X}_{ss} & \cdots & \mathscr{X}_{s\,s+q} \\ & & & & & \mathscr{X}_{s+1\,s+1} & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \mathscr{X}_{s+q\,s+1} & \cdots & \mathscr{X}_{s+q\,s+q} \end{pmatrix}$$

在等价关系 $\mathscr{X}_1 \sim \mathscr{X}_2 \Leftrightarrow \mathscr{X}_2 = P\mathscr{X}_1$，其中

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & * & * \\ & P_2 & * \\ & & P_3 \end{pmatrix}, \quad P_i \in L_i,$$

之下所成的齐性复流形，书

$$\mathscr{X} = R \begin{pmatrix} I & & & U & \widetilde{\mathscr{X}}_{12} & \widetilde{\mathscr{X}}_{11} \\ & I & & 0 & \widetilde{\mathscr{X}}_{22} & \widetilde{\mathscr{X}}_{21} \\ & & I & 0 & 0 & V \end{pmatrix} N$$

N 是某一排列方阵，取

$$H = N'H_0N, \quad J = N'J_0N,$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} & & & & & \mathrm{i}I \\ & & & & \mathrm{i}I & \\ & & & I & & \\ & & -I & & & \\ & -\mathrm{i}I & & & & \\ \mathrm{i}I & & & & & \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} & & & & & I \\ & & & & I & \\ & & & I & & \\ & & -I & & & \\ & -I & & & & \\ -I & & & & & \end{pmatrix},$$

则 $\mathscr{B}_H(\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3) \cap \mathscr{B}_J(\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3)$ 就是(2.2.51)的实现，因此 $\mathscr{B}_J(\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3)$ 就是(2.2.51)的扩充空间．

本节内容取自文[ZJY1]、[ZJY3].

Ⅲ. 扩充空间的若干注记

本节沿用文[Lu3]中的符号．主要说明以下几个事实：

1．阐明矩阵扩充空间 $\mathscr{R}(m;n)$、对称方阵扩充空间 $\mathscr{R}_s(p;p)$ 和斜对称方阵扩充空间 $\mathscr{R}_K(q;q)$ 中无穷远点集的几何结构．说明了这些空间中的无穷远点集可以表为若干个互不相交的子集的和，每一个子集都是齐性复流形，而且其中除了维数最低的一个复流形为紧致外，其余都是非紧致的．特别，其中紧致的齐性复流形有时仅只包含一个点．

2．阐明上述紧致复流形具有与特征流形相类似的性质．即若函数 f 在原来未扩充的空间中解析，同时又在此紧致复流形上解析，则 f 一定是常数．因此，将此种复流形定义为其所对应的扩充空间的特征流形．

3．顺便构造了一批在其上不存在非常数解析函数的非紧致齐性复流形的例子．

4．给出复齐性流形 $\mathscr{R}(r_1,\cdots,r_p;\ s_1,\cdots,s_p)$（另一种扩充空间）中超圆的分类．

Ⅲ.1.

矩阵扩充空间 $\mathscr{R}(m;n)$ 就是 Grassmann 流形，其定义是熟知的[Lu3]．它是一个齐性复流形，可以用有限多个坐标邻域盖过，若任意选定一个坐标邻域，那么不在此坐标邻域内的点集是一个较低维的点集，我们称之为"无穷远点集"．我们不妨选定坐标邻域 $w(1,\cdots,m)$．这样 $w(1,\cdots,m)$ 内的点集就与复数空间 $\mathbf{C}^{mn}$ 同胚，称为 $\mathscr{R}(m;n)$ 的有限部分．在 $\mathscr{R}(m;n)$ 而不在 $w(1,\cdots,m)$ 的点，就在 $\mathbf{C}^{mn}$ 上引进无穷远点与之对应。因此，在 $w(1,\cdots,m)$ 内的点可理解为 $\mathbf{C}^{mn}$ 的点，不在 $w(1,\cdots,m)$ 内的点则理解为无穷远点（此点集以 $\mathscr{R}_\infty(m;n)$ 表示），$\mathscr{R}(m;n)$ 就理解为 $\mathbf{C}^{mn}$ 的扩充空间．

由于 $\mathscr{R}(m;n)$ 和 $\mathscr{R}(n;m)$ 是解析等价的．因而不妨设 $m\leqslant n$．下面我们讨论 $\mathscr{R}_\infty(m;n)$ 的几何结构．

设 $\mathscr{R}(m;n)$ 中点的齐次坐标为 $\mathscr{Z}$：

$$\mathscr{Z}=(\underset{m}{Z_1},\underset{n}{Z_2})m,\qquad \mathscr{Z}\in E(m;n),$$

则由上述可知

$$\mathscr{R}_\infty(m;n)=\{[(\mathscr{Z})]\mid \mathscr{Z}\in E(m;n),\det Z_1=0\}.$$

显然，当 Z_1 的秩小于 m 时都有 $\det Z_1=0$，而且，若 $\mathscr{Z}_1\sim\mathscr{Z}_2$，则其秩相同．因此可将 $\mathscr{F}_\infty(m;n)$ 内的点按 Z_1 的秩的不同而进行分类，使得任意两类之交为空集．

当 Z_1 之秩为 $m-j$ 时 $(j=1,2,\cdots,m)$ 有

$$\mathscr{Y}\sim\begin{pmatrix}\mathscr{Y}_{11} & \mathscr{Y}_{12}\\ 0 & \mathscr{Y}_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}m-j\\ j\end{matrix},\quad \begin{matrix}m & n\end{matrix}$$

由文[Lu3]可知，所有以此为齐次坐标的点组成齐性复流形 $\mathscr{F}(m-j,j;j,n-j)$，而且当 $m\neq j$ 时为非紧致的．当 $j=m$ 时，$\mathscr{F}(0,m;m,n-m)$ 即 $\mathscr{F}(m;m-n)$ 为紧致齐性复解析流形．由此可知

$$\mathscr{F}_\infty(m;n)=\sum_{j=1}^{m}\mathscr{F}(m-j,j;j,n-j),$$

其中每一个 $\mathscr{F}(m-j,j;j,n-j)$ 都是 $\mathscr{F}(m;n)$ 的正则复解析子流形．其维数设为 $N(j)$，则

$$N(j)=(m-j)j+(m-j)(n-j)+(n-j)j=mn-j^2.$$

由此可知，其中维数最低的是 $mn-m^2=m(n-m)$，它是紧致复解析流形 $\mathscr{F}(m;n-m)$ 的维数．

同样的道理，对于 $\mathscr{F}_s(p;p)$ 的无穷远点集 $\mathscr{F}_{s\infty}(p;p)$ 有

$$\mathscr{F}_{s\infty}(p;p)=\sum_{j=1}^{p}\mathscr{F}_s(p-j,j;j,p-j),\ S=\begin{pmatrix}0 & I^{(p)}\\ -I^{(p)} & 0\end{pmatrix}.$$

当 $j=p$ 时，$\mathscr{F}_s(p-j,j;j,p-j)$ 仅只一点即 $\Gamma(0,I)$，显然紧致，其维数 $=0$．当 $j<p$ 时，$\mathscr{F}_s(p-j,j;j,p-j)$ 的维数大于零，且不紧致．

对于 $\mathscr{F}_K(q;q)$ 的无穷远点集 $\mathscr{F}_{K\infty}(q;q)$ 有

$$\mathscr{F}_{K\infty}(q;q)=\sum_{j=1}^{q}\mathscr{F}_K(q-j,j;j,q-j),\ K=\begin{pmatrix}0 & I^{(q)}\\ I^{(q)} & 0\end{pmatrix}.$$

当 $j=q$ 时，$\mathscr{F}_K(q-j,j;j,q-j)$ 仅一点即 $\Gamma(0,I)$，显然紧致．当 $j<q$ 时，$\mathscr{F}_K(q-j,j;j,q-j)$ 的维数大于零而且不紧致．

Ⅲ.2.

定义 1. $\mathscr{F}_\infty(m;n)$、$\mathscr{F}_{s\infty}(p;p)$ 和 $\mathscr{F}_{K\infty}(q;q)$ 表示式中维数最低的流形（即 $\mathscr{F}(m;n-m)$、$\mathscr{F}_s(p;0)$ 及 $\mathscr{F}_K(q;0)$）称为它所对应的扩充空间的特征流形．

我们有如下定理：

定理 1. 若函数 f 在 $\mathscr{F}(m;n)$ 的有限部分解析，又在 $\mathscr{F}(m;n)$ 的特征流形上解析，则 f 一定是常数．

证:设 $\mathscr{R}(m;n)$的点的局部坐标为

$$Z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mn} \end{pmatrix}.$$

写成向量形式为

$$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n},z_{21},z_{22},\cdots,z_{2n},\cdots,z_{m1},z_{m2},\cdots,z_{mn}).$$

据假设,$f(z)$在 $\mathbf{C}^{mn}$解析,故有展式

$$f(z)=a_0+P_1(z)+P_2(z)+\cdots+P_v(z)+\cdots,$$

其中 $P_j(z)$为 $z_{kl}(1\leqslant k\leqslant m,1\leqslant l\leqslant n)$的 j 次齐次多项式($j=1,2,\cdots$).作

$$f(tz)=a_0+tP_1(z)+t^2P_2(z)+\cdots+t^vP_v(z)+\cdots.$$

则 $f(tz)$是 t 的在 $\mathbf{C}$ 的解析函数.任意固定 z_0 使得其所对应的 Z_0 之秩为 m,则 $g(t)=f(tz_0)$对 t 在 $\mathbf{C}$ 解析.我们证明 $g(t)$当 t 为无穷远点时也解析.事实上,当 $t\to\infty$时,tz_0 趋向于特征流形上的点.这是因为 tz_0 的齐次坐标为$(I,tZ_0)\sim\left(\frac{1}{t}I,Z_0\right)\to(0,Z_0)(t\to\infty)$,而$(0,Z_0)$属于 $\mathscr{R}(m;n)$的特征流形.由假定,f 在特征流形解析,因此 $g(t)$不但在 $\mathbf{C}$ 解析,而且当 $t=\infty$时也解析,所以 $g(t)$为常数,即 $P_v(z_0)=0,v=1,2,\cdots$.这结论对所有 Z_0 的秩为 m 的Z_0 都成立,因此有 $P_v(z)\equiv0,v=1,2,\cdots$,此即 $f(z)=a_0$,定理得证.

同样,我们有

定理 2. 若函数 f 在 $\mathscr{R}_s(p;p)$的有限部分解析,而且在特征流形上也解析,则 f 为常数.

定理 3. 若函数 f 在 $\mathscr{R}_K(q;q)$的有限部分解析,在特征流形上也解析,则 f 为常数.

Ⅱ.3.

1953 年,E.Calabi 和 B.Eckmann [CaE]给出了非代数的非紧致复流形在其上不存在非常数解析函数的例子,但此流形不是齐性的.此后具有这种性质的齐性复流形的例子大批出现[Mor].本文所给的例子较简单而自然,在此写出.

设 $\mathscr{Y}$ 为 $\mathscr{R}(m;n)$中点的齐次坐标:

$$\mathscr{Y}=(\underset{m+j}{Z_1},\ \underset{n-1}{Z_2})m,$$

记

$$\mathscr{H}(j) = \{H(\mathscr{Z}) \mid Z_1 \text{ 之秩为 } m\},\quad j = 1,2,\cdots,n-1.$$

则有以下结果：

1. $\mathscr{H}(j)$是$\mathscr{H}(m;n)$的非紧致复解析子流形．

2. $\mathscr{H}(j)$是齐性复流形．

3. 在$\mathscr{H}(j)$上解析的函数一定是常数．

证：1. 由于$\mathscr{H}(j)$为$\mathscr{H}(m;n)$中下述形式的坐标邻域之和：

$w(r_1,\cdots,r_m)$, $1\leqslant r_1<r_2<\cdots r_m\leqslant m+j$，共有 C_{m+j}^m个，因此显然有 1.

2. 令

$$Q=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ \underset{m+j}{0} & \underset{n-j}{Q_{22}} \end{pmatrix}\begin{matrix} m+j \\ n-j \end{matrix},\quad \det Q\neq 0.$$

显然，$\mathscr{H}(j)$在上述 Q 所诱导的变换 τ_Q 下不变，事实上，因

$$(Z_1,Z_2)Q=(Z_1Q_{11},Z_1Q_{12}+Z_2Q_{22}),$$

而 Z_1Q_{11}之秩仍为 m．所有这种形式的 Q 组成一群，记为 $\Gamma_j(m;n)$．即要证对任一点$H(\mathscr{Z})\in\mathscr{H}(j)$，存在非异方阵 $A^{(m)}$以及上述形式的 Q，使得

$$A\mathscr{Z}Q=(I^{(m)},0).$$

事实上，由于$H(\mathscr{Z})\in\mathscr{H}(j)$，故 Z_1 之秩为 m，因此存在 $A_1^{(m)}$，$B_1^{(m+j)}$ 皆非异，使得

$$A_1Z_1B_1=(\underset{m}{I^{(m)}},\underset{j}{0})m,$$

令

$$Q_1=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I^{(n-j)} \end{pmatrix},$$

则

$$A_1\mathscr{Z}Q_1=A_1(Z_1,Z_2)Q_1=(\underset{m}{I^{(m)}},\underset{j}{0},\underset{n-j}{Z_2^*})m.$$

再令

$$Q_2=\begin{pmatrix} I & -\begin{pmatrix} Z_2^* \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underset{m+j}{0} & \underset{n-j}{I} \end{pmatrix}\begin{matrix} m+j \\ n-j \end{matrix},$$

则

$$(I^{(m)},0,Z_2^*)Q_2=(I^{(m)},0).$$

因此，令 $A=A_1$，$Q=Q_1Q_2$，就有 $A\mathscr{Z}Q=(I^{(m)},0)$．

3. 在$\mathscr{H}(m;n)$而不在$\mathscr{H}(j)$的点集为$\mathscr{P}_\infty(j)$，则与一一相同，我们有

$$h_\infty(j)=\{\Pi(\mathcal{Z})\mid \mathcal{Z}=(\underset{m+j}{Z_1},\ \underset{n-j}{Z_2})m,\ Z_1 \text{ 的秩小于 } m,\ \mathcal{Z}\in E(m;n)\}.$$

因此有

$$h_\infty(j)=\sum_{l=1}^{n-j}\mathcal{R}(m-l,l;l+j,n-j-l),$$

显然 $h_\infty(j)$ 为一解析集合，其维数即 $\mathcal{R}(m-1,1;j+1,n-j-1)$ 的维数，为

$$(m-1)(n-j-1)+(m-1)(j+1)+(n-j-1)=mn-j-1.$$

由于 $1\leqslant j<n$，故 $h_\infty(j)$ 的维数比 $\mathcal{R}(m;n)$ 起码少 2. 由于在 $\mathcal{R}(m;n)$ 上解析的函数一定是常数，因此由下述著名定理可知在 $\mathcal{R}(j)$ 上不存在非常数的解析函数．

定理 4. 若 f 在 N 维复空间中除了它的一个最多不超过 $N-2$ 维的解析子集 X 外解析，则 f 可解析开拓到 X 上．

Ⅲ.4.

本节给出 $H=\bar{H}'$ 在上三角矩阵复相合下的标准形，同时给出对称方阵和斜对称方阵在相合下的标准形．问题的提起是由于在考虑齐性复流形 $\mathcal{R}(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots s_p)$（这也是一种扩充空间）中超圆的分类时，需要考虑 $H=\bar{H}'$ 在变换 $H\to QH\bar{Q}'$，Q 为上三角方阵，之下的标准形．考虑 $\mathcal{R}(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$ 中的子流形 $\mathcal{R}_c(r_1,\cdots,r_p;s_1,\cdots,s_p)$ 时，需考虑 $S=S'$（或 $K=-K'$）在变换 $S\to QSQ'$（或 $K\to QKQ'$），Q 同上，之下的标准形．

先引进如下的

定义 2. 排列方阵 $P^{(n)}$ 中将 k 个 1 改为 k 个 -1 后所成的方阵称为广义排列方阵，k 可取 $0,1,\cdots,n$ 中的任意一个数．

定义 3. 么方阵 $I^{(n)}$ 中将 k 个 1 改为 k 个 -1 后所成的方阵称为广义么方阵，k 可取 $0,1,\cdots,n$ 中的任一个数．

设下面出现的 H、S、K、Q 皆非异，则有如下结果

定理 5. $H=\bar{H}'$ 一定存在一个上三角方阵 Q，使得 $QH\bar{Q}'=P_H$，其中 P_H 为只在对角线上出现 -1 的对称的广义排列方阵．

定理 6. $S=S'$ 一定存在一个上三角方阵 Q 使得 $QSQ'=P_S$，其中 P_S 为对称排列方阵．

定理 7. $K=-K'$ 一定存在上三角方阵 Q 使得 $QKQ'=P_K$，其中 P_K 为斜对称的广义排列方阵．

更一般的我们有

定理 8. 对任一非异的方阵 A,存在上三角方阵 T_1 和下三角方阵 T_2 皆非异使得 $T_1AT_2=P$,其中 P 为排列方阵．

我们仅对定理 5 进行证明,其余可仿此得证．为此先证下列引理．

引理 1. 设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq 0$, α_j 是 α 中最后一个不为零者,则存在非异上三角方阵 T,使得 $T\alpha'=e'_j$ 或 $\alpha T'=e_j$,其中 e_j 为第 j 个分量为 1 其余分量全为零的 n 维单位向量．

证:设

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix},$$

取 $t_{jj}=1/\alpha_j$, $t_{ij}=-(\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1})/\alpha_j$, $i=1,2,\cdots,j-1$, T 中其余元素全取为 1. 则此种 T 即为所求．

下面证明定理 5.

令

$$H=\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \bar{H}'_{12} & H_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix},$$
$$\qquad\quad n-1 \quad 1 \qquad\qquad\qquad\quad n-1 \quad 1$$

Q_{11} 为上三角方阵,我们有

$$QHQ'=\begin{pmatrix} Q_{11}H_{12}Q'_{11}+Q_{12}\bar{H}'_{12}Q'_{11}+Q_{11}H_{12}\bar{Q}'_{12}+Q_{12}H_{22}Q'_{12}, & Q_{11}H_{12}Q'_{22}+Q_{12}H_{22}Q'_{22} \\ *, & Q_{22}H_{22}Q'_{22} \end{pmatrix}$$

对方阵的阶数作归纳法,当 $n=2$ 时,若 $H_{22}\neq 0$,不妨设 $H_{22}=\pm 1$,此时,取 $Q_{11}=1$, $Q_{22}=1$, $Q_{12}=\mp H_{12}$ 就有 $H\sim\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

若 $H_{22}=0$,则 $H_{12}\neq 0$,取 $Q_{11}=1$, $Q_{12}=0$, $Q_{22}=1/H_{12}$,则 $H\sim\begin{pmatrix} H_{11} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 再取 $Q_{11}=1$, $Q_{22}=1$, $Q_{12}=-H_{11}/2$,则 $H\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,因此当 $n=2$ 时定理 1 成立．设 $n-1$ 时定理 1 成立,则当阶数为 n 时,若 $H_{22}\neq 0$,不妨设 $H_{22}=\pm 1$,此时令 $Q_{11}=I^{(n-1)}$, $Q_{22}=1$, $Q_{12}=\mp H_{12}$,则有 $H\sim\begin{pmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$,由归纳法假定,存在上三角方阵 T_1,使得 $T_1H_{11}\bar{T}'_1=P^{(n-1)}_{H_{11}}$,取 $Q_{11}=T_1$, $Q_{12}=0$, $Q_{22}=1$,则有

$$Q\begin{pmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}Q'=P_H.$$

若 $H_{22}=0$,则 $H_{12}\neq 0$,设 $H'_{12}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$, α_j 为最后一个不为

零的分量．由引理，存在上三角方阵 $T^{(n-1)}$ 使得 $TH_{12}=e'_j$，我们取 $Q_{11}=T, Q_{22}=1, Q_{12}=0$，则 $H\sim\begin{pmatrix}H_{11} & e'_j\\ e_j & 0\end{pmatrix}$，设 $H_{11}=(h_1,\cdots,h_{n-1})$ 取 $Q_{11}=I^{(n-1)}, Q_{22}=1, Q_{12}=-h_j+\frac{1}{2}e'_j h_{jj}$，其中 h_{jj} 是 h_j 的第 j 个分量，则有

$$H\sim\begin{pmatrix}H & 0 & H_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \overline{H}'_2 & 0 & H_3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} j\text{ 行}.$$

$$j\text{ 列}$$

由归纳法假定，存在上三角方阵

$$Q^*=\begin{pmatrix}Q^*_{11} & Q^*_{12}\\ 0 & Q^*_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix} j-1\\ n-1-j\end{matrix},\quad \begin{matrix} j-1 & n-1-j\end{matrix}$$

使得 $Q^*\begin{pmatrix}H_1 & H_2\\ \overline{H}'_2 & H_3\end{pmatrix}\overline{Q}^{*\prime}$ 为 $n-2$ 阶的仅在对角线上出现 -1 的广义排列方阵．取

$$Q_{11}=\begin{pmatrix}Q^*_{11} & 0 & Q^*_{12}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & Q^*_{22}\end{pmatrix},\quad Q_{12}=0, Q_{22}=1,$$

则有 $H\sim P_H$，定理5证毕．

本节内容来自文［YW18］．

Ⅳ．非对称第一类 Siegel 齐性域的酉几何（1）

本书第二章第Ⅰ节中给出了非对称可递域的新类型，使得［Sha1］中构造的几类非对称域成为其特例，并在本章第Ⅱ节中引进了这些新的非对称典型域的扩充空间．本节则从酉几何方面探讨这些非对称域与熟知的典型域之间的关系．特别在下面第Ⅰ节中给出了属于第一类 Siegel 域的非对称可递域（我们称之为非对称第一类 Siegel 齐性域），它们更接近于对称典型域，是非对称可递域中结构最简单者．因此我们就从这些域出发来研究其酉几何，首先研究域 S_{I} 的酉几何，给出了域 S_{I} 与对称域 R_{I} 在核函数、Hua 度量、Bergmann 度量方面的关系式．

Ⅳ.1. 非对称可递域 S_1 及其运动群

Ⅳ.1.1 考虑 m×m 的 *Hermite* 方阵 H，分块如下：

$$H=\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{s1} & H_{s2} & \cdots & H_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, \quad H=\overline{H}', \quad m=m_1+m_2+\cdots+m_s.$$
$$\qquad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

取正整数 $k_i(i=1,2,\cdots,l)$使得 $1<k_1<k_2<\cdots<k_l<s$，令

$$A_{k_i j}=0,\ j>k_i,\ i=1,2,\cdots,l$$

这种方阵 H 所形成的集合记为$H\begin{pmatrix} m_1\cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}$，令

$$V_1\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}=\left\{H \mid H>0, H\in H\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}\right\}$$

这是仿射齐性的非自共轭锥，其运动群由如下形式的变换所组成.

$$H\to AH\overline{A}',$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, \quad A_{k_i j}=0,\ j>k_i, i=1,2,\cdots,l,$$
$$\qquad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

此运动群，或所有这种矩阵 A 的集合记为$G_1\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}$.

记 $C\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}$为如下形式的 $m\times m$ 复数矩阵Z 所成的集合：

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, \quad \begin{matrix} Z_{k_i j}=0,\ Z_{jk_i}=0 \\ i>k_i,\ i=1,2,\cdots,l. \end{matrix}$$
$$\qquad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

定义 $S_1\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}$就是以$V_l\begin{pmatrix} m_1\cdots, m_s \\ k_1\cdots, k_l \end{pmatrix}$为底的第一类 Siegel 域，此即

$$S_l\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix} = \left\{ Z \,\Big|\, \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0,\ Z\in C\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix} \right\}.$$

当 $l>0$ 时，S_l 都是非对称可递域并解析等价于有界域. 它容许如下形式的解析自同胚群 Γ^1:

$$W = AZA' + B,\ B\in H\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix},\ A\in G_l\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}$$

它不是最大群，但却是一个可递群，将 S_l 的任一点 Z_0 变为 iI 的 S_l 的解析自同胚为

$$W = A\left(Z - \frac{1}{2}(Z_0+\bar{Z}'_0)\right)A',\ (A'A)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_0 - Z'_0)$$

以上都不难验证. 参阅[Sha1].

例如，取 $k=(2,3,\cdots,s-1)$，则 $S_l\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ 2, \cdots, s-1 \end{pmatrix}$ 中的点 Z 为

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & Z_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ Z_{s1} & 0 & & Z_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix},\quad G_l\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ 2, \cdots, s-1 \end{pmatrix} \text{中的 } A \text{ 有形式}$$
$$\qquad\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}.$$

Ⅳ.1.2 考虑对称典型域 $R_1(m)$: $\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0$，$Z$ 为 $m\times m$ 的复方阵.

显然 $S_1\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ 2, \cdots, s-1 \end{pmatrix}$ 是 $R_1(m)$ 的子流形，本文只考虑 $S_1\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ 2, \cdots, s-1 \end{pmatrix}$，以后此域就以 S_1 记之. 若 R_1，S_1 的点的坐标分别记以 W，Z，则 S_1 作为 R_1 之子流形，其坐标间有如下关系：

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1s} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{s1} & W_{s2} & \cdots & W_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & Z_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ Z_{s1} & 0 & & Z_{ss} \end{pmatrix} \tag{2.4.1}$$

对 R_I 中的点 W,将其元素按行向量的自然顺序排列成 m^2 维空间中的一向量 w^*，称为 R_I 的 a 排列法. 若先将 W_{ij}的元素按其行向量的自然顺序排列成向量 w_{ij}，而令

$$w=(w_{11},w_{12},\cdots,w_{1s},w_{21},w_{22},\cdots,w_{2s},\cdots,w_{s1},w_{s2},\cdots,w_{ss})$$

则称为 R_I 的 b 排列法. 对 R_I 中的同一点 W，其 w^* 与 w 之间关系为

$$w^*=wQ(K),$$

其中 Q(K)是仅与 W 的分块有关的排列方阵.

对 S_I 中的点 Z,先将 Z_{ij}的元素按其行向量的自然顺序排成向量 z_{ij}，再令

$$z=(z_{11},z_{12},\cdots z_{1s},z_{21},z_{22},z_{31},z_{33},\cdots,z_{s1},z_{ss})$$

这称为 S_I 的 b 排列法.

若 R_I、S_I 中的点都按其 b 排列法分别排成向量 w 与 z,则变换(2.4.1)可书为

$$w=zJ(s),$$

即 R_I 对其子流形 S_I 的函数矩阵为 J(s). 其中 J(s)可书为:$J(s)=[J_1(s),J_2(s),\cdots,J_s(s)]$,$J_1(s)=I^{(m_1m)}$,

$$J_j(s)=\begin{pmatrix} \underbrace{I}_{m_1m_j} & \underbrace{0}_{m_j\sum_{i=1}^{j-1}m_i} & \underbrace{0}_{m_j^2} & \underbrace{0}_{m_j\sum_{i=j+1}^{s}m_i} \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1m_j \\ m_j^2 \end{matrix} \quad (j=2,3,\cdots,s) \tag{2.4.2}$$

另外,令 $J_1(s,\lambda_1)=J_1(s)$,

$$J_j(s,\lambda_j)=\begin{pmatrix} \underbrace{I}_{m_1m_j} & \underbrace{0}_{m_j\sum_{i=1}^{j-1}m_i} & \underbrace{0}_{m_j^2} & \underbrace{0}_{m_j\sum_{i=j+1}^{s}m_i} \\ 0 & 0 & \lambda_jI & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1m_j \\ m_j^2 \end{matrix} \quad j=2,\ 3,\cdots,s$$

记

$$J(s,\lambda)=[J_1(s,\lambda_1),\ J_2(s,\lambda_2),\cdots,\ J_s(s,\lambda_s)],$$

$$J(s,\lambda^{-1})=[J_1(s),\ J_2(s,\lambda_2^{-1}),\cdots,\ J_s(s,\lambda_s^{-1})]. \tag{2.4.3}$$

易见有：

$$J_j(s)=(\underbrace{J_j(s-1)}_{m_j(m-m_s)},\ \underbrace{0}_{m_jm_s})m_j(m_1+m_j),$$

$$J_j(s,\lambda_j)=(\underbrace{J_j(s-1,\lambda_j)}_{m_j(m-m_s)},\ \underbrace{0}_{m_jm_s})m_j(m_1+m_j) \tag{2.4.4}$$

$j=2,3,\cdots,s-1$,其中 λ_j 为不等于零的常数.

J(s)与 J(s,λ)在讨论 R_I 与 S_I 的关系中起重要作用.

IV.2. 引 理

设 m 阶方阵 A 与 B 有相同的分块：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix},$$
$$\qquad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s \qquad\qquad\qquad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

则矩阵 A 与 B 的分块直乘积$[A\dot{\times}B]_K$ 定义如下：

$$(A\dot{\times}B)_K=\begin{pmatrix} (A_{11}\dot{\times}B)_K & (A_{12}\dot{\times}B)_K & \cdots & (A_{1s}\dot{\times}B)_K \\ (A_{21}\dot{\times}B)_K & (A_{22}\dot{\times}B)_K & \cdots & (A_{2s}\dot{\times}B)_K \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (A_{s1}\dot{\times}B)_K & (A_{s2}\dot{\times}B)_K & \cdots & (A_{ss}\dot{\times}B)_K \end{pmatrix},$$

$$(A_{ij}\dot{\times}B)_K=\begin{pmatrix} A_{ij}\dot{\times}B_{11} & A_{ij}\dot{\times}B_{12} & \cdots & A_{ij}\dot{\times}B_{1s} \\ A_{ij}\dot{\times}B_{21} & A_{ij}\dot{\times}B_{22} & \cdots & A_{ij}\dot{\times}B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{ij}\dot{\times}B_{s1} & A_{ij}\dot{\times}B_{s2} & \cdots & A_{ij}\dot{\times}B_{ss} \end{pmatrix},$$

它与矩阵 A,B 的直乘积$(A\dot{\times}B)$(定义见[Lu2],[Lu5])关系为

$$(A\dot{\times}B)_K=Q(K)(A\dot{\times}B)Q'(K), \tag{2.4.5}$$

其中 $Q(K)$ 为仅与 A,B 的分块有关的排列方阵.

事实上，对 $Z\in R_{\mathrm{I}}$，令

$$W=A'ZB, \tag{2.4.6}$$

则(2.4.6)是 R_{I} 的一个变换，将 W 与 Z 按 R_{I} 的 a 排列法排成 w^* 与 z^*，则显然有 $w^*=z^*(A\dot{\times}B)$. 另一方面将 W 与 Z 按 R_{I} 的 b 排列法排成 w 与 z，则存在 $Q(K)$ 使 $w^*=wQ(K)$，$z^*=zQ(K)$，因而得

$$w=zQ(K)(A\dot{\times}B)Q'(K),$$

但经直接计算，(2.4.6)可书为 $w=z(A\dot{\times}B)_K$. 因此得关系式(2.4.5).

引理 1 若 A 为任意 m 阶方阵，$C\in G_I\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ & 2 & \end{pmatrix}$(或 $A'\in G_I\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ & 2 & \end{pmatrix}$ 而 C 为任意 m 阶方阵)，B' 与 D 都属于 $G_I\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ & 2 & \end{pmatrix}$，$J(3,\lambda)$ 与 $J(3,\lambda^{-1})$如(2.4.3)所示，则有

$$J(3,\lambda)(A\dot{\times}B)_K J'(3,\lambda^{-1})J(3,\lambda)(C\dot{\times}D)J'(3,\lambda^{-1})$$

$$= J(3,\lambda)[AC \times BD]_K J'(3,\lambda^{-1}). \tag{2.4.7}$$

证:我们首先设 A,B,C,D 皆为任意的 m 阶方阵而且有相同的分块

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{matrix}$$
$$\quad m_1 \quad m_2 \quad m_3$$

然后看要使(2.4.7)式成立,A,B,C,D 应当具有什么样的条件.由于

$$J(3,\lambda)(A\times B)_K J'(3,\lambda^{-1}) = (J_i(3,\lambda_i)(A_{ij}\times B)_K J_j'(3,\lambda_j^{-1}))$$

$$J(3,\lambda)(C\times D)_K J'(3,\lambda^{-1}) = (J_i(3,\lambda_i)(C_{ij}\times D)_K J_j'(3,\lambda_j^{-1}))$$

因此(2.4.7)式左端第 i 行第 j 列的"块块"为

$$\sum_{k=1}^{3} J_i(3,\lambda_i)(A_{ik}\times B)_K J_k'(3,\lambda_j^{-1}) J_k(3,\lambda_k)(C_{kj}\times D)_K J_j'(3,\lambda_j^{-1}) \tag{2.4.8}$$

易知(2.4.7)式右端第 i 行第 j 列的"块块"为

$$J_i(3,\lambda_i)\Big(\sum_{k=1}^{3} A_{ik}C_{kj}\times BD\Big)_K J_j'(3,\lambda_j^{-1}). \tag{2.4.9}$$

下面具体计算一下要(2.4.8)与(2.4.9)式相等需要什么条件.我们假定 $B_{jj},D_{jj}(j=1,2,3)$ 非异.

当 $i=j=1$ 时,由(2.4.8)=(2.4.9)推得

$$A_{12}C_{21}=0, \quad 及 \quad A_{13}C_{31}=0.$$

当 $i=j=2$ 时,由(2.4.8)=(2.4.9)推得

$$B_{13}D_{31}=0, B_{13}D_{32}=0, B_{23}D_{31}=0, B_{23}D_{32}=0 \quad 及 \quad A_{23}C_{32}=0.$$

当 $i=j=3$ 时,由(2.4.8)=(2.4.9)推得

$$B_{12}D_{21}=0, B_{12}D_{23}=0, B_{32}D_{21}=0, B_{32}D_{23}=0 \quad 及 \quad A_{23}C_{31}=0,$$

当 $i=1,j=2$ 时,由(2.4.8)=(2.4.9)推得

$$\begin{matrix} B_{13}D_{31}=0, B_{13}D_{32}=0, B_{33}D_{31}=0 \\ B_{23}D_{31}=0, B_{23}D_{32}=0, B_{33}D_{32}=0 \end{matrix} \quad 及 \quad A_{13}C_{32}=0,$$

当 $i=1,j=3$ 时,由(2.4.8)=(2.4.9)推得

$$\begin{matrix} B_{12}D_{21}=0, B_{12}D_{23}=0, B_{32}D_{21}=0 \\ B_{22}D_{21}=0, B_{22}D_{23}=0, B_{32}D_{23}=0 \end{matrix} \quad 及 \quad A_{12}C_{23}=0,$$

当 $i=2,j=3$ 时,由(2.4.8)=(2.4.9)推得

$$\begin{matrix} B_{13}D_{31}=0, B_{13}D_{33}=0 \\ B_{23}D_{31}=0, B_{23}D_{33}=0 \end{matrix} \quad 及 \quad \begin{matrix} B_{12}D_{21}=0, B_{12}D_{23}=0, \\ B_{22}D_{21}=0, B_{22}D_{23}=0, \end{matrix}$$

当 $i=3,j=2$ 时,由(2.4.8)=(2.4.9)推得

$$
\begin{matrix} B_{13}D_{31}=0, B_{13}D_{32}=0 \\ B_{33}D_{31}=0, B_{33}D_{32}=0 \end{matrix} \quad 及 \quad \begin{matrix} B_{12}D_{21}=0, B_{12}D_{22}=0, \\ B_{32}D_{21}=0, B_{32}D_{22}=0, \end{matrix}
$$

当 $i=3, j=1$ 时，由(2.4.8)=(2.4.9)推得

$$
\begin{matrix} B_{12}D_{21}=0, B_{12}D_{22}=0, B_{12}D_{23}=0 \\ B_{32}D_{21}=0, B_{32}D_{22}=0, B_{32}D_{23}=0 \end{matrix} \quad 及 \quad A_{33}C_{31}=0,
$$

当 $i=2, j=1$ 时，由(2.4.8)=(2.4.9)推得

$$
\begin{matrix} B_{13}D_{31}=0, & B_{13}D_{32}=0, & B_{13}D_{33}=0 \\ B_{23}D_{31}=0, & B_{23}D_{32}=0, & B_{23}D_{33}=0 \end{matrix} 及 \ A_{23}C_{31}=0.
$$

综合起来，当下述条件满足时有(2.4.8)=(2.4.9)：

$$
\begin{matrix}
A_{12}C_{21}=0, & A_{12}C_{23}=0, & A_{13}C_{31}=0, & A_{13}C_{32}=0, \\
A_{23}C_{31}=0, & A_{23}C_{32}=0, & A_{32}C_{21}=0, & A_{32}C_{23}=0, \\
B_{12}D_{21}=0, & B_{12}D_{23}=0, & B_{13}D_{31}=0, & B_{13}D_{32}=0, \\
B_{23}D_{31}=0, & B_{23}D_{32}=0, & B_{32}D_{21}=0, & B_{32}D_{23}=0, \\
B_{12}D_{22}=0, & B_{13}D_{33}=0, & B_{22}D_{21}=0, & B_{22}D_{23}=0, \\
B_{23}D_{33}=0, & B_{32}D_{22}=0, & B_{33}D_{31}=0, & B_{33}D_{32}=0.
\end{matrix} \quad (2.4.10)
$$

由于 B_{jj}, D_{jj} 非异，由(2.4.10)后八个条件得

$$
\begin{matrix}
B_{12}=0, & B_{13}=0, & B_{23}=0, & B_{32}=0, \\
D_{21}=0, & D_{31}=0, & D_{23}=0, & D_{32}=0,
\end{matrix} \qquad (2.4.11)
$$

有此式成立，(2.4.10)式的中间八个条件自然满足，因此，(2.4.11)式再加(2.4.10)前八个条件都成立就有(2.4.8)=(2.4.9). 而引理所设之 A, B, C, D 显然满足要求，引理证毕.

引理 2. 若 A' 与 C 皆为 m 阶方阵都属于 $G_1\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ 2, & \cdots, & s-1 \end{pmatrix}$, B' 与 D 都属于 $G_1\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ 2, & \cdots, & s-1 \end{pmatrix}$, $J(s,\lambda)$, $J(s,\lambda^{-1})$ 如(2.4.3)所示，则有

$$
\begin{aligned}
& J(s,\lambda)(A\times B)_K J'(s,\lambda^{-1})\ J(s,\lambda)(C\times D)_K J'(s,\lambda^{-1}) \\
&= J(s,\lambda)(AC\times BD)_K J'(s,\lambda^{-1}).
\end{aligned} \qquad (2.4.12)
$$

证：用归纳法，当 $s=3$ 时即引理 1 已得证. 假定 $s-1$ 时相应的(2.4.12)式成立. 由于(2.4.12)式左端 (i,j) 处的"块块"为

$$
\sum_{k=1}^{s} J_i(s,\lambda_i)(A_{ik}\times B)_K J'_k(s,\lambda_k^{-1}) J_k(s,\lambda_k^{-1})(C_{kj}\times D)_K J'_j(s,\lambda_j^{-1}) \qquad (2.4.13)
$$

(2.4.12)式右端 (i,j) 处的"块块"为

$$J_i(s,\lambda_i)\left(\sum_{k=1}^{t} A_{ik}C_{kj} \dot{\times} BD\right)_K J_j'(s,\lambda_j^{-1}). \tag{2.4.14}$$

当 $i=1$ 时，(2.4.13)式为

$$J_1(s,\lambda_1)(A_{11}\dot{\times} B)_K J_1'(s,\lambda_1^{-1})J_1(s,\lambda_1)(C_{1j}\dot{\times} D)_K J_j'(s,\lambda_j^{-1})$$
$$=J_1(s,\lambda_1)(A_{11}C_{1j}\dot{\times} BD)_K J_j'(s,\lambda_j^{-1}).$$

此时，(2.4.14)式为 $J_1(s,\lambda_1)(A_{11}C_{1j}\dot{\times} BD)_K J_j'(s,\lambda_j^{-1})$，所以当 $i=1$ 时，(2.4.13)式 = (2.4.14)式.

令

$$B_1=\begin{pmatrix} B_{11} & & & 0 \\ B_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ B_{s1} & \cdots & \cdots & B_{s-1\,s-1} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{s-1} \end{matrix},$$
$$\qquad\; m_1 \quad \cdots \quad \cdots \quad m_{s-1}$$

$$D_1=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1\,s-1} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & D_{s-1\,s-1} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{s-1} \end{matrix}$$
$$\qquad\; m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_{s-1}$$

当 $i\neq 1,s$ 时，(2.4.13)式为

$$\sum_{k=1}^{t} J_i(s,\lambda_i)(A_{ik}\dot{\times} B)_K J_k'(s,\lambda_k^{-1})J_k(s,\lambda_k)(C_{kj}\dot{\times} D)_K J_j'(s,\lambda_j^{-1})$$
$$=J_i(s,\lambda_i)(A_{i1}C_{1j}\dot{\times} BD)_K J_i'(s,\lambda_j^{-1})$$
$$+\sum_{k=2}^{t} J_i(s,\lambda_i)(A_{ik}\dot{\times} B)_K$$
$$\times J_k'(s,\lambda_k^{-1})J_k(s,\lambda_k)(C_{kj}\dot{\times} D)_K J'(s,\lambda_j^{-1}).$$

由(2.4.4)可知，上式第二项为

$$\sum_{k=2}^{t} J_i(s-1,\lambda_i)(A_{ik}\dot{\times} B_1)_K J_k'(s-1,\lambda_k^{-1})J_k(s-1,\lambda_k)$$
$$\cdot(C_{kj}\dot{\times} D_1)_K J_j'(s-1,\lambda_j^{-1})$$

由归纳法假定，上式等于

$$J_i(s-1,\lambda_i)\left(\sum_{k=2}^{t} A_{ik}C_{kj}\dot{\times} B_1D_1\right)_K J_j'(s-1,\lambda_j^{-1}).$$

再由(2.4.4)可知上式等于

$$J_i(s,\lambda_i)\left(\sum_{k=2}^{t} A_{ik}C_{kj}\dot{\times} BD\right)_K J_j'(s,\lambda_j^{-1}).$$

因而当 $i\neq 1,s$ 时，(2.4.13)式为

$$J_i(s,\lambda_i)\left(\sum_{k=1}^{s} A_{ik}C_{kj}\times BD\right)_K J'_j(s,\lambda_j^{-1}) = (2.4.14)\text{式}(i\neq 1,s).$$

当 $i=s$ 时，(2.4.13) 式为

$$J_s(s,\lambda_s)(A_{s1}C_{1j}\times BD)_K J'_j(s,\lambda_j^{-1}) + \sum_{k=2}^{s} J_s(s,\lambda_s)(A_{sk}\times B)_K J'_k$$
$$(s,\lambda_k^{-1})\times J_k(s,\lambda_k)(C_{kj}\times D)_K J'_j(s,\lambda_j^{-1})$$
$$-J_s(s,\lambda_s)(A_{s1}C_{1j}\times BD)_K J'_j(s,\lambda_j^{-1}) + J_s(s,\lambda_s)(A_{ss}\times B)_K J'_s$$
$$(s,\lambda_s^{-1})\times J_s(s,\lambda_s)(C_{sj}\times D)_K J'_j(s,\lambda_j^{-1})$$

经简单计算可知，上式等于

$$J_s(s,\lambda_s)(A_{s1}C_{1j}\times BD)_K J'_j(s,\lambda_j^{-1}) + J_s(s,\lambda_s)$$
$$\cdot(A_{ss}C_{sj}\times BD)_K J'_j(s,\lambda_j^{-1})$$
$$= J_s(s,\lambda_s)\left(\sum_{k=1}^{s} A_{sk}C_{kj}\times BD\right)_K J'_j(s,\lambda_j^{-1}) = (2.4.14)\text{式}(i=s).$$

至此引理得证.

事实上，引理 2 中矩阵 A,B,C,D 的条件还可放宽，但这对我们已经够用了.

Ⅳ.3. 核 函 数

作平移 $Z=Z-\mathrm{i}I$，S_{I} 变为 $\mathring{S}_{\mathrm{I}}: I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0$，$Z\in C\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ 2, & 3, & \cdots, s+1\end{pmatrix}$. 将 $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$ 的任一点 Z_0 变为原点的 $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$ 的解析自同胚为

$$W = A\left(Z-\frac{1}{2}(Z_0+Z_0')+\mathrm{i}I\right)\bar{A}'-\mathrm{i}I,$$
$$(A'A)^{-1} = I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_0-\bar{Z}_0'). \qquad (2.4.15)$$

R_{I} 在平移下变为 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}: I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0$，$Z$ 为 m 阶复方阵. 易见 $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$ 是 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 的子流形，$\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 对其子流形 $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$ 的函数矩阵仍是 $J(s)$，而且当 $Z\in\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 时，(2.4.15)是 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 的自同胚.

对 $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$ 中的点 W 与 Z 按 S_{I} 的 b 排列法排成向量 w 与 z，同样 W 与 Z 可看作是 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 中的点而按 R_{I} 的 b 排列法排成向量 w^* 与 z^*，也可按 R_{I} 的 a 排列法排成向量 w_1 与 z_1，这样有

$$w_1 = w^*Q(K),\ z_1 = z^*Q(K),\ w_1 = wJ(s),\ z_1 = zJ(s), \qquad (2.4.16)$$

而(2.4.15)可书为：

$$w_1 = z_1(A'\times\bar{A}') + \text{常数项}.$$

将(2.4.16)代入上式得

$$w = zJ(s)Q(K)(A'\dot{\times}\bar{A}')Q'(K)J'(s) + \text{常数项}.$$
$$= zJ(s)(A'\dot{\times}\bar{A}')_K J'(s) + \text{常数项}.$$

因此 $\mathring{S}_1$ 的变换(2.4.15)的函数矩阵为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{S}_1} = J(s)(A'\dot{\times}\bar{A}')_K J'(s). \qquad (2.4.17)$$

另一方面,W,Z 的元素按 S_1 的 b 排列法排序,经直接计算有

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{S}_1} = \begin{pmatrix} A'_{11}\dot{\times}\bar{A}'_{11} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & A'_{11}\dot{\times}\bar{A}'_{ss} & & & & & \\ & & & A'_{22}\dot{\times}\bar{A}'_{11} & & & & \\ & & & & A'_{22}\dot{\times}\bar{A}'_{22} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & * & & & & A'_{ss}\dot{\times}\bar{A}'_{11} & \\ & & & & & & & A'_{ss}\dot{\times}\bar{A}'_{ss} \end{pmatrix}$$

即主对角线上元素依次为:$A'_{11}\dot{\times}\bar{A}'_{11}, A'_{11}\dot{\times}\bar{A}'_{22}, \cdots, A'_{11}\dot{\times}\bar{A}'_{ss}$,
$A'_{22}\dot{\times}\bar{A}'_{11}, A'_{22}\dot{\times}\bar{A}'_{22}, A'_{33}\dot{\times}\bar{A}'_{11}, A'_{33}\dot{\times}\bar{A}'_{33}, \cdots, A'_{ss}\dot{\times}\bar{A}'_{11}, A'_{ss}\dot{\times}\bar{A}'_{ss}$.
因此得

$$\det\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{S}_1} = |\bar{A}'_{11}A_{11}|^{m}|\bar{A}'_{22}A_{22}|^{m_1+m_2}|\bar{A}'_{33}A_{33}|^{m_1+m_3}\cdots$$
$$|\bar{A}'_{ss}A_{ss}|^{m_1+m_s}$$
$$= |\bar{A}'A|^{m}|\bar{A}'_{22}A_{22}|^{-(m-m_1-m_2)}\cdots|\bar{A}'_{ss}A_{ss}|^{-(m-m_1-m_s)}$$

由 (2.4.15)及 $Z_0 \in C\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s \\ 2, & 3, & \cdots, & s-1 \end{pmatrix}$,可知

$$|\bar{A}'_{jj}A_{jj}| = \det\left(I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z^0_{jj} - \bar{Z}^0_{jj})\right)^{-1}, \quad j = 2,3,\cdots,s.$$

根据[Lu4]第 114 页的定理,可得 $\mathring{S}_1$ 的核函数为($Z_0 = Z$):

$$K_{\mathring{S}_1}(Z,Z) = C\det\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{S}_1}\det\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{Z}}\right)'_{\mathring{S}_1}$$
$$= C\frac{\det\prod_{j=2}^{s}\left[I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_{jj} - \bar{Z}'_{jj})\right]^{2(m-m_1-m_j)}}{\det\left[I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - \bar{Z}')\right]^{2m}}. \qquad (2.4.18)$$

由(2.4.17)和引理 2,得

$$
\begin{aligned}
K_{\mathring{S}_I}(Z,\bar Z) &= C\det[J(s)(\bar A'\times A')_K J'(s)J(s)(A\times \bar A)_K J'(s)]\\
&= C\det[J(s)(A'\bar A\times \bar A'A)_K J'(s)]\\
&= C\det\left[J(s)\left(\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\bar Z-Z')\right)^{-1}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar Z')\right)^{-1}\right)_K J'(s)\right],
\end{aligned}
\tag{2.4.19}
$$

其中 $Z\in\mathring{S}_I$，若 $Z\in\mathring{R}_I$，则显然

$$
C_1\det\left[\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\bar Z-Z')\right)^{-1}\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar Z')\right)^{-1}\right]_K
$$

是 $\mathring{R}_I$ 的核函数．因此(2.4.19)式就表明了 $\mathring{S}_I$ 与 $\mathring{R}_I$ 的核函数之间的关系．

根据[Lu4]第 60 页的定理，易得 S_I 的核函数为

$$
K_{S_I}(Z,\bar Z)=C_2\frac{\det\prod_{j=2}\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_{jj}-\bar Z'_{jj})\right]^{-2(m-m_1-m_j)}}{\det\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar Z')\right]^{2m}}.
$$

而 S_I 与 R_I 的核函数之间关系为

$$
K_{S_I}(Z,\bar Z)=C_2\det\left[J(s)\left(\left(\frac{\bar Z-Z'}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\times\left(\frac{\bar Z-Z'}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\right)_K J'(s)\right],
$$

其中 $Z\in S_I$，当 $Z\in R_I$ 时，$\det(\cdots\cdots)_K$ 表 R_I 的核函数．

Ⅳ.4．Hua 度量与 Bergmann 度量

Ⅳ.4.1 由 Hua 度量(华罗庚度量)的定义(见[Lu3]或[Hua 1])可知，$\mathring{S}_I$ 的 Hua 度量方阵为

$$
\begin{aligned}
H_{\mathring{S}_I}(Z,\bar Z) &= \left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{S}_I}\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial Z}}\right)'_{\mathring{S}_I}\\
&= J(s)(A'\times\bar A')_K J'(s)J(s)(\bar A\times A)_K J'(s)\\
&= J(s)(A'\bar A\times\bar A'A)_K J'(s)\\
&= J(s)\left[\left(I-\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\bar Z-Z')\right)^{-1}\right.\\
&\qquad\left.\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar Z')\right)^{-1}\right]_K J'(s)
\end{aligned}
\tag{2.4.20}
$$

其中 $Z\in\mathring{S}_I$，当 $Z\in\mathring{R}_I$ 时，上式中$[\cdots]_K$ 表示$\mathring{R}_I$ 的 Hua 度量方阵，因而(2.4.20)表明了 $\mathring{S}_I$ 与 $\mathring{R}_I$ 的 Hua 度量方阵之间的关系．

若 z 是$\mathring{S}_I$ 中的点 Z 按 S_I 的 b 排列法排成的向量，则 $\mathring{S}_I$ 的 Hua 度

量为

$$
\begin{aligned}
d\sigma^2 &= dzJ(s)(A'\bar{A} \times \bar{A}'A)_K J'(s)\overline{dz} \\
&= dz_1 Q(K)(A'A \times A'A)Q'(K)dz_1' \\
&= dz^*\left(I - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\bar{Z} - Z')\right)^{-1} \times \left(I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - Z')\right)^{-1} dz^{*\prime} \\
&= \operatorname{tr}\left[\left(I - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\bar{Z} - Z')\right)^{-1} dZ\left(I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - Z')\right)^{-1} dZ'\right],
\end{aligned}
\tag{2.4.21}
$$

其中 $Z \in \mathring{S}_{\mathrm{I}}$，而 z_1 与 z^* 是 Z 视作 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 中的点分别按 R_{I} 的 b 排列法和 a 排列法排成的向量. 由于当 Z 属于 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 时(2.4.21)式最后一式就是 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 的 Hua 度量，因此，(2.4.21)式表明 $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$ 的 Hua 度量就等于 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 的 Hua 度量在 $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$ 上的限制.

易知，S_{I} 的 Hua 度量方阵为

$$
H_{S_{\mathrm{I}}}(Z, \bar{Z}) = J(s)\left[\left(\frac{\bar{Z} - Z'}{-2\sqrt{-1}}\right)^{-1} \times \left(\frac{Z - Z'}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\right]_K J'(s)
$$

这也表明了 S_{I} 和 R_{I} 的 Hua 度量方阵间的关系.

S_{I} 的 Hua 度量为

$$
d\sigma^2 = \operatorname{tr}\left[\left(\frac{\bar{Z} - Z'}{-2\sqrt{-1}}\right)^{-1} dZ\left(\frac{Z - Z'}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1} d\bar{Z}'\right],
$$

其中 $Z \in S_{\mathrm{I}}$，因此，S_{I} 的 Hua 度量等于 R_{I} 的 Hua 度量在 S_{I} 上的限制.

Ⅳ.4.2 下面考虑 Bergmann 度量. 设 $Z \in \mathring{S}_{\mathrm{I}}$，则

$$
Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1t} \\ Z_{21} & Z_{22} & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ Z_{t1} & & & Z_{tt} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_t \end{matrix}, \quad
Z_{ij} = \begin{pmatrix} Z^{(ij)}_{11} & Z^{(ij)}_{12} & \cdots & Z^{(ij)}_{1m_j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z^{(ij)}_{m_i1} & Z^{(ij)}_{m_i2} & \cdots & Z^{(ij)}_{m_im_j} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix},
$$

$$
\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_t \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}
$$

令

$$
\frac{\partial}{\partial Z_{ij}} = \left(\frac{\partial}{\partial Z^{(ij)}_{11}}, \frac{\partial}{\partial Z^{(ij)}_{12}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z^{(ij)}_{1m_j}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z^{(ij)}_{m_i1}}, \frac{\partial}{\partial Z^{(ij)}_{m_i2}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z^{(ij)}_{m_im_j}}\right)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{ij}} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}^{(ij)}_{11}}, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}^{(ij)}_{12}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}^{(ij)}_{1m_j}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}^{(ij)}_{m_i1}}, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}^{(ij)}_{m_i2}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}^{(ij)}_{m_im_j}}\right),
$$

再记 $\qquad \partial Z_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial Z_{ij}}, \partial \bar{Z}_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{Z}_{ij}}$，令

$$
\frac{\partial}{\partial z} = (\partial Z_{11}, \partial Z_{12} \cdots, \partial Z_{1t}, \partial Z_{21}, \partial Z_{22}, \partial Z_{31}, \partial Z_{33}, \cdots, \partial Z_{t1}, \partial Z_{tt})
$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}=((\partial \bar Z_{11})',(\partial \bar Z_{12})',\cdots,(\partial \bar Z_{1s})',(\partial \bar Z_{21})',(\partial \bar Z_{22})',\cdots,$$
$$(\partial \bar Z_{s1})',(\partial \bar Z_{ss})')'$$

则 $\mathring{S}_1$ 的 Bergmann 度量方阵可书为

$$T_{\mathring{S}_1}(Z,\bar Z)=\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)\ln K_{\mathring{S}_1}(Z,\bar Z).$$

先求 $T_{\mathring{S}_1}(0,0)$. 将 $\ln K_{\mathring{S}_1}(Z,\bar Z)$ 在原点附近展开:

$$\begin{aligned}\ln K_{\mathring{S}_1} &= -2m\ \ln\det\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar Z')\right)+\sum_{j=2}^{s}2(m-m_1-m_j)\ln\det\\ &\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_{jj}-\bar Z'_{jj})\right)=-2m\left[\operatorname{tr}\frac{Z-\bar Z'}{2\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{Z-\bar Z'}{2\sqrt{-1}}\right)^2+\cdots\right]\\ &+\sum_{j=2}^{s}2(m-m_1-m_j)\left[\operatorname{tr}\frac{Z_{jj}-\bar Z'_{jj}}{2\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{Z_{jj}-\bar Z'_{jj}}{2\sqrt{-1}}\right)^2+\cdots\right]\end{aligned}$$

未写出的项是在计算中为零的项. 经简单计算可知

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{S}_1}}{\partial Z_{ij}\partial \bar Z_{\alpha\beta}}\right|_{Z=0}=0,(i,j)\neq(\alpha,\beta);\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{S}_1}}{\partial Z_{ij}\partial \bar Z_{ij}}\right|_{Z=0}\\ &\qquad=\frac{m}{2}I^{(m_im_j)},\ i\neq j;\\ &\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{S}_1}}{\partial Z_{11}\partial \bar Z_{11}}\right|_{Z=0}=\frac{m}{2}I^{(m_1^2)};\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{S}_1}}{\partial Z_{jj}\partial \bar Z_{jj}}\right|_{Z=0}\\ &\qquad=\frac{1}{2}(m_1+m_j)I^{(m_j^2)},\\ &\qquad j=2,3,\cdots,s.\end{aligned}$$

因此 $T_{\mathring{S}_1}(0,0)$ 不是 λI 的形式,这样 $T_{\mathring{S}_1}(Z,\bar Z)$ 就很难具体表达,为此我们寻找一个变换使得 $\mathring{S}_1$ 经变换后,其 Bergmann 度量方阵在原点之值具 λI 形式. 令

$$\lambda_j=\sqrt{\frac{m}{m_1+m_j}},\qquad j=2,3,\cdots,s. \tag{2.4.22}$$

则此变换为

$$\begin{pmatrix}Z_{11}&Z_{12}&\cdots&Z_{1s}\\ Z_{21}&Z_{22}&&0\\ \vdots&&\ddots&\\ Z_{s1}&0&&Z_{ss}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}Z_{11}&Z_{12}&\cdots&Z_{1s}\\ Z_{21}&\lambda_2Z_{22}&&0\\ \vdots&&\ddots&\\ Z_{s1}&0&&\lambda_sZ_{ss}\end{pmatrix}=Z \tag{2.4.23}$$

$\mathring{S}_{\mathrm{I}}$变为 $S_{\mathrm{I}}(\lambda): I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-Z')>0$,其中 Z 如(2.4.23)所示.易知 $S_{\mathrm{I}}(\lambda)$的核函数为

$$K_{S_{\mathrm{I}}(\lambda)}(Z,\bar{Z})=C_3\frac{\det\prod_{j=2}^{s}\left[I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\lambda_j Z_{jj}-\lambda_j\bar{Z}'_{jj})\right]^{2(m-m_1-m_j)}}{\det\left[I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right]^{2m}}$$

其中 $Z\in S_{\mathrm{I}}(\lambda)$.易知 $S_{\mathrm{I}}(\lambda)$的 Bergmann 度量方阵在原点之值为$\frac{m}{2}I$.

下面计算 $S_{\mathrm{I}}(\lambda)$的 Bergmann 度量方阵.由于 $S_{\mathrm{I}}(\lambda)$的任一点 Z_0 映为原点的 $S_{\mathrm{I}}(\lambda)$的解析自同胚为

$$W=A\left(Z-\frac{1}{2}(Z_0+\bar{Z}'_0)+\mathrm{i}I\right)A'-\mathrm{i}I,$$

$$(\bar{A}'A)^{-1}=I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_0-Z'_0). \tag{2.4.24}$$

将 W,Z 中的元素(连同因子 λ_j 在内)按 S_{I} 的 b 排列法分别排成 $\tilde{w}$ 与 $\tilde{z}$,则(2.4.24)可书为

$$\tilde{w}=\tilde{z}J(s)(A'\times A')_K J'(s)+\text{常数项}, \tag{2.4.25}$$

若将 W,Z 中的元素(不包括因子 λ_j 在内)按 S_{I} 的 b 排列法分别排成 w 与 z,则有关系

$$\tilde{w}=w\bar{I}_\lambda,\quad \tilde{z}=z\bar{I}_\lambda.$$

以此代入(2.4.25)式则有

$$w=z\bar{I}_\lambda J(s)(A'\times\bar{A}')_K J'(s)\bar{I}_\lambda'^{-1}+\text{常数项}.$$

但 $\quad \bar{I}_\lambda J(s)=J(s,\lambda)=J(s)I_\lambda, J'(s)\bar{I}_\lambda'^{-1}=I_\lambda'^{-1}J'(s). \quad (2.4.26)$

其中 $\quad \bar{I}_\lambda=[I^{(m_1^2)},I^{(m_1m_2)},\cdots,I^{(m_1m_s)},I^{(m_2m_1)},\lambda_2 I^{(m_2^2)},\cdots,$

$I^{(m_sm_1)},\lambda_s I^{(m_s^2)}]$为对角矩阵,

$\bar{I}_\lambda^{-1}$是 $\bar{I}_\lambda$ 中将λ_j 换为λ_j^{-1} 而得的对角矩阵.

$I_\lambda=[I^{(m_1^2)},I^{(m_1m_2)},\cdots,I^{(m_1m_s)},I^{(m_2m_1)},\lambda_2 I^{(m_2^2)},\cdots,$

$I^{(m_2m_s)},\cdots,I^{(m_sm_1)},I^{(m_sm_2)},\cdots,\lambda_s I^{(m_s^2)}]$为对角矩阵,

I_λ^{-1}是 I_λ 中将λ_j 换为λ_j^{-1} 而得的对角矩阵.

因此变换(2.4.24)的函数矩阵为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{S_{\mathrm{I}}(\lambda)}=\bar{I}_\lambda J(s)(A'\times\bar{A}')_K J'(s)\bar{I}_\lambda'^{-1}$$

由此得 $S_{\mathrm{I}}(\lambda)$的 Bergmann 度量方阵为

$$T_{S_{\mathrm{I}}(\lambda)}(Z,Z)=\frac{m}{2}\bar{I}_{\lambda}J(s)(A'\times\bar{A}')_{K}I_{\lambda}^{-2}(\bar{A}\times A)J'(s)\bar{I}'_{\lambda},$$

其中 $Z\in S_{\mathrm{I}}(\lambda)$,若 $R_{\mathrm{I}}(\lambda)$是下面的域:

$$I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-Z')>0,\ Z=\begin{pmatrix}Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s}\\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{ss}\end{pmatrix},$$

上式表示了 $R_{\mathrm{I}}(\lambda)$与 $S_{\mathrm{I}}(\lambda)$的 Bergmann 度量方阵之间的关系.

$S_{\mathrm{I}}(\lambda)$的 Bergmann 度量为

$$\mathrm{d}s^2=\frac{m}{2}\mathrm{d}zJ(s)I_{\lambda}(A'\times\bar{A}')_{K}I_{\lambda}^{-2}(\bar{A}\times A)_{K}I'_{\lambda}J'(s)\mathrm{d}\bar{z}',$$

对 Hua 度量而言,$S_{\mathrm{I}}(\lambda)$的(或 S_{I}, $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$ 的)Hua 度量等于 $R_{\mathrm{I}}(\lambda)$(或 R_{I}, $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$)在 $S_{\mathrm{I}}(\lambda)$(或 S_{I}, $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$)上的限制.因此,虽然 Hua 度量与 Bergmann 度量在本质上并无差别,但 Hua 度量要方便一些.

本节内容来自[YW19,YW20].

V. 非对称第一类 Siegel 齐性域的西几何(2)

本文这部分讨论非对称可递域 S_{II} 的西几何,得到了域 S_{II} 与对称典型域 R_{I} 在核函数、Hua 度量、Bergmann 度量方面的关系式.

V.1. 非对称可递域 S_{II} 及其运动群

V.1.1 考虑 $m\times m$ 实对称方阵 Y,分块如下:

$$Y=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1s}\\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Y_{s1} & Y_{s2} & \cdots & Y_{ss}\end{pmatrix}\begin{matrix}m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_s\end{matrix},\quad Y=Y',\ m=m_1+m_2+\cdots+m_s,$$
$$\qquad\quad m_1\qquad m_2\qquad\cdots\qquad m_s$$

取正整数 $k_i(i=1,2,\cdots,l)$使得 $1<k_1<k_2<\cdots<k_l<s$.令

$$Y_{k_ij}=0,\ j>k_i,\ i=1,2,\cdots,l,$$

这种方阵 Y 所成集合记为 $S\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$,令

$$V_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix}m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$$

$$=\left\{Y \mid Y>0, Y\in S\begin{bmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}\right\}$$

这是仿射齐性的非自共轭锥,其运动群为

$$Y \to AYA',$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, \quad A_{k_i j}=0, j>k_i, i=1,2,\cdots,l.$$
$$\quad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

此运动群或所有这种矩阵 A 的集合记为 $G_{\text{II}}\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l, \end{bmatrix}$.

记 $C\begin{bmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_l, \end{bmatrix}$ 为如下形式的 $m\times m$ 复方阵 Z 所成集合:

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, \quad \begin{matrix} Z_{k_i j}=0, Z_{jk_i}=0, \\ j>k_i, i=1,2\cdots,l. \end{matrix}$$
$$\quad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

定义 $S_{\text{II}}\begin{bmatrix} m_1, & m_2 & \cdots, & m_s \\ k_1, & k_2 & \cdots, & k_l, \end{bmatrix}$ 就是以 $V_{\text{II}}\begin{bmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$ 为底的第一类 Siegel 域,

此即 $S_{\text{II}}\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$

$$=\left\{Z \mid \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0, Z\in C\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots & k_l \end{bmatrix}\right\}.$$

当 $l>0$ 时,S_{II} 为非对称可递域并解析等价于有界域,它容许如下形式的解析自同胚群 Γ^{II}:

$$W=AZA'+B, B\in S\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix},$$

$$A\in G_{\text{II}}\begin{bmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_l \end{bmatrix},$$

它不是最大群,但却是一个可递群,将 S_{II} 的任一点 Z_0 映为 $\mathrm{i}I$ 的 S_{II} 的解析自同胚为

$$W=A\left(Z-\frac{1}{2}(Z_0+Z'_0)\right)A',(A'A)^{-1}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_0-\bar{Z}'_0).$$

例如，若$(k_1, k_2, \cdots, k_l)=(2, 3, \cdots, s-1)$，则$S_{\text{II}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s \\ 2, & 3, & \cdots, & s-1 \end{pmatrix}$中的点$Z$，$G_{\text{II}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2 & \cdots, & m_s \\ 2, & 3, & \cdots, & s-1 \end{pmatrix}$中的矩阵$A$分别有如下形式：

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z'_{21} & Z_{22} & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ Z'_{s1} & & & Z_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, \quad A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{matrix}$$

本文这部分就只考虑域$S_{\text{II}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s \\ 2, & 3, & \cdots, & s-1 \end{pmatrix}$，以后此域就简记为$S_{\text{II}}$.

V.1.2 定义 1. 将$m\times n$的矩阵Z的元素按其行向量的自然顺序排成mn维空间中的一向量z，另外将Z的转置矩阵Z'的元素按Z'的行向量的自然顺序排成另一向量z^*，则存在惟一的仅与m,n有关的排列方阵$P(m,n)$使得

$$z^*=zP(m,n),$$

我们称$P(m,n)$为$m\times n$矩阵Z的过渡矩阵。

例如 $Z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \end{pmatrix}$，则$z=(z_{11},z_{12},z_{13},z_{21},z_{22},z_{23})$，$z^*=(z_{11},z_{21},z_{12},z_{22},z_{13},z_{23})$，因而有

$$P(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 2. 设p阶对称方阵Z，改写为

$$Z=\begin{pmatrix} z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}z_{1p} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}z_{21} & z_{22} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}z_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}z_{p1} & \frac{1}{\sqrt{2}}z_{p2} & \cdots & z_{pp} \end{pmatrix}, z_{\alpha\beta}=z_{\beta\alpha},$$

这称为 p 阶对称方阵规范化.将 Z 的各元素(连同因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 在内)按其行向量的自然顺序排成一向量 z^*,而令

$$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1p},z_{22},z_{23},\cdots,z_{2p},\cdots,z_{pp}),$$

则存在惟一的仅与 p 有关的矩阵 $Q(p)$ 使得

$$z^*=zQ(p).$$

我们称 $Q(p)$ 为 p 阶对称方阵 Z 的伸缩矩阵.

例如,若 $p=2$,则

$$z^*=\left(z_{11},\frac{1}{\sqrt{2}}z_{12},\frac{1}{\sqrt{2}}z_{12},z_{22}\right),$$

$$z=(z_{11},z_{12},z_{22}),$$

所以

$$Q(2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V.1.3 考虑 $R_{\mathrm{I}}(m):\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0$ 及 $R_{\mathrm{II}}(m):\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0, Z=Z'$. 其中的点 Z 分别具有以下形式

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix};$$
$$\quad\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{matrix}$$

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1s} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{12} & Z_{22}, & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{1s} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{2s} & \cdots & Z_{ss} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix} \quad \begin{matrix} Z_{jj}=Z'_{jj} \\ j=1,2,\cdots,s. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{matrix}$$

对 $Z\in S_{\rm II}$，将 Z 规范化，即

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1s} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{12} & Z_{22}, & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{1s} & 0 & & Z_{ss} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{matrix}$$

$$Z_{jj}=Z'_{jj}=\begin{pmatrix} Z_{11}^{(jj)} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12}^{(jj)} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1m_j}^{(jj)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12}^{(jj)} & Z_{22}^{(jj)} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{2m_j}^{(jj)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1m_j}^{(jj)} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{2m_j}^{(jj)} & \cdots & Z_{m_jm_j}^{(jj)} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}. \tag{2.5.1}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}$$

$R_{\rm II}(m)$中的 $Z_{(jj)}$ 与此之 Z_{jj} 相同形式，显然 $S_{\rm II}$ 是 $R_{\rm I}$ 的子流形，也是 $R_{\rm II}$ 的子流形.

将 $R_{\rm I}$ 的点 Z 的元素按其行向量的自然顺序排成 m^2 维空间中的向量 z^*，称为 $R_{\rm I}$ 的 a 排列法. 若先将 Z_{ij} 的元素按 Z_{ij} 的行向量的自然顺序排成向量 z_{ij}，再令

$$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1s},z_{21},z_{22},\cdots,z_{2s},\cdots,z_{s1},z_{s2},\cdots,z_{ss}),$$

这称为 $R_{\rm I}$ 的 b 排列法.

将 $R_{\rm II}$ 的规范化的点 Z 的元素$\left(\text{不包括因子}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$在主对角线以上者(包括主对角线)，按 Z 的行的自然顺序排成$\frac{m}{2}(m+1)$维空间中一向量，

这称为 R_{II} 的 a 排列法. 若先将 $Z_{ij}(i<j)$ 的元素按 Z_{ij} 的行向量的自然顺序排成向量 z_{ij}，再将 Z_{jj} 的主对角线上方（包括主对角线）的元素$\left(\text{不包括因子}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$按 Z_{jj} 的行的自然顺序排成$\frac{m_j}{2}(m_j+1)$维空间中的向量 z_{jj}，最后令

$$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1s},z_{22},z_{23}\cdots,z_{2s},\cdots,z_{ss}),$$

这称为 R_{II} 的 b 排列法.

对 S_{II} 中的规范化的 Z，首先将 $Z_{1j}(j=2,3,\cdots,s)$ 的元素按 Z_{1j} 的行向量的自然顺序排成向量 z_{1j}，再将 $Z_{jj}(j=1,2,\cdots,s)$ 的主对角线上方（包括主对角线）的元素$\left(\text{不包括因子}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$按 Z_{jj} 的行的自然顺序排成向量 z_{jj}，最后令

$$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1s},z_{22},z_{33}\cdots,z_{ss}),$$

这称为 S_{II} 的 b 排列法.

由于 S_{II} 中的点 Z 也可看作是 R_{II} 中的点，将 Z 按 S_{II} 与 R_{II} 的 b 排列法分别排成 z 与 z_2，则有

$$z_2=zI(s),$$

其中 $I(s)=(I_{11},I_{12},\cdots,I_{1s},I_{22},I_{23},\cdots,I_{2s},\cdots,I_{ss})$，$I(s)$ 的行分成 $2s-1$ 块，其顺序为

$$(1,1),(1,2),\cdots,(1,s),(2,2),(3,3),\cdots,(s,s).$$

这样 $I(s)$ 可描述如下：

I_{1j} 的第 $(1,j)$ 块为 $I^{(m_1m_j)}$，其余块为零 $(j=2,\cdots,s)$；

I_{jj} 的第 (j,j) 块为 $I^{(\frac{1}{2}m_j(m_j+1))}$，其余块为零 $(j=1,2,\cdots,s)$；

其余的 $I_{ij}=0$.

R_{II} 中的点 Z 也是 R_{I} 中的点，按 R_{II}，R_{I} 的 b 排列法分别排成 $\tilde{z}_2$ 与 z_1^*，则有

$$z_1^*=\tilde{z}_2J(s). \tag{2.5.2}$$

其中 $J(s)=(J_{11},J_{12},\cdots,J_{1s},J_{21},J_{22},\cdots,J_{2s},\cdots,J_{s1},J_{s2},\cdots,J_{ss})$，$J(s)$ 的行分成$\frac{1}{2}s(s+1)$块，其顺序为

$$(1,1),(1,2),\cdots,(1,s),(2,2),(2,3),\cdots,(2,s),\cdots,(s,s),$$

这样 $J(s)$ 可如下描述：

J_{jj} 的第 (j,j) 块为 $Q(m_j)$（$Q(m_j)$ 是 m_j 阶对称方阵的伸缩矩阵），其余块为零，$j=1,2,\cdots,s$；

$J_{ij}(i<j)$的第(i,j)块为$\frac{1}{\sqrt{2}}I^{(m_i m_j)}$,其余块为零;

$J_{ji}(i<j)$的第(i,j)块为$\frac{1}{\sqrt{2}}P(i,j)$ ($P(i,j)$为 $m_i\times m_j$ 矩阵Z_{ij}的过渡矩阵),其余块为零。

由于 S_{II}的点 z 也可看作R_{I}的点,按 R_{I}的 b 排列法排成 z_1,同时,按 R_{II},S_{II}的 b 排列法分别排成 z_2 与 z,则有

$$z_1=z_2J(s),z_2=zI(s),\Rightarrow z_1=zI(s)J(s).$$

令

$$P(s)=I(s)J(s), \tag{2.5.3}$$

则得

$$z_1=zP(s).$$

易见 $P(s)$就是 R_{I}对其子流形 S_{II}的函数方阵,它在讨论 R_{I}与 S_{II}的关系中起重要作用.

V.2. 引　　理

这里$(A\times B)_K$ 仍表矩阵A 与B 的分块直乘积,其定义见上一节。

引理 1. 设 A'与D 皆属于$G_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix}m_1, & m_2, & \cdots, & m_{2n+1}\\ 2, & 3, & \cdots, & 2n\end{pmatrix}$,令

$$I_n=\begin{pmatrix}I & 0 & & & & & \\ & & I & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & I & 0\\ & & & & & & I\end{pmatrix}\begin{matrix}m_1\\ m_3\\ \vdots\\ m_{2n-1}\\ m_{2n+1}\end{matrix}$$
$$\quad m_1\ m_2\ m_3\ m_4\ \cdots\ m_{2n+1}$$

则有

$$(I_nAI'_n)(I_nDI'_n)=I_nADI'_n.$$

证:

$$AD=\begin{pmatrix}A_{11} & D_{11} & A_{11} & D_{12} & \cdots & A_{11} & D_{1\,2n+1}\\ A_{21} & D_{11} & A_{21} & D_{12} & \cdots & A_{21} & D_{2\,2n+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ A_{2n+1\,1} & D_{11} & A_{2n+1\,1} & D_{12} & \cdots & A_{2n+1\,1} & D_{2n+1}\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0 & & & \\ & A_2D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{2n+1}D_{2n+1}\end{pmatrix}$$

其中 A_j, D_j 表 A_{jj}, D_{jj}，而 $I_nADI'_n$ 等于将 AD 的偶数行与偶数列去掉之后而得的矩阵，即

$$I_nADI'_n=\begin{pmatrix}A_{11}D_{11} & A_{11}D_{13} & \cdots & A_{11}D_{1\,2n+1}\\ A_{31}D_{11} & A_{31}D_{13} & \cdots & A_{31}D_{1\,2n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{2n+1\,1}D_{11} & A_{2n+1\,1}D_{13} & \cdots & A_{2n+1\,1}D_{1\,2n+1}\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & A_3D_3 & & & \\ & & A_5D_5 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{2n+1}D_{2n+1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11} & & & \\ A_{31} & A_{33} & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ A_{2n+1\,1} & 0 & & A_{2n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{11} & D_{13} & \cdots & D_{1\,2n+1}\\ & D_{33} & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & & D_{2n+1}\end{pmatrix}$$

$$=(I_nAI'_n)(I_nDI'_n).$$

引理证毕．

若 $A\in G_{\mathrm{II}}\begin{pmatrix}m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ 2, & 3, & \cdots, & s-1\end{pmatrix}$，$J(s)$ 如(2.5.2)所述，我们看一下 $J(s)(A'\dot{\times}A')_K J'(s)$ 具有什么样的形状．由于

$$(A'\dot{\times}A')_K=\begin{pmatrix}(A'_{11}\dot{\times}A')_K & & & \\ (A'_{12}\dot{\times}A')_K & (A'_{22}\dot{\times}A')_K & & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \\ (A'_{1s}\dot{\times}A')_K & & & (A'_{ss}\dot{\times}A')_K\end{pmatrix},$$

$$(A'_{ij}\dot{\times}A')_K=\begin{pmatrix}A'_{ij}\dot{\times}A'_{11} & & & \\ A'_{ij}\dot{\times}A'_{12} & A'_{ij}\dot{\times}A'_{22} & & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \\ A'_{ij}\dot{\times}A'_{1s} & & & A'_{ij}\dot{\times}A'_{ss}\end{pmatrix}.$$

这样，$(A'\dot{\times}A')_K$ 的行与列都被分成 s^2 块，其顺序为

$(1,1),(1,2),\cdots,(1,s),(2,1),(2,2),\cdots,(2,s),\cdots,$

$(s,1)(s,2),\cdots,(s,s),$

将$(A'\times A')_K$的第(j,j)行乘以$Q(m_j)$，第(j,j)列乘以$Q'(m_j)$ $(j=1,2,\cdots,s)$；其第(i,j)行乘$\frac{1}{\sqrt{2}}$再加上$\frac{1}{\sqrt{2}}P(i,j)$乘第(j,i)行，其第(i,j)列乘$\frac{1}{\sqrt{2}}$再加上第(j,i)列乘$\frac{1}{\sqrt{2}}P'(i,j)$ $(i<j,i=1,2,\cdots,s)$；然后再去掉(i,j)行与(i,j)列$(i>j,j=1,2,\cdots,s-1)$，这余下的矩阵就是$J(s)(A'\times A')J'(s)$，将它重新进行分块：将第$(1,1),(1,2),\cdots,(1,s),(2,2)$行分成第1块，第$(2,3),(2,4)\cdots,(2,s)$行分成第2块，第$(3,3)$行分成第3块，第$(3,4),(3,5),\cdots,(3,s)$行分成第4块，第$(4,4)$行分成第5块，…，第$(s-1,s-1)$行分成第$2s-5$块，第$(s-1,s)$行分成第$2s-4$块，第$(s,s)$行分成第$2s-3$块．将列也作同样分块，设行的第$i$块有$n_i$行，列的第$i$块有$n_i$列，则有如下形状：

$$J(s)(A'\times A')_K J'(s)=\begin{pmatrix} *_{11} & & & \\ *_{21} & *_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ *_{2s-3\,1} & & 0 & *_{2s-3} \end{pmatrix}\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{2s-3} \end{matrix} \qquad (2.5.4)$$
$$\qquad\qquad n_1 \qquad n_2 \qquad \cdots \qquad n_{2s-3}$$

将$I(s)$作相应的分块，有

$$I(s)=\begin{pmatrix} I & 0 & & & \\ & I & 0 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & 0 \\ & & & & I \end{pmatrix}\begin{matrix} n_1 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_{2s-5} \\ n_{2s-3} \end{matrix} = I_{s-2}.$$
$$\qquad n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad n_{2s-3}$$

引理2. 设B与D为m阶实方阵，有相同的分块：

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}, \quad D=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1s} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{s1} & D_{s2} & \cdots & D_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix},$$
$$m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s \qquad\qquad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

$J(s)$如(2.5.2)所示，则有

$$J(s)(B'\dot{\times}B')_K J'(s) J(s)(D'\dot{\times}D')_K J'(s)$$
$$= J(s)(B'D'\dot{\times}B'D')_K J'(s).$$

证： 设 $W = BZB'$，若 $Z \in R_{II}$，则此变换为 R_{II} 的解析自同坯，将 W, Z 皆规范化，并视作 R_I 的点而按 R_I 的 b 排列法分别排成向量 w_1 与 z_1，则上述变换可书为

$$w_1 = z_1(B'\dot{\times}B')_K.$$

将 W, Z 按 R_{II} 的 b 排列法排成 w_2 与 z_2，则有

$$w_1 = w_2 J(s),\ z_1 = z_2 J(s),$$

因此有

$$w_2 = z_2 J(s)[B'\dot{\times}B']_K J'(s). \tag{2.5.5}$$

若 W, Z 按 R_{II} 的 a 排列法排成 w 与 z，则存在排列方阵 Q_2 使得

$$w_2 = wQ_2,\ z_2 = zQ_2, \tag{2.5.6}$$

而上述解析自同坯可书为

$$w = z[B'\dot{\times}B']_s, \tag{2.5.7}$$

$[B'\dot{\times}B']_s$ 表矩阵的对称直乘积. 因此，以(2.5.6)代入(2.5.5)得

$$w = zQ_2 J(s)[B'\dot{\times}B']_K J'(s) Q'_2,$$

由上式及(2.5.7)得

$$[B'\dot{\times}B']_s = Q_2 J(s)[B'\dot{\times}B']_K J'(s) Q'_2,$$

此即

$$Q'_2(B'\dot{\times}B')_s Q_2 = J(s)(B'\dot{\times}B')_K J'(s).$$

同样可得关系式

$$Q'_2(D'\dot{\times}D')_s Q_2 = J(s)(D'\dot{\times}D')_K J'(s),$$
$$Q'_2(B'D'\dot{\times}B'D')_s Q_2 = J(s)(B'D'\dot{\times}B'D')_K J'(s).$$

由于

$$Q'_2(B'\dot{\times}B')_s Q_2 Q'_2(D'\dot{\times}D')_s Q_2 = Q'_2(B'D'\dot{\times}B'D')_s Q_2. \tag{2.5.8}$$

(2.5.8)式右端 $= J(s)(B'D'\dot{\times}B'D')_K J'(s)$，

(2.5.8)式左端 $= J(s)(B'\dot{\times}B')_K J'(s) J(s)(D'\dot{\times}D')_K J'(s)$.

因此引理得证.

引理 3. 设 A', B 皆属于 $G_{II}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s \\ 2, & 3, & \cdots, & s & 1 \end{pmatrix}$，$P(s)$ 如

(2.5.3)所示,则有

$$P(s)(A'\times A')_K P'(s)P(s)(B\times B)_K P'(s)$$
$$=P(s)(A'B\times A'B)_K P'(s).$$

证: 如前所述,$J(s)(A'\times A')_K J'(s)$具(2.5.4)之形式,这可取为引理1中之$A'$,对$J(s)(B\times B)_K J'(s)$,作引理2之前的同样处理,则$J(s)(B\times B)_K J'(s)$,具有与(2.5.4)所示矩阵的转置矩阵的形式,这可取之为引理1中之D,而$P(s)=I(s)J(s)$,将$I(s)$重新分块为I_{s-2},则由引理1即得本引理. 证毕.

V.3. 核 函 数

作平移$Z=Z-\mathrm{i}I$,S_{II}变为$\mathring{S}_{\mathrm{II}}: I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0$,

$$Z\in C\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s\\ 2,3,\cdots,s+1\end{pmatrix},$$

$Z-Z'$已规范化. 将$\mathring{S}_{\mathrm{II}}$的任一点$Z_0$变为原点的$\mathring{S}_{\mathrm{II}}$的解析自同胚为

$$W=A\left(Z-\frac{1}{2}(Z_0+Z'_0)+\mathrm{i}I\right)A'-\mathrm{i}I,$$
$$(A'A)^{-1}=I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_0-\bar{Z}'_0). \tag{2.5.9}$$

$R_{\mathrm{I}}, R_{\mathrm{II}}$在平移下分别变为$\mathring{R}_I: I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0$及$\mathring{R}_{\mathrm{II}}: I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\times(Z-\bar{Z}')>0$, $Z=Z'$且已规范化. 易见$\mathring{S}_{\mathrm{II}}$是$\mathring{R}_I$及$\mathring{R}_{\mathrm{II}}$的子流形. $\mathring{R}_I$对$\mathring{S}_{\mathrm{II}}$的函数矩阵仍为$P(s)$,而且当$Z$在$\mathring{R}_I$变化时,(2.5.9)就是$\mathring{R}_I$的解析自同胚. 当$Z$在$\mathring{R}_{\mathrm{II}}$内变化时,(2.5.9)就是$\mathring{R}_{\mathrm{II}}$的解析自同胚.

对$\mathring{S}_{\mathrm{II}}$中的点$W$与$Z$按$\mathring{S}_{\mathrm{II}}$的b排列法排成$w, z$;也可作为$\mathring{R}_I$中的点按$\mathring{R}_I$的b排列法排成$w_1$与$z_1$,同样,可按$R_I$的a排列法排成$w_1^*$与$z_1^*$. W, Z作为$\mathring{R}_{\mathrm{II}}$的点可按$R_{\mathrm{II}}$的b排列法排成$w_2$与$z_2$. 这样有如下关系:

$$w_1^*=w_1Q(K),\ z_1^*=z_1Q(K),\ w_1=w_2J(s),\ z_1=z_2J(s),$$
$$w_2=wI(s),\ z_2=zI(s). \tag{2.5.10}$$

而(2.5.9)可书为

$$w_1^*=z_1^*(A'\times A')+常数项. \tag{2.5.11}$$

将(2.5.10)代入上式得

$$w = zI(s)J(s)Q(K)(A'\dot{\times}A')Q'(K)J'(s)I'(s) + \text{常数项}$$
$$= zP(s)(A'\dot{\times}A')_K P'(s) + \text{常数项}.$$

因此，$\hat{S}_{\mathrm{II}}$的变换(2.5.9)的函数矩阵为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\hat{S}_{\mathrm{II}}} = P(s)(A'\dot{\times}A')_K P'(s). \qquad (2.5.12)$$

另一方面，W,Z 的元素按 S_{II} 的 b 排列法排序，经直接计算有

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{S_{\mathrm{II}}}$$
$$= \begin{pmatrix} (A'_{11}\dot{\times}A'_{11})_s & & & & & & 0 \\ & A'_{11}\dot{\times}A'_{22} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A'_{11}\dot{\times}A'_{ss} & & & \\ & * & & & (A'_{22}\dot{\times}A'_{22})_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (A'_{ss}\dot{\times}A'_{ss})_s \end{pmatrix}$$

因此得

$$\det\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\hat{S}_{\mathrm{II}}} = |A_{11}|^{m+1}|A_{22}|^{m_1+m_2+1}\cdots|A_{ss}|^{m_1+\cdots+m_s+1}$$
$$= |A_{11}|^{m+1}|A_{22}|^{-(m-m_1-m_2)}\cdots|A_{ss}|^{-(m-m_1-\cdots-m_s)}$$

由(2.5.9)及 $Z_0 \in C\begin{Bmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s \\ 2, & 3, & \cdots, & s-1 \end{Bmatrix}$，$Z_0 = Z'_0$ 可知

$$|A'_{jj}A_{jj}| = \det\left(I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z^0_{jj} - \bar{Z}^{0'}_{jj})\right)^{-1}, \quad j = 2,3,\cdots,s.$$

根据[Lu4]第 114 页的定理，并令 $Z_0 = Z$，可得 $\hat{S}_{\mathrm{II}}$ 的核函数为

$$K_{\hat{S}_{\mathrm{II}}}(Z,\bar{Z}') = C\det\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\hat{S}_{\mathrm{II}}}\det\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)}'_{\hat{S}_{\mathrm{II}}}$$
$$= C\frac{\det\prod_{j=2}^{s}\left[I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_{jj} - \bar{Z}'_{jj})\right]^{m-m_1-\cdots-m_j}}{\det\left[I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - \bar{Z}')\right]^{m+1}}.$$

由(2.5.12)及引理 3 得

$$K_{\hat{S}_{\mathrm{II}}}(Z,\bar{Z}') = C\det[P(s)(A'\dot{\times}A')_K P'(s)P(s)(\bar{A}\dot{\times}\bar{A})_K P'(s)]$$
$$= C\det[P(s)(A'\bar{A}\dot{\times}A'\bar{A})_K P'(s)]$$

$$= C\det\left|P(s)\left[\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right)^{-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right)^{-1}\right]_K P'(s)\right|, \qquad (2.5.13)$$

其中 $Z\in \mathring{S}_{\mathrm{II}}$. 而 $C_1\det\left[\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right)^{-1}\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right)^{-1}\right]_K$ 是 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 的核函数在 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 上的限制,因而(2.5.13)表明了 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 与 $\mathring{S}_{\mathrm{I}}$ 的核函数之间的关系.

根据[Lu4]第 60 页的定理,易得 S_{II} 的核函数为

$$K_{S_{\mathrm{II}}}(Z,\bar{Z})=C_2\frac{\det\prod_j\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_{jj}-\bar{Z}'_{jj})\right]^{m-m_j-m_j}}{\det\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right]^{m+1}},$$

而 S_{II} 与 R_I 的核函数之间的关系为

$$K_{S_{\mathrm{II}}}(Z,\bar{Z})=C_2\det\left[P(S)\left(\left(\frac{Z-\bar{Z}'}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\times\left(\frac{Z-\bar{Z}'}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\right)_K P'(s)\right],$$

其中 $Z\in S_{\mathrm{II}}$.

V.4. Hua 度量与 Bergmann 度量

V.4.1 由 Hua 度量(华罗庚度量)的定义(见[Lu3]或[Hua1])可知,$\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 的 Hua 度量方阵为

$$\begin{aligned}H_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}(Z,\bar{Z}) &= \left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)'_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}}\\ &= P(s)(A'\times A')_K P'(s)P(s)(\bar{A}\times\bar{A})_K P'(s)\\ &= P(s)(A'\bar{A}\times A'\bar{A})_K P'(s)\\ &= P(s)\left[\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right)^{-1}\right.\\ &\quad\left.\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right)^{-1}\right]_K P'(s),\end{aligned}\qquad (2.5.14)$$

其中 $Z\in \mathring{S}_{\mathrm{II}}$,而$\left[\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right)^{-1}\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right)^{-1}\right]_K$ 表示 $\mathring{R}_I$ 的 Hua 度量方阵在 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 上的限制. 因此(2.5.14)表明了 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 与 $\mathring{R}_I$ 的 Hua 度量方阵之间的关系.

若 z 是 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 中的点按 S_{II} 的 b 排列法排成的向量,则 $\mathring{S}_I$ 的 Hua 度量为

$$\begin{aligned}d\sigma^2 &= dzP(s)(A'\bar{A}\times A'\bar{A})_K P'(s)\overline{dz}'\\ &= dz_2 J(s)(A'\bar{A}\times A'\bar{A})J'(s)\overline{dz'_2}\end{aligned}$$

$$= \mathrm{d}z_1 Q(K)(A'A \times A'A) Q'(K) \mathrm{d}z'_1$$
$$= \mathrm{d}z_1^* (A'A \times A'A) \overline{\mathrm{d}z'^*_1}$$
$$= \mathrm{d}z_1^* \left[\left(I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - Z') \right)^{-1} \times \left(I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - Z') \right)^{-1} \right] \overline{\mathrm{d}z'^*_1}$$
$$= \mathrm{tr}\left[\left(I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - Z') \right)^{-1} \mathrm{d}Z \left(I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - Z') \right)^{-1} \mathrm{d}\bar{Z}' \right], \tag{2.5.15}$$

其中 $Z \in \mathring{S}_{\mathrm{II}}$.(2.5.15)表明 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 的 Hua 度量等于 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 的 Hua 度量在 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 上的限制.

易知 S_{II} 的 Hua 度量方阵为

$$H_{S_{\mathrm{II}}}(Z, \bar{Z}) = P(s) \left[\left(\frac{Z - \bar{Z}'}{2\sqrt{-1}} \right)^{-1} \times \left(\frac{Z - \bar{Z}'}{2\sqrt{-1}} \right)^{-1} \right]_K P'(s),$$

这也表明了 S_{II} 与 R_{I} 的度量方阵间的关系.

S_{II} 的 Hua 度量为

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{tr}\left[\left(\frac{Z - \bar{Z}'}{2\sqrt{-1}} \right)^{-1} \mathrm{d}Z \left(\frac{Z - \bar{Z}'}{2\sqrt{-1}} \right)^{-1} \mathrm{d}\bar{Z}' \right],$$

其中 $Z \in S_{\mathrm{II}}$,因此 S_{II} 的 Hua 度量等于 R_{I} 的 Hua 度量在 S_{II} 上的限制.

V.4.2 下面考虑 Bergmann 度量. 设 $Z \in \mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 且如(2.5.1)所示,记

$$Z_{1j} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{(1j)} & Z_{12}^{(1j)} & \cdots & Z_{1m_j}^{(1j)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m_1 1}^{(1j)} & Z_{m_1 2}^{(1j)} & \cdots & Z_{m_1 m_j}^{(1j)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}, \quad j = 2, 3, \cdots, s.$$
$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}$$

令

$$\frac{\partial}{\partial Z_{1j}} = \left(\frac{\partial}{\partial Z_{11}^{(1j)}}, \frac{\partial}{\partial Z_{12}^{(1j)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z_{1m_j}^{(1j)}}, \frac{\partial}{\partial Z_{21}^{(1j)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z_{2m_j}^{(1j)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z_{m_1 1}^{(1j)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z_{m_1 m_j}^{(1j)}} \right)',$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{1j}} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{11}^{(1j)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{1m_j}^{(1j)}}, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{21}^{(1j)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{2m_j}^{(1j)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{m_1 1}^{(1j)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{m_1 m_j}^{(1j)}} \right)',$$
$$j = 2, 3, \cdots, s. \qquad \text{记} \ \partial Z_{ij} = \frac{\partial}{\partial Z_{ij}}, \ \partial \bar{Z}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{ij}},$$
$$\frac{\partial}{\partial Z_{ii}} = \left(\frac{\partial}{\partial Z_{11}^{(ii)}}, \frac{\partial}{\partial Z_{12}^{(ii)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z_{1m_i}^{(ii)}}, \frac{\partial}{\partial Z_{22}^{(ii)}}, \frac{\partial}{\partial Z_{23}^{(ii)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z_{2m_i}^{(ii)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Z_{m_i m_i}^{(ii)}} \right)',$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{ii}} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{11}^{(ii)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{1m_i}^{(ii)}}, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{22}^{(ii)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{2m_i}^{(ii)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{m_i m_i}^{(ii)}} \right)'$$
$$i = 1, 2, \cdots, s.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=(\partial Z_{11},\partial Z_{12},\cdots,\partial Z_{1s},\partial Z_{22},\partial Z_{33},\cdots,\partial Z_{ss}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=((\partial \bar{Z}_{11})',(\partial \bar{Z}_{12})',\cdots,(\partial \bar{Z}_{1s})',(\partial \bar{Z}_{22})',(\partial Z_{33})',\cdots,(\partial \bar{Z}_{ss})')',$$

则 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 的 Bergmann 度量方阵可书为

$$T_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}(Z,\bar{Z})=\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)(\ln K_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}(Z,\bar{Z})).$$

先求 $T_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}(0,0)$. 将 $\ln K_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}(Z,Z)$ 在原点附近展开.

$$\begin{aligned}\ln K_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}} &= -(m+1)\ln\det\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right)\\ &\quad+\sum_{j=2}^{s}(m-m_1-m_j)\ln\det\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_{jj}-\bar{Z}'_{jj})\right)\\ &= -(m+1)\left[\mathrm{tr}\left(\frac{Z-\bar{Z}'}{2\sqrt{-1}}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{Z-\bar{Z}'}{2\sqrt{-1}}\right)^2+\cdots\right]\\ &\quad+\sum_{j=2}^{s}(m-m_1-m_j)\left[\mathrm{tr}\left(\frac{Z_{jj}-\bar{Z}'_{jj}}{2\sqrt{-1}}\right)\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{Z_{jj}-\bar{Z}'_{jj}}{2\sqrt{-1}}\right)^2+\cdots\right],\end{aligned}$$

未写出的项是在计算中为零的项,经简单计算可知

$$\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}}{\partial Z_{ij}\partial\bar{Z}_{\alpha\beta}}\right|_{Z=0}=0,(i,j)\neq(\alpha,\beta);\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}}{\partial Z_{1j}\partial\bar{Z}_{1j}}\right|_{Z=0}=\frac{m+1}{4}I^{(m_1m_j)},$$

$$j=2,3,\cdots,s;$$

$$\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}}{\partial Z_{11}\partial\bar{Z}_{11}}\right|_{Z=0}=\frac{m+1}{4}I^{\left(\frac{m_1}{2}(m_1+1)\right)},$$

$$j=2,3,\cdots,s.$$

$$\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}}{\partial Z_{jj}\partial\bar{Z}_{jj}}\right|_{Z=0}=\frac{m_1+m_j+1}{4}I^{\left(\frac{m_j}{2}(m_j+1)\right)},$$

因此,$T_{\mathring{S}_{\mathrm{II}}}(0,0)$不是 λI 的形式,这给我们带来很大不便,为此我们寻找一个变换,使得 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$经变换后,其 Bergmann 度量方阵在原点之值具 λI 的形式. 令

$$\lambda_j=\sqrt{\frac{m+1}{m_1+m_j+1}},\quad j=2,3,\cdots,s,$$

则所求变换为

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1s} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{12} & Z_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{1s} & 0 & & Z_{ss} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1s} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{12} & \lambda_2 Z_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{1s} & 0 & & \lambda_s Z_{ss} \end{pmatrix}$$

$= Z, Z_{jj} = Z'_{jj}$ ，且已规范化. (2.5.16)

在此变换下 $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$ 变为 $S_{\mathrm{II}}(\lambda): I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - \overline{Z}') > 0$，其中 Z 如(2.5.16)所示，易知 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$ 的核函数为

$$K_{S_{\mathrm{II}}(\lambda)}(Z, \overline{Z}) = C_3 \frac{\det \prod_{j=2}^{s} \left[I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\lambda_j Z_{jj} - \lambda_j Z'_{jj}) \right]^{m - m_1 - m_j}}{\det\left[I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - \overline{Z}') \right]^{m+1}}$$

易知，$S_{\mathrm{II}}(\lambda)$ 的 Bergmann 度量方阵在原点之值为 $\frac{m+1}{4}I$.

下面求 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$ 的 Bergmann 度量方阵. 将 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$ 的任一点 Z_0 映为原点的 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$ 的解析自同胚为

$$W = A\left(Z - \frac{1}{2}(Z_0 + \overline{Z}'_0) + \mathrm{i}I\right)A' - \mathrm{i}I, (A'A)^{-1} = I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_0 - \overline{Z}'_0). \tag{2.5.17}$$

令 $R_{\mathrm{I}}(\lambda): I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - \overline{Z})' > 0$，$R_{\mathrm{II}}(\lambda): I + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - \overline{Z}') > 0$，其中点 Z 分别有下述形状：

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & \lambda_2 Z_{22} & \cdots & Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & \lambda_s Z_{ss} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1s} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{12} & \lambda_2 Z_{22} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{1s} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_{2s} & \cdots & \lambda_s Z_{ss} \end{pmatrix}, Z_{jj} = Z'_{jj} \text{ 且已规范化.}$$

则 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$是 $R_{\mathrm{I}}(\lambda)$,$R_{\mathrm{II}}(\lambda)$的子流形,$R_{\mathrm{I}}(\lambda)$对 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$的函数矩阵仍是$P(s)$.

将 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$中规范化的 W,Z 按 S_{II}的 b 排列法$\left(\text{不包括因子}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{及 }\lambda_j\right)$排成 w 与 z;按 R_{II}的 b 排列法$\left(\text{不包括因子}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{及 }\lambda_j\right)$排成 w_2 与 z_2;按 R_{I}的 b 排列法$\left(\text{包括因子}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{及 }\lambda_j\right)$排成 w_1 与 z_1.则有关系

$$w_1 = w_2 J(s) I_\lambda, \quad z_1 = z_2 J(s) I_\lambda,$$
$$w_2 = w I(s), \qquad z_2 = z I(s).$$

由此得

$$w_1 = w I(s) J(s) I_\lambda = w P(s) I_\lambda, \quad z_1 = z P(s) I_\lambda. \tag{2.5.18}$$

由于(2.5.17)可书为

$$w_1 = z_1 (A' \times A')_K + \text{常数项}, \tag{2.5.19}$$

以(2.5.18)代入上式得

$$w = z P(s) I_\lambda (A' \times A')_K I_\lambda'^{-1} P'(s) + \text{常数项}. \tag{2.5.20}$$

另一方面,将 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$的 W 与 Z 按 R_{II}的 b 排列法$\left(\text{包括 }\lambda_j\text{ 而不包括}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$排成 w_2^* 与 z_2^*,而 w,z 及 w_1,z_1 同上,则有以下关系:

$$w_1 = w_2^* J(s), \quad z_1 = z_2^* J(s),$$
$$w_2^* = w \bar{I}_\lambda I(s), \quad z_2^* = z \bar{I}_\lambda I(s).$$

由此得

$$w_1 = w \bar{I}_\lambda P(s), \quad z_1 = z \bar{I}_\lambda P(s). \tag{2.5.21}$$

以此代入(2.5.19)式得

$$w = z \bar{I}_\lambda P(s) (A' \times A')_K P'(s) \bar{I}_\lambda'^{-1} + \text{常数项}. \tag{2.5.22}$$

这里

$$\bar{I}_\lambda = [I^{\left(\frac{m_1}{2}(m_1+1)\right)}, I^{(m_1 m_2)}, \cdots, I^{(m_1 m)}, I^{(m_2 m_1)}, \lambda_2 I^{\left(\frac{m_2}{2}(m_2+1)\right)}, \cdots,$$
$$I^{(m_2 m)}, I^{(m_3 m_1)}, I^{(m_3 m_2)}, \lambda_3 I^{\left(\frac{m_3}{2}(m_3+1)\right)}, \cdots, I^{(m_3 m)}, \cdots, I^{(m m_1)}, \cdots,$$
$$\lambda_l I^{\left(\frac{m}{2}(m+1)\right)}]\text{ 为对角矩阵},$$

而 $\bar{I}_\lambda^{-1}$是 $\bar{I}_\lambda$ 中将 λ_j 换为 λ_j^{-1} 而得的对角矩阵.

因此,$S_{\mathrm{II}}(\lambda)$的变换(2.5.17)的函数矩阵为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{S_{\mathrm{II}}(\lambda)} = P(s) I_\lambda (A'A \times A'A)_K I_\lambda'^{-1} P'(s)$$
$$= \bar{I}_\lambda P(s) (A'A \times A'A)_K P'(s) \bar{I}_\lambda'^{-1}. \tag{2.5.23}$$

由(2.5.18),(2.5.21)易知有

$$P(s)I_\lambda = \tilde{I}_\lambda P(s), \quad I_\lambda'^{-1}P'(s) = P'(s)\tilde{I}_\lambda'^{-1} \tag{2.5.24}$$

由(2.5.23)的后一等式及引理3及(2.5.24)得

$$\begin{aligned} T_{S_{\mathrm{II}}(\lambda)}(Z,\bar{Z}) &= \frac{m+1}{4}\tilde{I}_\lambda P(s)(\bar{A}'\times A')_K \bar{I}_\lambda^{-2}(\bar{A}\times A)_K P'(s)\bar{\tilde{I}}_\lambda' \\ &= \frac{m+1}{4}P(s)I_\lambda(\bar{A}'\times A')_K \bar{I}_\lambda^{-2}(\bar{A}\times A)_K \bar{I}_\lambda' P'(s). \end{aligned} \tag{2.5.25}$$

因此,上式表明了 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$ 与 $R_{\mathrm{I}}(\lambda)$ 的 Bergmann 度量方阵之间的关系.而由此易知 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$ 的 Bergmann 度量并不等于 $R_{\mathrm{I}}(\lambda)$ 的 Bergmann 度量在 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$ 上的限制.但对 Hua 度量而言,$S_{\mathrm{II}}(\lambda)$(或 S_{II}, $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$)的 Hua 度量等于 $R_{\mathrm{I}}(\lambda)$(或 R_{I}, $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$)的 Hua 度量在 $S_{\mathrm{II}}(\lambda)$(或 S_{II}, $\mathring{S}_{\mathrm{II}}$)上的限制.因此,虽然此两度量在本质上是一致的,但 Hua 度量要比 Bergmann 度量方便.

本节内容来自文[YW19, YW21].

Ⅵ. 非对称第一类 Siegel 齐性域的西几何(3)

本文这一部分研究非对称第一类 Siegel 齐性域 S_{III} 的西几何,得到了域 S_{III} 与对称典型域 R_{I} 在核函数、Hua 度量、Bergmann 度量方面的关系式.

Ⅵ.1 非对称可递域 S_{III} 及其运动群

Ⅵ.1.1 考虑 $2m\times 2m$ 的 Hermite 方阵 H 和斜对称方阵 J,分块如下:

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{s1} & H_{s2} & \cdots & H_{ss} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix}, \quad m = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$$
$$\qquad\quad 2m_1 \quad\; 2m_2 \quad \cdots \quad 2m_s$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_s} \end{pmatrix}, \quad J_{m_i} = \begin{pmatrix} j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & j \end{pmatrix}_{(2m_i\times 2m_i)}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

取正整数 $k_i (i=1,2,\cdots,l)$ 使得 $1<k_1<k_2<\cdots<k_l<s$,令

$$H_{k_i j}=0, j>k_i, i=1,2,\cdots,l$$

由这种方阵 H 所形成的集合记为 $J\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$.

令

$$V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}=\left\{H \mid H>0, H\in J\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}\right\}.$$

这是仿射齐性的非自共轭锥,其运动群为

$$H\to AH\overline{A}'.$$

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & A_{ss}\end{pmatrix}\begin{matrix}2m_1\\2m_2\\ \vdots\\2m_s\end{matrix}, \quad \begin{matrix}A_{k_i j}=0, j>k_i, i=1,2,\cdots,l,\\ JA=\overline{A}J.\end{matrix}$$
$$\qquad 2m_1 \quad 2m_2 \quad \cdots \quad 2m_s$$

此运动群或所有这种矩阵 A 所成集合记为 $G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$.

记 $C\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$ 为如下的 $2m\times 2m$ 的复矩阵 Z 所成集合:

$$Z=\begin{pmatrix}Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s}\\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{ss}\end{pmatrix}\begin{matrix}2m_1\\2m_2\\ \vdots\\2m_s\end{matrix}, \quad \begin{matrix}Z_{k_i j}=0,\ Z_{jk_i}=0,\\ j>k_i, i=1,2,\cdots,l.\end{matrix}$$
$$\qquad 2m_1 \quad 2m_2 \quad \cdots \quad 2m_s$$

定义 1. $S_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$ 就是以 $V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$ 为底的第一类 Siegel 域,此即

$$S_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}=\left\{Z \,\middle|\, \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\overline{Z}')>0, JZ=Z'J,\right.$$
$$\left. Z\in C\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}\right\},$$

当 $l>0$ 时,S_{III} 皆为非对称可递域并解析等价于有界域.它容许如下形式的解析自同胚群 Γ^{III}:

$$W=AZA'+B, B\in J\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix},$$

$$A\in G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_l\end{pmatrix},$$

这不是最大群,但却是一个可递群,将 S_{III} 的任一点 Z_0 变为固定点 $\mathrm{i}I$ 的 S_{III} 的解析自同胚为

$$W=A\left(Z-\frac{1}{2}(Z_0+\overline{Z}_0')\right)A',\ (\overline{A}'A)^{-1}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_0-\overline{Z}_0').$$

例如,若取 $(k_1,k_2,\cdots,k_l)=(2,3,\cdots,s-1)$,则 $S_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ 2, & 3, & \cdots, & s-1\end{pmatrix}$ 中的点 Z, $G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ 2, & 3, & \cdots, & s-1\end{pmatrix}$ 中的矩阵 A 分别有如下形状:

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s}\\ Z_{21} & Z_{22} & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ Z_{s1} & 0 & & Z_{ss}\end{pmatrix}\begin{matrix}2m_1\\2m_2\\ \vdots\\ 2m_s\end{matrix},\quad JZ=Z'J,$$
$$\qquad\ \ 2m_1\quad 2m_2\quad\cdots\quad 2m_s$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ & A_{22} & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{ss}\end{pmatrix}\begin{matrix}2m_1\\2m_2\\ \vdots\\ 2m_s\end{matrix},\quad JA=\overline{A}J.$$
$$\qquad\ \ 2m_1\quad 2m_2\quad\cdots\quad 2m_s$$

本文这部分就只考虑 $S_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ 2, & 3, & \cdots, & s-1\end{pmatrix}$,以后就记此域为 S_{III}.

作变换 $Z\to JZ$,则 $Z'\to Z'J'=-Z'J=-JZ\to -Z$,即 Z 为斜对称方阵. S_{III} 变为 K_{III}:

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)>0,\ Z=-Z',\ Z\in C\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_s\\ 2, & 3, & \cdots, & s-1\end{pmatrix}.$$

将 K_{III} 的任一点 Z_0 变为固定点 $\mathrm{i}J$ 的 K_{III} 的解析自同胚为

$$W=\overline{A}\left(Z-\frac{1}{2}(Z_0+J\overline{Z}_0'J)\right)A',\ (A'A)^{-1}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z_0-\overline{Z}_0'J).$$

Ⅵ.1.2 定义 2 将 p 阶斜对称方阵 Z 改写为

$$Z=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}z_{1p} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}z_{12} & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}z_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}z_{1p} & \frac{-1}{\sqrt{2}}z_{2p} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

这称为 p 阶斜对称方阵的规范化. 将 Z 的元素按其行向量的自然顺序排成向量 z^*, 而令

$$z=(z_{12},z_{13},\cdots,z_{1p},z_{23},\cdots,z_{2p},\cdots,z_{p-1\,p}),$$

则存在矩阵 $Q(p)$, 使得

$$z^*=zQ(p).$$

我们称 $Q(p)$ 为 p 阶斜对称方阵的伸缩矩阵.

例如, $p=2$, 则 $z^*=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}z_{12},\frac{-1}{\sqrt{2}}z_{12},0\right)$, $z=z_{12}$.

$$z^*=z\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)\Rightarrow Q(2)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right).$$

考虑 $R_{\mathrm{I}}:\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)>0$; $R_{\mathrm{III}}:\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)>0, Z=-Z'$, 其中的点 Z 分别具有以下形状:

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix};$$
$$\qquad 2m_1 \quad 2m_2 \quad \cdots \quad 2m_s$$

$$Z=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1s} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}Z'_{12} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{22} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}Z'_{1s} & \frac{-1}{\sqrt{2}}Z'_{2s} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix}$$
$$\qquad 2m_1 \quad 2m_2 \quad \cdots \quad 2m_s$$

$$Z_{jj}=-Z'_{jj},\quad j=1,2,\cdots,s.$$

对 $Z\in K_{\mathrm{III}}$, 将 Z 规范化, 即

$$Z=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}Z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1s}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}Z_{12}' & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{ss} & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}Z_{1s}' & 0 & & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{ss}\end{pmatrix}\begin{matrix}2m_1\\ 2m_2\\ \vdots\\ 2m_s\end{matrix},\quad \begin{matrix}Z_{jj}=-Z_{jj}',\\ j=1,2,\cdots,s.\end{matrix} \tag{2.6.1}$$

$$\begin{matrix}2m_1 & 2m_2 & \cdots & 2m_s\end{matrix}$$

显然,$K_{Ⅲ}$是$R_{Ⅲ}$的子流形,也是$R_{Ⅰ}$的子流形.

Ⅵ.1.3 将$R_{Ⅰ}$的点Z的元素按其行向量的自然顺序排成$(2m)^2$维空间中的向量z^*,称为$R_{Ⅰ}$的a排列法.若先将Z_{ij}的元素按其行向量的自然顺序排成z_{ij},然后令

$$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1s},z_{21},z_{22},\cdots,z_{2s},\cdots,z_{s1},z_{s2},\cdots,z_{ss}),$$

这称为$R_{Ⅰ}$的b排列法.

$R_{Ⅲ}$的规范化的点Z的元素$\left(因子\frac{1}{\sqrt{2}}除外\right)$将主对角线(不包括主对角线)上方的元素按其行的自然顺序排成$m(2m-1)$维空间的向量这称为$R_{Ⅲ}$的a排列法.若先将$Z_{ij}(i<j)$的元素按其行向量的自然顺序排成z_{ij},再将Z_{jj}的主对角线(不包括主对角线)上方的元素按其行的自然顺序排成向量z_{jj},令$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1s},z_{22},z_{23},\cdots,z_{2s},\cdots,z_{ss})$,这称为$R_{Ⅲ}$的b排列法.

$K_{Ⅲ}$中的规范化的Z,先将$Z_{1j}(j=2,\cdots,s)$的元素按其行的自然顺序排成向量z_{1j},再将Z_{jj}的主对角线上方的元素(不包括主对角线)按其行的自然顺序排成向量$z_{jj}(j=1,2,\cdots,s)$.令

$$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1s},z_{22},z_{33},\cdots,z_{ss}),$$

这称为$K_{Ⅲ}$的b排列法.

由于$K_{Ⅲ}$中的点Z也可看作$R_{Ⅲ}$中的点.将Z按$K_{Ⅲ}$和$R_{Ⅲ}$的b排列法分别排成向量z与z_2,则有

$$z_2=zI(s),$$

其中 $I(s)=(I_{11},I_{12},\cdots,I_{1s},I_{22},I_{23},\cdots,I_{2s},\cdots\cdots,I_{ss})$,

$I(s)$的行分成$2s-1$块,其顺序为$(1,1),(1,2),\cdots,(1,s),(2,2),(3,3),\cdots,(s,s)$.这样$I(s)$可描述如下:

I_{1j}的第$(1,j)$块为$I^{(4m_1m_j)}$,其余块为零,$j=2,3,\cdots,s$;

I_{jj}的第(j,j)块为$I^{(m_j(2m_j-1))}$,其余块为零,$j=1,2,\cdots,s$;

其他的 I_{ij} 为零.

R_{III} 中的规范化的点 Z 也可看作 R_{I} 的点,将 Z 按 R_{III} 与 R_{I} 的 b 排列法分别排成向量 z_2 与 z_1^*,则

$$z_1^* = z_2 J(s),$$

其中 $J(s) = (J_{11}, J_{12}, \cdots, J_{1s}, J_{21}, J_{22}, \cdots, J_{2s}, \cdots, J_{s1}, J_{s2}, \cdots, J_{ss}),$

$J(s)$ 的行分成 $\frac{s}{2}(s+1)$ 块,其顺序为

$$(1,1),(1,2),\cdots,(1,s),(2,2),(2,3),\cdots,(2,s),\cdots,(s,s),$$

则 $J(s)$ 可描述如下:

J_{jj} 的第 (j,j) 块为 $Q(2m_j)$($Q(2m_j)$ 为 $2m_j$ 阶斜对称方阵的伸缩矩阵),其余块为零,$j=1,2,\cdots,s$;

$J_{ij}(i<j)$ 的第 (i,j) 块为 $\frac{1}{\sqrt{2}}I^{(4m_i m_j)}$,其余块为零;

$J_{ji}(i<j)$ 的第 (i,j) 块为 $\frac{-1}{\sqrt{2}}P(i,j)$,($P(i,j)$ 为 $2m_i \times 2m_j$ 的矩阵的过渡矩阵),其余块为零.

由于 K_{III} 的规范化的点 Z 也可看作是 R_{I} 及 R_{III} 中的点,将 Z 按 $R_{\mathrm{I}}, R_{\mathrm{III}}, K_{\mathrm{III}}$ 的 b 排列法分别排成向量 z_1, z_2, z,则有

$$z_1 = z_2 J(s),\ z_2 = zI(s),\ \Rightarrow z_1 = zI(s)J(s).$$

令

$$P(s) = I(s)J(s),$$

则有

$$z_1 = zP(s).$$

易见 $P(s)$ 就是 R_{I} 对其子流形 K_{III} 的函数矩阵,它在讨论 K_{III} 与 R_{I} 的关系中起重要作用.

Ⅵ.2 引　理

这里 $(A \times B)_K$ 仍表矩阵 A 与 B 的分块直乘积,其定义见本章第Ⅳ.2 节.

引理 1. 设 A' 与 D 皆属于 $G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & \cdots, & m_{2n+1} \\ 2, & 3, & \cdots, & 2n \end{pmatrix}$,令

$$I_n = \begin{pmatrix} I & 0 & & & & & & \\ & & I & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & I & 0 & \\ & & & & & & & I \end{pmatrix} \begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_3 \\ \vdots \\ 2m_{2n-1} \\ 2m_{2n+1} \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 2m_1 & 2m_2 & \cdots & 2m_{2n+1} \end{matrix}$$

则有

$$(I_m A I_n')(I_n D I_n') = I_n A D I_n'.$$

证： 同本章第Ⅳ.2 节之引理 1.

引理 2. 设 A 与 B 为 $2m\times 2m$ 的方阵，有相同分块

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix},$$
$$\qquad\; 2m_1 \quad 2m_2 \quad \cdots \quad 2m_s \qquad\qquad\qquad\qquad 2m_1 \quad 2m_2 \quad \cdots \quad 2m_s$$

则有

$$\begin{aligned} & J(s)(A'\times A')_K J'(s) J(s)(B'\times B')_K J'(s) \\ = & J(s)(A'B'\times A'B')_K J'(s). \end{aligned}$$

证：同本章第Ⅳ.2 节之引理 2.

引理 3. 设 A'与 B 皆属于 $G_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, m_2, \cdots, m_s \\ 2, \ 3, \ \cdots, s-1 \end{pmatrix}$，则有

$$\begin{aligned} & P(s)(A'\times A')_K P'(s) P(s)(B\times B)_K P'(s) \\ = & P(s)(A'B\times A'B)_K P'(s). \end{aligned}$$

证：如本章第Ⅳ.2 节的引理 2 之前所述相似，$J(s)(A'\times A')_K J'(s)$ 有如下之形状：

$$\begin{pmatrix} * & & 0 & \\ * & * & & \\ \vdots & & \ddots & \\ * & 0 & & * \end{pmatrix}\begin{matrix} 2n_1 \\ 2n_2 \\ \vdots \\ 2n_{2s-3} \end{matrix}.$$
$$2n_1 \quad 2n_2 \cdots 2n_{2s-3}$$

这取为引理 1 之 A'. 而 $J(s)(B\times B)_K J'(s)$之形状为上述矩阵之转置形状. 取为引理 1 中之 D，将 $I(s)$重新分块为 I_{s-2}，直接引用引理 1 即得本引理.

Ⅵ.3 核 函 数

作平移 $Z\to Z+iI$. K_{III} 变为 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$：$I+\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-Z'J)>0$，$Z=Z'$，$Z\in C\begin{pmatrix} m_1, m_2, \cdots, m_s \\ 2, \ 3, \ \cdots, s-1 \end{pmatrix}$. 将 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 的任一点 Z_0 变为原点的 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 的解析自同胚为

$$W=\overline{A}\left(Z-\frac{1}{2}(Z_0+JZ_0'J)+\mathrm{i}I\right)A'-\mathrm{i}I,$$

$$(\overline{A}'A)^{-1}=I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z_0-\overline{Z}'_0J). \qquad (2.6.2)$$

R_{I}, R_{III} 在平移下分别变为 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}: I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)>0$, $\mathring{R}_{\mathrm{III}}$: $I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)>0$, $Z=-Z'$ 且已规范化. 易见 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 是 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 及 $\mathring{R}_{\mathrm{III}}$ 的子流形. $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 对其子流形 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 的函数矩阵仍为 $P(s)$, 而且当 Z 在 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$, $\mathring{R}_{\mathrm{III}}$ 变化时(2.6.2)就是它们的解析自同胚.

对 K_{III} 中的点 W 与 Z 按 K_{III} 的 b 排列法分别排成 w 与 z; W, Z 作为 R_{I} 中的点按 R_{I} 的 b 排列法分别排成 w_1 与 z_1, 按 a 排列法排成 w_1^* 与 z_1^*. W 与 Z 作为 $\mathring{R}_{\mathrm{III}}$ 中的点按 R_{III} 的 b 排列法排成 w_2 与 z_2, 则有如下关系:

$$w_1^*=w_1Q(K),\ z_1^*=z_1Q(K),\ w_1=w_2J(s),\ z_1=z_2J(s),$$
$$w_2=wI(s),\ z_2=zI(s). \qquad (2.6.3)$$

而(2.6.2)可书为

$$w_1^*=z_1^*(\overline{A}'\times\overline{A}')+\text{常数项}. \qquad (2.6.4)$$

以(2.6.3)代入(2.6.4)得

$$\begin{aligned} w&=zI(s)J(s)Q(K)(\overline{A}'\times\overline{A}')Q'(K)J'(s)I'(s)+\text{常数项}\\ &=zP(s)(\overline{A}'\times\overline{A}')_KP'(s)+\text{常数项}. \end{aligned}$$

因此, $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 的变换(2.6.2)的函数矩阵为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}=P(s)(\overline{A}'\times\overline{A}')_KP'(s). \qquad (2.6.5)$$

另一方面, $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 的规范化的点 W 与 Z 的元素按 K_{III} 的 b 排列法排序, 经直接计算有

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}=\begin{pmatrix} (\overline{A}'_{11}\times\overline{A}'_{11})_* & & & & & & \\ & \overline{A}'_{11}\times\overline{A}'_{22} & & & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \overline{A}'_{11}\times\overline{A}'_{ss} & & & \\ & * & & & (\overline{A}'_{22}\times\overline{A}'_{22})_* & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (\overline{A}'_{ss}\times\overline{A}'_{ss})_* \end{pmatrix}.$$

因此得

$$\det\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{K}_{\text{III}}} = |\overline{A}_{11}'|^{2m-1}|\overline{A}_{22}'|^{2m_1+2m_2-1}\cdots|\overline{A}_{ss}'|^{2m_1+\cdots+2m_s-1}$$

$$= |\overline{A}'|^{2m-1}|\overline{A}_{22}'|^{-2(m-m_1-m_2)}\cdots|\overline{A}_{ss}'|^{-2(m-m_1-\cdots-m_s)}.$$

由(2.6.2)及 $Z_0\in C\begin{Bmatrix} m_1, m_2, \cdots, m_s \\ 2, \quad 3, \cdots, s-1 \end{Bmatrix}$, $Z_0=-Z_0'$ 可知

$$|\overline{A}_{jj}'A_{jj}| = \det\left[I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J_{m_j}'Z_{jj}^0-\overline{Z}'^0_{jj}J_{m_j})\right]^{-1}, \quad j=2,3,\cdots,s$$

根据[Lu4]第114页的定理,并令 $Z_0=Z$,可得 $\mathring{K}_{\text{III}}$ 的核函数为

$$K_{\mathring{K}_{\text{III}}}(Z,\overline{Z}) = C\det\left[\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{\mathring{K}_{\text{III}}}\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)}'_{\mathring{K}_{\text{III}}}\right]$$

$$= C\frac{\det\prod_{j=2}^{s}\left[I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J_{m_j}'Z_{jj}-\overline{Z}_{jj}'J_{m_j})\right]^{2(m-m_1-\cdots-m_j)}}{\det\left[I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right]^{2m-1}}.$$

由(2.6.5)及引理3得

$$K_{\mathring{K}_{\text{III}}}(Z,\overline{Z}) = C\det[P(s)(\overline{A}'\times\overline{A}')_K P'(s)P(s)(A\times A)_K P'(s)]$$

$$= C\det[P(s)(\overline{A}'A\times\overline{A}'A)_K P'(s)]$$

$$= C\det\left\{P(s)\left[\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right)^{-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right)^{-1}\right]_K P'(s)\right\}, \qquad (2.6.6)$$

其中 $Z\in\mathring{K}_{\text{III}}$. 而

$$C_1\det\left[\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right)^{-1}\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right)^{-1}\right]_K$$

是 $\mathring{R}_{\text{I}}$ 的核函数在 $\mathring{K}_{\text{III}}$ 上的限制,因而(2.6.6)表明了 $\mathring{R}_{\text{I}}$ 与 $\mathring{K}_{\text{III}}$ 的核函数之间的关系.

根据[Lu4]第60页上的定理,易得 K_{III} 的核函数为

$$K_{K_{\text{III}}}(Z,\overline{Z}) = C_2\frac{\det\prod_{j=2}^{s}\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J_{m_j}'Z_{jj}-\overline{Z}_{jj}'J_{m_j})\right]^{2(m-m_1-\cdots-m_j)}}{\det\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right]^{2m-1}}.$$

而 K_{III} 与 R_{I} 的核函数之间的关系表现为

$$K_{K_{\text{III}}}(Z,\overline{Z}) = C_2\det\left[P(s)\left(\left(\frac{J'Z-\overline{Z}'J}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\times\left(\frac{J'Z-\overline{Z}'J}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\right)_K P'(s)\right],$$

其中 $Z\in K_{\mathrm{III}}$.

同理，S_{III} 的核函数为

$$K_{S_{\mathrm{III}}}(Z,\bar{Z})=C_3\,\frac{\det\prod\limits_{j=1}^{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z_{jj}-\bar{Z}'_{jj})\right]^{2(m-m_1-m_2)}}{\det\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')\right]^{2m-1}}.$$

而 S_{III} 与 R_{I} $\left(即 \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-\bar{Z}')>0 的 Z^{(2m)} 所组成者\right)$的核函数之间的关系为

$$K_{S_{\mathrm{III}}}(Z,\overline{Z})=C_3\det\left[P(s)\left(\left(\frac{Z-\bar{Z}'}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\times\left(\frac{Z-\bar{Z}'}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\right)_K P'(s)\right],$$

$$Z\in S_{\mathrm{III}}.$$

Ⅵ.4 Hua 度量与 Bergmann 度量

Ⅵ.4.1 由(2.6.5)及 Hua 度量方阵的定义(见[Lu 3]或[Hua 1])同时引用引理 3，我们得到 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 的 Hua 度量方阵为

$$\begin{aligned}H_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}(Z,\overline{Z})&=P(s)(A^{-1}\times A^{-1})_K P'(s)P(s)(\bar{A}^{-1}\times A^{-1})_K P'(s)\\&=P(s)(\overline{A}'A\times\bar{A}'A)_K P'(s)\\&=P(s)\left[\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right)^{-1}\right.\\&\quad\left.\times\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right)^{-1}\right]_K P'(s).\end{aligned}\tag{2.6.7}$$

上式表明了 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 与 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 的 Hua 度量方阵之间的关系，由上式易知，$\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 的 Hua 度量就等于 $\mathring{R}_{\mathrm{I}}$ 的 Hua 度量在 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 上的限制，即 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 的 Hua 度量为

$$d\sigma^2=\mathrm{tr}\left[\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right)^{-1}dZ\left(I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\bar{Z}'J)\right)^{-1}d\overline{Z}'\right].$$

易知，K_{III} 与 R_{I} 的 Hua 度量方阵间有关系：

$$H_{K_{\mathrm{III}}}(Z,\bar{Z})=P(s)\left[\left(\frac{J'Z-\overline{Z}'J}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\times\left(\frac{J'Z-\overline{Z}'J}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}\right]_K P'(s).$$

而 K_{III} 的 Hua 度量就等于 R_{I} 的 Hua 度量在 K_{III} 上的限制，此即有

$$d\sigma^2=\mathrm{tr}\left[\left(\frac{J'Z-\overline{Z}'J}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}dZ\left(\frac{J'Z-\overline{Z}'J}{2\sqrt{-1}}\right)^{-1}d\bar{Z}'\right].$$

Ⅵ.4.2 下面考虑 Bergmann 度量，设 $Z\in\mathring{K}_{\mathrm{III}}$，其形状如(2.6.1)所示，再设

$$
Z_{1j}=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc}
Z_{11}^{(1j)} & Z_{12}^{(1j)} & \cdots & Z_{1m_j}^{(1j)}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
Z_{m_11}^{(1j)} & Z_{m_12}^{(1j)} & \cdots & Z_{m_1m_j}^{(1j)}
\end{array}\right)\begin{array}{c}1\\ \vdots\\ 1\end{array}\\
\begin{array}{cccc}1 & 1 & \cdots & 1\end{array}\end{array},
$$

$$
j=2,\ 3,\ \cdots,\ s.
$$

$$
Z_{ii}=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc}
0 & Z_{12}^{(ii)} & \cdots & Z_{1m_i}^{(ii)}\\
-Z_{12}^{(ii)} & 0 & \cdots & Z_{2m_i}^{(ii)}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
-Z_{1m_i}^{(ii)} & -Z_{2m_i}^{(ii)} & \cdots & 0
\end{array}\right)\begin{array}{c}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{array}\\
\begin{array}{cccc}1 & 1 & \cdots & 1\end{array}\end{array},
$$

$$
i=1,\ 2,\ \cdots,\ s.
$$

令

$$
\frac{\partial}{\partial Z_{1j}}=\left(\frac{\partial}{\partial Z_{11}^{(1j)}},\frac{\partial}{\partial Z_{12}^{(1j)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial Z_{1m_j}^{(1j)}},\frac{\partial}{\partial Z_{21}^{(1j)}},\cdots,\right.
$$

$$
\left.\frac{\partial}{\partial Z_{2m_j}^{(1j)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial Z_{m_11}^{(1j)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial Z_{m_1m_j}^{(1j)}}\right)',
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{1j}}=\left(\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{11}^{(1j)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{1m_j}^{(1j)}},\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{21}^{(1j)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{2m_j}^{(1j)}},\cdots,\right.
$$

$$
\left.\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{m_11}^{(1j)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{m_1m_j}^{(1j)}}\right)',
$$

$$
\frac{\partial}{\partial Z_{ii}}=\left(\frac{\partial}{\partial Z_{12}^{(ii)}},\frac{\partial}{\partial Z_{13}^{(ii)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial Z_{1m_i}^{(ii)}},\frac{\partial}{\partial Z_{23}^{(ii)}},\cdots,\right.
$$

$$
\left.\frac{\partial}{\partial Z_{2m_i}^{(ii)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial Z_{m_i-1m_i}^{(ii)}}\right)',
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{ii}}=\left(\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{12}^{(ii)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{1m_i}^{(ii)}},\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{23}^{(ii)}},\cdots,\right.
$$

$$
\left.\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{2m_i}^{(ii)}},\cdots,\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_{m_i-1m_i}^{(ii)}}\right)'.
$$

记 $\partial Z_{1j}=\dfrac{\partial}{\partial Z_{1j}}$，$\partial \overline{Z}_{1j}=\dfrac{\partial}{\partial \overline{Z}_{1j}}$，$\partial Z_{ii}=\dfrac{\partial}{\partial Z_{ii}}$，$\partial \overline{Z}_{ii}=\dfrac{\partial}{\partial \overline{Z}_{ii}}$，再令

$$
\frac{\partial}{\partial z}=(\partial Z_{11},\partial Z_{12},\cdots,\partial Z_{1s},\partial Z_{22},\partial Z_{33},\cdots,\partial Z_{ss}),
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=((\partial \overline{Z}_{11})',(\partial \overline{Z}_{12})',\cdots,(\partial \overline{Z}_{1s})',(\partial \overline{Z}_{22})',
$$

$(\partial \overline{Z}_{33})', \cdots, (\partial \overline{Z}_{ss})')'$，

则 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 的 Bergmann 度量方阵可书为

$$T_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}(Z,\overline{Z}) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\ln K_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}(Z,\overline{Z}).$$

先求 $T_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}(0,0)$，将 $\ln K_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}(Z,\overline{Z})$ 在原点附近展开：

$$\begin{aligned}
\ln K_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}} = &-(2m-1)\ln\det\left[I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\overline{Z}'J)\right] \\
&+\sum_{j=2}^{s}2(m-m_1-m_j)\ln\det\left[I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'_{m_j}Z_{jj}-\overline{Z}'_{jj}J_{m_j})\right] \\
= &-(2m-1)\left[\operatorname{tr}\left(\frac{J'Z-\overline{Z}'J}{2\sqrt{-1}}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{J'Z-\overline{Z}'J}{2\sqrt{-1}}\right)^2+\cdots\right] \\
&+\sum_{j=2}^{s}2(m-m_1-m_j)\left[\operatorname{tr}\left(\frac{J'_{m_j}Z_{jj}-\overline{Z}'_{jj}J_{m_j}}{2\sqrt{-1}}\right)\right. \\
&\left.-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{J'_{m_j}Z_{jj}-\overline{Z}'_{jj}J_{m_j}}{2\sqrt{-1}}\right)^2+\cdots\right].
\end{aligned}$$

未写出的项是在计算中为零的项．经简单计算可知

$$\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}}{\partial Z_{ij}\partial\overline{Z}_{\alpha\beta}}\right|_{Z=0}=0,\ (i,j)\neq(\alpha,\beta),$$

$$\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}}{\partial Z_{1j}\partial\overline{Z}_{1j}}\right|_{Z=0}=\frac{2m-1}{4}I^{(4m_1m_j)},\ j=2,3,\cdots,s,$$

$$\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}}{\partial Z_{11}\partial\overline{Z}_{11}}\right|_{Z=0}=\frac{2m-1}{4}I^{(m_1(2m_1-1))},$$

$$\left.\frac{\partial^2\ln K_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}}{\partial Z_{jj}\partial\overline{Z}_{jj}}\right|_{Z=0}=\frac{2m_1+2m_j-1}{4}I^{(m_j(2m_j-1))},\ j=2,3,\cdots,s.$$

由此可知 $T_{\mathring{K}_{\mathrm{III}}}(0,0)\neq\lambda I$．这给我们带来很大的不便，为此，我们寻找一个变换使得 $\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 经变换后其 Bergmann 度量方阵在原点之值具 λI 的形式．令

$$\lambda_j=\sqrt{\frac{2m-1}{2m_1+2m_j-1}},\quad j=2,3,\cdots,s,$$

则所求变换为

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}}Z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1s} \\
\frac{-1}{\sqrt{2}}Z'_{12} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{22} & & 0 \\
\vdots & & \ddots & \\
\frac{-1}{\sqrt{2}}Z'_{1s} & 0 & & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{s}
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}}Z_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}Z_{1s} \\
\frac{-1}{\sqrt{2}}Z'_{12} & \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}}Z_{22} & & 0 \\
\vdots & & \ddots & \\
\frac{-1}{\sqrt{2}}Z'_{1s} & 0 & & \frac{\lambda_s}{\sqrt{2}}Z_{s}
\end{pmatrix} = Z,
$$

$$
Z_{jj} = -Z'_{jj}. \tag{2.6.8}
$$

在此变换下，$\mathring{K}_{\mathrm{III}}$ 变为 $K_{\mathrm{III}}(\lambda)$：$I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\bar{Z}'J)>0, Z=-Z'$，其形状如(2.6.8)之 Z. 易知 $K_{\mathrm{III}}(\lambda)$ 的核函数为

$$
K_{K_{\mathrm{III}}(\lambda)}(Z,\bar{Z}) = C\frac{\det\prod_{j=2}^{s}\left[I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\lambda_j J'_{m_j}Z_{jj}-\lambda_j\bar{Z}'_{jj}J_{m_j})\right]^{2(m-m_1-m_j)}}{\det\left[I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\bar{Z}'J)\right]^{2m-1}}.
$$

$K_{\mathrm{III}}(\lambda)$ 的 Bergmann 度量方阵在原点之值为 $\frac{2m-1}{4}I$.

下面求 $K_{\mathrm{III}}(\lambda)$ 的 Bergmann 度量方阵. 将 $K_{\mathrm{III}}(\lambda)$ 的任一点 Z_0 映为原点的解析自同胚为

$$
W=\bar{A}\left(Z-\frac{1}{2}(Z_0+J\bar{Z}'_0J)+\mathrm{i}I\right)\bar{A}'-\mathrm{i}I,
$$

$$
(\bar{A}'A)^{-1}=I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z_0-\bar{Z}'_0J). \tag{2.6.9}
$$

令

$$
R_{\mathrm{I}}(\lambda): I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\bar{Z}'J)>0, Z \text{ 为 } 2m \text{ 阶复方阵}.
$$

$$
R_{\mathrm{III}}(\lambda): I+\frac{1}{2\sqrt{-1}}(J'Z-\bar{Z}'J)>0, Z=-Z'.
$$

$R_{\mathrm{I}}(\lambda)$、$R_{\mathrm{III}}(\lambda)$ 中的点 Z 分别具有下列形状：

$$
\begin{matrix}
\begin{pmatrix}
Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\
Z_{21} & \lambda_2 Z_{22} & \cdots & Z_{2s} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & \lambda_s Z_{ss}
\end{pmatrix}
\begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix} \\
\begin{matrix} 2m_1 & \quad 2m_2 & \quad \cdots & \quad 2m_s \end{matrix}
\end{matrix},
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1s} \\ Z'_{12} & \lambda_2 Z_{22} & \cdots & Z_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z'_{1s} & Z'_{2s} & \cdots & \lambda_s Z_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix}, \quad Z_{ij} = -Z'_{ij}.
$$
$$
\begin{matrix} 2m_1 & \quad 2m_2 & \quad \cdots & \quad 2m_s \end{matrix}
$$

显然，$K_{\mathrm{III}}(\lambda)$仍是$R_{\mathrm{I}}(\lambda)$，$R_{\mathrm{III}}(\lambda)$的子流形，$R_{\mathrm{I}}(\lambda)$对其子流形$K_{\mathrm{III}}(\lambda)$的函数矩阵仍为$P(s)$.

将$K_{\mathrm{III}}(\lambda)$中的点$W$与$Z$（皆已规范化）按$K_{\mathrm{III}}$的b排列法$\left(\text{不包括}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{及}\lambda_j\right)$排成向量$w$与$z$；按$R_{\mathrm{III}}$的b排列法$\left(\text{不包括}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{及}\lambda_j\right)$排成向量$w_2$与$z_2$；按$R_{\mathrm{I}}$的b排列法$\left(\text{包括}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{及}\lambda_j\right)$排成向量$w_1$与$z_1$，则有关系：

$$
w_1 = w_2 J(s) I_\lambda, \quad z_1 = z_2 J(s) I_\lambda,
$$
$$
w_2 = w I(s), \qquad z_2 = z_1 I(s).
$$

由此得

$$
w_1 = w I(s) J(s) I_\lambda = w P(s) I_\lambda, \quad z_1 = z P(s) I_\lambda \tag{2.6.10}
$$

由于(2.6.9)可写为

$$
w_1 = z_1(\overline{A}'\wedge A')_K + \text{常数项}.
$$

将(2.6.10)式代入上式得

$$
w = z P(s) I_\lambda (A'\wedge A')_K I_\lambda^{-1} P'(s) + \text{常数项}, \tag{2.6.11}
$$

其中I_λ有如下形状：

$$
\begin{aligned}
I_\lambda = [\, & I^{(m_1(2m_1-1))}, I^{(4m_1m_2)}, \cdots, I^{(4m_1m_s)}, I^{(4m_2m_1)}, \lambda_2 I^{(m_2(2m_2-1))}, \\
& \cdots, I^{(4m_2m_s)}, I^{(4m_3m_1)}, I^{(4m_3m_2)}, \lambda_3 I^{(m_3(2m_3-1))}, \cdots, I^{(4m_3m_s)}, \cdots, \\
& I^{(4m_sm_1)}, \cdots, \lambda_s I^{(m_s(2m_s-1))}]
\end{aligned}
$$
为对角矩阵.

I_λ^{-1}是I_λ中将λ_j换为λ_j^{-1}而得的对角矩阵.

另一方面，将$K_{\mathrm{III}}(\lambda)$的$W$与$Z$按$R_{\mathrm{III}}$的b排列法$\left(\text{包括}\lambda_j\text{而不包括}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$排成$w_2^*$与$z_2^*$，而$w_1, z_1, w, z$同上，则有以下关系：

$$
w_1 = w_2^* J(s), \quad z_1 = z_2^* J(s),
$$
$$
w_2^* = w \bar{I}_\lambda I(s), \quad z_2^* = z \bar{I}_\lambda I(s)
$$

由此得

$$
w_1 = w \bar{I}_\lambda P(s), \quad z_1 = z \bar{I}_\lambda P(s) \tag{2.6.12}
$$

以此代入(2.6.11)得

$$w = z\tilde{I}_\lambda P(s)(A'\times\overline{A}')_K P'(s)\tilde{I}'^{-1}_\lambda + \text{常数项}. \tag{2.6.13}$$

其中 $\tilde{I}_\lambda$ 为:

$\tilde{I}_\lambda = [I^{(m_1(2m_1-1))}, I^{(4m_1m_2)}, \cdots, I^{(4m_1m_r)}, \lambda_2 I^{(m_2(2m_2-1))}, \cdots,$
$\lambda_r I^{(m_r(2m_r-1))}]$为对角矩阵.

$\tilde{I}_{\lambda^{-1}}$为 $\tilde{I}_\lambda$ 中将λ_j 换为λ_j^{-1} 而得的对角方阵.

因此,$K_{Ⅲ}(\lambda)$的变换(2.6.9)的函数矩阵为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{K_{Ⅲ}(\lambda)} = P(s)I_\lambda(\overline{A}'\times\overline{A}')_K I'^{-1}_\lambda P'(s)$$
$$= \tilde{I}_\lambda P(s)(\overline{A}'\times\overline{A}')_K P'(s)\tilde{I}'^{-1}_\lambda. \tag{2.6.14}$$

由(2.6.10)及(2.6.12)易知有

$$P(s)I_\lambda = \tilde{I}_\lambda P(s), I'^{-1}_\lambda P'(s) = P'(s)\tilde{I}'^{-1}_\lambda. \tag{2.6.15}$$

由 Bergmann 度量方阵的定义,引用(2.6.14)的后一等式,注意引用引理 3 及(2.6.15),我们得到 $K_{Ⅲ}(\lambda)$的 Bergmann 度量方阵为

$$T_{K_{Ⅲ}(\lambda)}(Z,\overline{Z}) = \frac{2m-1}{4}\tilde{I}_\lambda P(s)(\overline{A}'\times A)_K I_\lambda^{-2}(A'\times A)_K$$
$$= \frac{2m-1}{4}P(s)I_\lambda(\overline{A}'\times A)_K I_\lambda^{-2}(A'\times A)_K I'_\lambda P'(s).$$

上式不但给出了 $K_{Ⅲ}(\lambda)$的 Bergmann 度量方阵的表示式,而且表明了 $K_{Ⅲ}(\lambda)$与 $R_{Ⅰ}(\lambda)$的 Bergmann 度量方阵之间的关系.

由此易知,$K_{Ⅲ}(\lambda)$的 Bergmann 度量并不等于 $R_{Ⅰ}(\lambda)$的 Bergmann 度量在 $K_{Ⅲ}(\lambda)$上的限制.但对 Hua 度量而言,$K_{Ⅲ}(\lambda)$(或 $K_{Ⅲ}$,$\mathring{K}_{Ⅲ}$)的 Hua 度量却等于 $R_{Ⅰ}(\lambda)$(或 $R_{Ⅰ}$,$\mathring{R}_{Ⅰ}$)的 Hua 度量在 $K_{Ⅲ}(\lambda)$(或 $K_{Ⅲ}$,$\mathring{K}_{Ⅲ}$)上的限制.因此,此两度量在本质上虽是一致的,但 Hua 度量要方便些.本节内容来自文[YW19,YW22].

Ⅶ. 不变微分算子与非对称齐性域的特征

在有界齐性域的范围内,只有对称的和非对称的两种,非对称齐性域的特征同时也是对称域的特征.因此这一节可以和第一章的第Ⅵ节一起看.本节叙述两个方面的问题:一个是说明非对称齐性域存在一个不同于 Laplace-Beltrami 算子的不变微分算子,使得其 Poinsson 核能被此算子零化,另一个是给出有界非对称齐性域的一个特征,事实上也是有界对称域的一个特征.

Ⅶ.1　一类非对称域的二阶不变微分算子

华罗庚[Hua]给出了对称域的 Cauchy 核 $H(Z,U)$，他与陆启铿[HLu]定义 Poisson 核 $P(Z,U)$为

$$P(Z,U)=\frac{|H(Z,U)|^2}{H(Z,\overline{Z})},$$

同时证明：对特征流形上的任一固定点 U，$P(Z,U)$能被由 Bergman 度量所定义的 Laplace-Beltrami 算子所零化．但陆汝钤[LuR]发现，对一些非对称的齐性 Siegel 域，其 Poisson 核却不能被 Laplace-Beltrami 算子零化，同时指出，这一事实或许是非对称齐性 Siegel 域的固有性质．果然，许以超[XY]证明：设 G 是有界齐性 Siegel 域，若其 Poisson 核能被 Laplace-Beltrami 算子零化，则 G 一定是对称域．这样就自然地产生如下问题：设 G 是一个非对称的齐性 Siegel 域，是否存在另外的在 G 的解析自同胚群下不变的微分算子 Δ，使得其 Poisson 核能被 Δ 所零化？钟家庆[ZhJ]指出，非对称域的不变微分算子比对称域的"多"，并给出了一个计算不变微分算子维数的公式．本文的目的是在此基础上给出一个例子，说明非对称的齐性 Siegel 域，存在一个不同于Laplace-Beltrami算子的不变微分算子，使得其 Poisson 核能被此算子零化．这一事实可以期望在一般的情形下也是对的．

考虑域

$$D:\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\overline{Z}')>0,\ Z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13}\\ z_{12} & z_{22} & 0\\ z_{13} & 0 & z_{33}\end{pmatrix}.$$

这是一个非对称的第一类 Siegel 齐性域[ZJY]．其所有不变微分算子形成一个环，其基在点 $\mathrm{i}I$ 处为[ZhJ]：

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{11}\partial\overline{z}_{11}},\frac{\partial^2}{\partial z_{12}\partial\overline{z}_{12}},\frac{\partial^2}{\partial z_{13}\partial\overline{z}_{13}},\frac{\partial^2}{\partial z_{22}\partial\overline{z}_{22}},\frac{\partial^2}{\partial z_{33}\partial\overline{z}_{33}},\frac{\partial^2}{\partial z_{11}^2},\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}_{11}^2}.$$

由 Bochner[Boc]的公式，很易算出域 D 的 Cauchy 核为：

$$H(Z,X)=C_1\frac{(z_{22}-x_{22})(z_{33}-x_{33})}{\det(Z-X)^2},$$

这里 C_1 是常数．X 是实矩阵，

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{12} & x_{22} & 0\\ x_{13} & 0 & x_{33}\end{pmatrix},$$

它属于域 D 的特征流形. 由此得到域 D 的 Poisson 核为:

$$P(Z,X)=\frac{C|H(Z,X)|^2}{H(Z,\overline{Z})}=C\frac{\det(Z-\overline{Z})^2|z_{22}-x_{22}|^2|z_{33}-x_{33}|^2}{|\det(Z-X)|^4(z_{22}-\bar{z}_{22})(z_{33}-\bar{z}_{33})}.$$

令

$$\begin{aligned}d(Z)\equiv\det(Z-\overline{Z})&=(z_{11}-\bar{z}_{11})(z_{22}-\bar{z}_{22})(z_{33}-\bar{z}_{33})\\&\quad-(z_{13}-\bar{z}_{13})^2(z_{22}-\bar{z}_{22})-(z_{12}-\bar{z}_{12})^2(z_{33}-\bar{z}_{33}),\\ f(Z)\equiv\det(Z-X)&=(z_{11}-x_{11})(z_{22}-x_{22})(z_{33}-x_{33})\\&\quad-(z_{13}-x_{13})^2(z_{22}-x_{22})-(z_{12}-x_{12})^2(z_{33}-x_{33}),\end{aligned}$$

$$P_*(Z,X)\equiv\frac{\det(Z-\overline{Z})^2}{|\det(Z-X)|^4}=\frac{d^2(Z)}{f^2(z)\overline{f}^2(z)}.$$

$$f\equiv f(\mathrm{i}I)=(\mathrm{i}-x_{11})(\mathrm{i}-x_{22})(\mathrm{i}-x_{33})-x_{13}^2(\mathrm{i}-x_{22})-x_{12}^2(\mathrm{i}-x_{33})$$

$$d\equiv d(\mathrm{i}I)=-8\mathrm{i},$$

由于

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2P_*}{\partial z_{ij}\partial\bar{z}_{ij}}\right|_{Z=\mathrm{i}I}&=\frac{2d}{f^2\overline{f}^2}\frac{\partial^2 d}{\partial z_{ij}\partial\bar{z}_{ij}}+\frac{2}{f^2\overline{f}^2}\frac{\partial d}{\partial z_{ij}}\frac{\partial d}{\partial z_{ij}}-\frac{4d}{f^3\overline{f}^2}\frac{\partial d}{\partial\bar{z}_{ij}}\frac{\partial f}{\partial z_{ij}}\\&\quad-\frac{4d}{\overline{f}^3f^2}\frac{\partial d}{\partial z_{ij}}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\bar{z}_{ij}}+\frac{4d^2}{f^3\overline{f}^3}\frac{\partial f}{\partial z_{ij}}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\bar{z}_{ij}},\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2P_*}{\partial z_{11}\partial\bar{z}_{11}}\right|_{Z=\mathrm{i}I}&=\frac{-32}{f^2\overline{f}^2}-\frac{64\times4}{f^3\overline{f}^3}I_m[(\mathrm{i}-x_{22})(\mathrm{i}-x_{33})\overline{f}]\\&\quad-\frac{64\times4}{f^3\overline{f}^3}|(\mathrm{i}-x_{33})(\mathrm{i}-x_{22})|^2\\&=\frac{-32}{f^2\overline{f}^2}-\frac{64\times4}{f^3\overline{f}^3}(-x_{13}^2|\mathrm{i}-x_{22}|^2-x_{12}^2|\mathrm{i}-x_{33}|^2),\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial^2P_*}{\partial z_{12}\partial\bar{z}_{12}}\right|_{Z=\mathrm{i}I}=\frac{64}{f^2\overline{f}^2}-\frac{64\times4}{f^3\overline{f}^3}(4x_{12}^2|\mathrm{i}-x_{33}|^2),$$

$$\left.\frac{\partial^2P_*}{\partial z_{13}\partial\bar{z}_{13}}\right|_{Z=\mathrm{i}I}=\frac{64}{f^2\overline{f}^2}-\frac{64\times4}{f^3\overline{f}^3}(4x_{13}^2|\mathrm{i}-x_{22}|^2),$$

$$\left.\frac{\partial^2P_*}{\partial z_{22}\partial\bar{z}_{22}}\right|_{Z=\mathrm{i}I}=\frac{-32}{f^2\overline{f}^2}-\frac{64\times4}{f^3\overline{f}^3}(x_{12}^2x_{13}^2-x_{12}^2|\mathrm{i}-x_{33}|^2),$$

$$\left.\frac{\partial^2P_*}{\partial z_{33}\partial\bar{z}_{33}}\right|_{Z=\mathrm{i}I}=\frac{-32}{f^2\overline{f}^2}-\frac{64\times4}{f^3\overline{f}^3}(x_{12}^2x_{13}^2-x_{13}^2|\mathrm{i}-x_{22}|^2),$$

因此有

$$\left[\frac{\partial^2P_*}{\partial z_{11}\partial\bar{z}_{11}}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2P_*}{\partial z_{12}\partial\bar{z}_{12}}+\frac{\partial^2P_*}{\partial z_{13}\partial\bar{z}_{13}}\right)\right]_{Z=\mathrm{i}I}=0.$$

由于

$$P(Z,X)=P_*(Z,X)C\frac{|z_{22}-x_{22}|^2|z_{33}-x_{33}|^2}{(z_{22}-\bar z_{22})(z_{33}-\bar z_{33})},$$

我们有

$$\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_{11}\partial \bar z_{11}}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z_{12}\partial \bar z_{12}}+\frac{\partial^2 P}{\partial z_{13}\partial \bar z_{13}}\right)\right]_{Z=iI}=0.$$

令

$$\Delta(iI)=\frac{\partial^2}{\partial z_{11}\partial \bar z_{11}}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{12}\partial \bar z_{12}}+\frac{\partial^2}{\partial z_{13}\partial \bar z_{13}}\right),$$

则 $\Delta(iI)$的一般形式为

$$\Delta(Z)=a(Z)\left[\frac{z_{11}-\bar z_{11}}{2i}\frac{\partial^2}{\partial z_{11}\partial \bar z_{11}}+\frac{z_{22}-\bar z_{22}}{8i}\frac{\partial^2}{\partial z_{12}\partial \bar z_{12}}+\frac{z_{33}-\bar z_{33}}{8i}\frac{\partial^2}{\partial z_{13}\partial \bar z_{13}}\right.$$
$$\left.+\frac{z_{12}-\bar z_{12}}{4i}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{11}\partial \bar z_{12}}+\frac{\partial^2}{\partial z_{12}\partial \bar z_{11}}\right)+\frac{z_{13}-\bar z_{13}}{4i}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{11}\partial \bar z_{13}}+\frac{\partial^2}{\partial z_{13}\partial \bar z_{12}}\right)\right].$$

这里

$$a(Z)=\frac{z_{11}-\bar z_{11}}{2i}-\frac{(z_{12}-\bar z_{12})^2}{2i(z_{22}-\bar z_{22})}-\frac{(z_{13}-\bar z_{13})^2}{2i(z_{33}-\bar z_{33})}.$$

$\Delta(Z)$是在 D 的解析自同胚群下不变的微分算子.

变换

$$W=A(Z-X^0)A',Z^0=X^0+iY^0\in D,$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix},AY^0A'=I,$$

是 D 的解析自同胚,变 Z^0 为 iI,令 $U=A(X-X^0)A'$,则有

$$P(Z,X)=CP(Z^0,X^0)P(W,U).$$

因此有

$$\Delta(Z)P(Z,X)\Big|_{Z=Z_0}=CP(Z^0,X^0)\Delta(W)P(W,U)\Big|_{W=iI}=0.$$

这表明 D 的 Poisson 核 $P(Z,X)$被不变微分算子 $\Delta(Z)$所零化.

令

$$R:\frac{1}{2i}(Z-\overline{Z}')>0,Z=\begin{pmatrix}z_{11}&z_{12}&z_{13}\\z_{12}&z_{22}&z_{23}\\z_{13}&z_{23}&z_{33}\end{pmatrix},$$

则 R 是一个对称域,其 Poisson 核在 D 上的限制就是 $P_*(Z,X)$,对于

$P_*(Z,X)$我们还有

$$\left[\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{11}\partial \bar{z}_{11}}+\left(\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{22}\partial \bar{z}_{22}}-\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{33}\partial \bar{z}_{33}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{12}\partial \bar{z}_{12}}\right]_{Z=iI}=0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{11}\partial \bar{z}_{11}}+\left(\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{33}\partial \bar{z}_{33}}-\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{22}\partial \bar{z}_{22}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{13}\partial \bar{z}_{13}}\right]_{Z=iI}=0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{11}\partial \bar{z}_{11}}+2\left(\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{33}\partial \bar{z}_{33}}-\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{22}\partial \bar{z}_{22}}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{12}\partial \bar{z}_{12}}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 P_*}{\partial z_{13}\partial \bar{z}_{13}}\right]_{Z=iI}=0.$$

陈志鹤在文[ChH]中进一步证明上述不变微分算子中,存在两个不变微分算子,使得它们成为使 D 的 Poisson 核零化的所有二阶不变微分算子形成的空间的一组基.

Ⅶ.2 有界对称域的一个特征

Ⅶ.2.1 主要结果的叙述

设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界齐性域,$K(Z,Z)$,$T(Z,\overline{Z})$和 $H(Z,U)$分别为域 D 的 Bergman 核函数,Bergman 度量方阵和 Cauchy-Szegö 核.而 $P(Z,U)=|H(Z,U)|^2\cdot H(Z,\overline{Z})^{-1}$称为域 D 的形式 Poisson 核.令

$$P_j=P_j(Z,U)=(P(Z,U))^{1/j},(j=1,\cdots,n)$$

这里 U 属于 D 的 Silov 边界 SD,再令

$$L(u)=T^{-1}(Z,\overline{Z})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\partial \bar{z}_j}\right),$$

则我们有如下结果:

1. $L_j(u)=\{L(u)$的所有 j 阶主子式之和$\}$在 D 的双全纯映照下不变($j=1,\cdots,n$).

n 阶方阵 $A=(a_{ij})$的所有 j 阶主子式之和即为下式:

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_j\leq n}\det\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_j}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i_ji_1} & \cdots & a_{i_ji_j}\end{vmatrix}.$$

当 $j=1$ 时,$L_1(u)=\operatorname{tr}L(u)$就是域 D 的在 Bergman 度量下的 Laplace-Beltrami 算子.当 $j=n$ 时,$L_n(u)=\det L(u)$就是复 Monge-Ampére 算子,因此,我们定义的这一类不变微分算子包含微分几何中的五个重要的微分算子中的两个[Yau],当 $1<j<n$ 时,据我所知,尚未有人考虑过 $L_j(u)$.

2. 若 D 是不可约的对称域,则

$$L_j(P_j)=0,(j=1,\cdots,n).$$

3. $L_j(P_j)=0 \Longleftrightarrow L_1(P(Z,U))=0,(1\leqslant j\leqslant n)(*)$.

4. 若 D 是不可约的 Cartan 域,$\varphi(U)$在 SD 连续,令

$$Y_j(Z)=\int_{SD}\varphi(U)P_j(Z,U)\dot{U},$$

则

$$L_1(Y_1(Z))=0.$$

$\mathbf{C}^n$ 中的有界对称域现在又称为 Cartan 域,以纪念 É. Cartan 在 1935 年将 $\mathbf{C}^n$ 中的有界对称域进行完全分类的这一著名工作.

5. 任意固定 $j(1\leqslant j\leqslant n)$,则 $L_j(P_j)=0 \Longleftrightarrow D$ 是有界对称域.

Ⅶ.2.2 主要结果的证明

1. 设 $w=f(Z)$是域 D 的双全纯映照,则

$$T^{-1}(Z,\overline{Z})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\partial z_j}\right)=\left(\overline{\frac{\partial w}{\partial Z}}\right)'^{-1}T^{-1}(w,\overline{w})\left(\frac{\partial^2 u(f^{-1}(w))}{\partial w_i\partial \overline{w}_i}\right)\left(\overline{\frac{\partial w}{\partial Z}}\right)',$$

此即 $T^{-1}(Z,\overline{Z})\left(\frac{\partial^2 u(Z)}{\partial z_i\partial \overline{z}_j}\right)$相似于 $T^{-1}(w,\overline{w}')\left(\frac{\partial^2 u(f^{-1}(w))}{\partial w_i\partial \overline{w}_j}\right)$,而 $L_j(u)$是

$$T^{-1}(Z,\overline{Z})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\partial \overline{z}_j}\right)$$

的特征多项式 $F(\lambda)$的 λ^{n-j}的系数(相差一个负号)$(j=1,\cdots,n)$,而相似矩阵具有相同的特征多项式,因此 $L_j(u)$在 D 的双全纯映照下不变.

2. 众所周知,若 D 是不可约对称有界域,则一定有(见[Lu3, ZhJ, XY]):

$$L_1(P(Z,U))=0.$$

因此,我们只要证明了下面的 3,自然就有

$$L_j(P_j)=0,(1\leqslant j\leqslant n). \qquad (*)$$

3. 不失一般性,可假定 D 包含原点,经过一个线性变换,并从 $K(Z,\overline{Z})$、$T(Z,\overline{Z})$与 $P(Z,U)$之间的关系,我们可不失一般性地假定

$$T(Z,\overline{Z})\Big|_{Z=0}=\lambda I^{(n)},\left(\frac{\partial^2 \ln P(Z,\overline{U})}{\partial z_i\partial \overline{z}_j}\right)\Big|_{Z=0}=-\mu I^{(n)},$$

$\lambda\neq 0,\mu\neq 0$.

由于 $L(P_j)=P_jG(P_j)$,其中

$$G(u)=T^{-1}(Z,\overline{Z})\left[\left(\frac{\partial^2\ln u}{\partial z_i\partial \overline{z}_j}\right)+\left(\frac{\partial\ln u}{\partial z'}\right)\left(\frac{\partial\ln u}{\partial \overline{z}}\right)\right],$$

而

$$\frac{\partial}{\partial z'}=\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_n}\right)',\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right).$$

令

$$G_j(u)=\{G(u)\text{的所有 } j \text{ 阶主子式之和}\},$$

则 $G_j(u)$也是不变微分算子$(j=1,\cdots,n)$.

若 $w=f(Z)$是 D 的双全纯自同胚,映 $Z_0(\in D)$为原点,$f(U)=V$,则

$$P(Z,U)=P(Z_0,U)P(W,V).$$

因此,我们只要证明(*)式在 $Z=0$ 成立就足够了.

由于

$$G(P_j)=T^{-1}(Z,\bar{Z})\left[\frac{1}{j}\left(\frac{\partial^2\ln P}{\partial z_i\partial \bar{z}_j}\right)+\frac{1}{j^2}\left(\frac{\partial\ln P}{\partial \bar{z}'}\right)\left(\frac{\partial\ln P}{\partial z}\right)\right],$$

令

$$\left.\frac{\partial\ln P}{\partial z}\right|_{Z=0}=\alpha,$$

则我们有

$$G(P_j)|_{Z=0}=-\left(\frac{\lambda\mu}{j}\right)I^{(n)}+\frac{1}{j^2}\alpha'\bar{\alpha}.$$

令$(\lambda\mu)^{-1}=a,\alpha\bar{\alpha}'=b$,则上式为

$$G(P_j)|_{Z=0}=\left(-\frac{\lambda\mu}{j}\right)\left(I-\frac{a}{j}\alpha'\bar{\alpha}\right).$$

由于存在酉方阵 H,使得

$$I-\frac{a}{j}\alpha'a=H\left(I-\frac{a}{j}\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}\right)H^{-1},$$

所以

$$L_j(P_j)|_{Z=0}=0\Longleftrightarrow G_j(P_j)|_{Z=0}=0\Longleftrightarrow X_j=0,$$

这里

$$X_j=\left\{\left|I-\begin{pmatrix}\frac{ab}{j}&0\\0&0\end{pmatrix}\right|\text{的所有 } j \text{ 阶主子式之和}\right\}.$$

但

$$X_j=C_{n-1}^{j-1}\left(1-\left(\frac{ab}{j}\right)\right)+C_{n-1}^{j}=C_n^j(n-ab)/n,$$

故

$$X_j = 0 \Longleftrightarrow n - ab = 0.$$

但

$$X_1 = n - ab,$$

而

$$X_1 = 0 \Longleftrightarrow G_1(P_1)|_{Z=0} = 0 \Longleftrightarrow L_1(P)|_{Z=0} = 0.$$

这就完成了我们的证明.

4. 这是 2 的一个直接推论.

5. 我们只要对 D 是不可约的情形加以证明. 若 D 是不可约对称域, 由 2 得

$$L_j(P_j) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

若对某一个 $j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 有 $L_j(P_j) = 0$, 则由 3 可知有 $L_1(P(Z, U)) = 0$. 即 D 的 Poisson 核为 D 的Laplace-Beltrami算子所零化. 根据文献[XY]定理 8, D 一定是对称域. 证毕.

注: 根据上述想法, 我们还可以构造域 D 的很多全纯不变量. 此处就不赘述了.

本节内容来自文[YW23, YW25, YW26].

Ⅷ. 非对称第一类 Siegel 域的曲率

在 L. Geatti 的文[Gea]中, 对一个 4 维的非对称齐性 Sigel 域给出了解析自同构群、Bergman 度量以及在 Bergman 度量下的曲率的显表达式.

钟家庆和作者在文[ZJY, ZJY2]中给出了非对称齐性 Siegel 域的新类型. 作者在文[YW20—YW22]中(也就是本章的第 Ⅳ, Ⅴ, Ⅵ 节)给出了它们的解析自同构群、Bergman 核函数、Hua 度量和 Bergman 度量的显表达式, 并讨论了它们与经典的 Cartan 域的相应关系. 可见, 我们的工作要比 L. Geatti 的工作早得多与广泛得多. 这一节给出一类齐性 Siegel 域 S_{I} 在 Hua 度量和 Bergman 度量下的全纯截曲率和 Riemann 截曲率的显表达式, 并指出与经典的 Cartan 域的不同之点.

Ⅷ.1　曲率的表达式

Ⅷ.1.1

令

$$R_1=\left\{Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13}\\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23}\\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33}\end{pmatrix}\begin{matrix} m_1\\ m_2\\ m_3\end{matrix} \quad \frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\overline{Z}')>0,\ \begin{matrix} m_1+m_2+m_3=m\\ \mathrm{i}=\sqrt{-1}\end{matrix}\right\},$$
$$\qquad\qquad\quad m_1 \qquad m_2 \qquad m_3$$

若 $Z_{23}=0, Z_{32}=0$，就得[ZJY]中的 $S_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & m_3\\ 1, & & 3\end{pmatrix}$ 简记为 S_{I}. 由[YW20]知，S_{I} 的 Bergman 度量方阵和 Hua 度量方阵分别为：

$$T(Z,\overline{Z})=J(\overline{A}\times A)_K I_\lambda (A'\times\overline{A})_K J'$$
$$H(Z,\overline{Z})=J(\overline{A}A'\times A\overline{A}')_K J'$$

其中

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & O\\ & J_2 & \\ O & & J_3\end{pmatrix},\quad I_\lambda=\begin{pmatrix} I_1 & & O\\ & I_2 & \\ O & & I_3\end{pmatrix},$$

而

$$J_1=I^{(m_1m)},\ J_2=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\end{pmatrix}\begin{matrix} m_1m_2\\ m_2^2\end{matrix},$$
$$\qquad\qquad m_1m_2 \qquad m_2^2 \qquad m_2m_3$$

$$J_3=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{matrix} m_1m_3\\ m_3^2\end{matrix},$$
$$\qquad m_1m_3 \qquad m_2m_3 \qquad m_3^2$$

$$I_1=I^{(m_1m)},\ I_2=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{matrix} m_1m_2\\ m_2^2\\ m_3m_2\end{matrix},$$
$$\qquad\qquad m_1m_2 \qquad m_2^2 \qquad m_3m_2$$

$$I_3=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 I\end{pmatrix}\begin{matrix} m_1m_3\\ m_2m_3\\ m_3^2\end{matrix},$$
$$\qquad m_1m_3 \qquad m_2m_3 \qquad m_3^2$$

$$\lambda_j=\frac{m_1+m_j}{m},\ j=2,3$$

A 为 m 阶方阵，有如下形式：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{matrix}$$
$$\quad\; m_1 \quad\; m_2 \quad\; m_3$$

而且

$$(A\overline{A}')^{-1}=\frac{1}{2\mathrm{i}}(Z-\overline{Z}'),Z\in S_{\mathrm{I}}$$

Ⅶ.1.2

由文[Lu4]可知，若 K 为 Kähler 空间的一个度量张量，则其测地线方程为：

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial z^k}\frac{\mathrm{d}z^k}{\mathrm{d}t}K^{-1}=0,$$

其中 t 为测地线弧长．由此，对应于 $T(z,\bar{z})$ 及 $H(z,\bar{z})$ 的 S_{I} 的测地线方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{z}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}t}\sum\frac{\partial T}{\partial\tilde{z}_{jl}}\frac{\mathrm{d}\tilde{z}_{jl}}{\mathrm{d}t}T^{-1}=0(j,l\text{ 遍历 }S_{\mathrm{I}}\text{ 中点的独立变量})$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{z}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}t}\sum\frac{\partial H}{\partial\tilde{z}_{jl}}\frac{\mathrm{d}\tilde{z}_{jl}}{\mathrm{d}t}H^{-1}=0$$

其中 $\tilde{z}$ 为$(m_1^2+m_2^2+m_3^2+2m_1m_2+2m_1m_3)$维复向量，若先将 Z_{ij} 的元素按其行的自然顺序排成向量 z_{ij}，则

$$\tilde{z}=(z_{11},z_{12},z_{13},z_{21},z_{22},z_{31},z_{33})$$

由于

$$(\overline{A}A\times A\overline{A}')_K=\left[\left(\frac{\overline{Z}-Z'}{-2\mathrm{i}}\right)^{-1}\times\left(\frac{Z-\overline{Z}'}{2\mathrm{i}}\right)^{-1}\right]_K$$

$$(\overline{A}\times A)_K I_\lambda(A'\times\overline{A}')_K=\left[\left(\frac{\overline{Z}-Z'}{-2\mathrm{i}}\right)^{-1}\times\left(\frac{Z-\overline{Z}'}{2\mathrm{i}}\right)^{-1}\right]_K$$

$$+(\lambda_2-1)\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{\overline{Z}_{22}-Z'_{22}}{-2\mathrm{i}}\right)^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{Z_{22}-\overline{Z}'_{22}}{2\mathrm{i}}\right)^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+(\lambda_3-1)\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{\overline{Z}_{33}-Z'_{33}}{-2\mathrm{i}}\right)^{-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{Z_{33}-\overline{Z}'_{33}}{2\mathrm{i}}\right)^{-1}\end{pmatrix}\right]_K$$

令

$$Y=\left(\frac{Z-\overline{Z}'}{2\mathrm{i}}\right),\ Y_2=\left(\frac{Z_{22}-\overline{Z}'_{22}}{2\mathrm{i}}\right),\ Y_3=\left(\frac{Z_{33}-\overline{Z}'_{33}}{2\mathrm{i}}\right),$$

则

$$\sum\frac{\partial H}{\partial\bar{z}_{jl}}\frac{\mathrm{d}\bar{z}_{jl}}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{2\mathrm{i}}J\left[\left(\overline{Y}^{-1}\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}t}\overline{Y}^{-1}\times Y^{-1}\right)_K+\left(\overline{Y}^{-1}\times Y^{-1}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}Y^{-1}\right)_K\right]J'$$

$$\sum\frac{\partial T}{\partial\bar{z}_{jl}}\frac{\mathrm{d}\bar{z}_{jl}}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{2\mathrm{i}}J\left\{\left(\overline{Y}^{-1}\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}t}\overline{Y}^{-1}\times Y^{-1}\right)_K+\left(\overline{Y}^{-1}\times Y^{-1}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}Y^{-1}\right)_K\right.$$

$$+(\lambda_2-1)\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\left(\overline{Y}_2^{-1}\frac{\mathrm{d}Z'_{22}}{\mathrm{d}t}\overline{Y}_2^{-1}\times Y_2^{-1}\right)&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\left(\overline{Y}_2^{-1}\times Y_2^{-1}\frac{\mathrm{d}Z_{22}}{\mathrm{d}t}Y_2^{-1}\right)&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

$$+(\lambda_3-1)\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\left(\overline{Y}_3^{-1}\frac{\mathrm{d}Z'_{33}}{\mathrm{d}t}\overline{Y}_3^{-1}\times Y_3^{-1}\right)\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\left.+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\left(\overline{Y}_3^{-1}\times Y_3^{-1}\frac{\mathrm{d}Z_{33}}{\mathrm{d}t}Y_3^{-1}\right)\end{pmatrix}\right]\right\}J'$$

若将 S_{I} 的点 Z 看作 R_{I} 的点，而按 Z 的行的自然顺序将 Z 的元素排成 m^2 维复向量 z，则

$$z=\bar{z}JQ$$

其中 Q 为排列方阵，它满足

$$(A\times B)_K=Q(A\times B)Q'$$

因此上面的测地线方程就分别变为：

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\left[-\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\overline{Y}^{-1}\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}t}\overline{Y}^{-1}\times Y^{-1}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\overline{Y}^{-1}\times Y^{-1}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}Y^{-1}\right)\right]\widetilde{H}^{-1}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{2\mathrm{i}}L-\frac{1}{2\mathrm{i}}L^*\right)\Big]\widetilde{T}^{-1}=0$$

其中

$$\widetilde{H}^{-1}=Q'J'H^{-1}JQ,\quad \widetilde{T}^{-1}=Q'J'T^{-1}JQ$$

$$L=\overline{Y}^{-1}\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}t}Y^{-1}\times Y^{-1}$$

$$+(\lambda_2-1)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\overline{Y}_2^{-1}\dfrac{\mathrm{d}Z'_{22}}{\mathrm{d}t}Y_2^{-1}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&Y_2^{-1}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$+(\lambda_3-1)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&Y_3^{-1}\dfrac{\mathrm{d}Z'_{33}}{\mathrm{d}t}Y_3^{-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&Y_3^{-1}\end{pmatrix}.$$

$$L^*=\overline{Y}^{-1}\times Y^{-1}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}Y^{-1}$$

$$+(\lambda_2-1)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\overline{Y}_2^{-1}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&Y_2^{-1}\dfrac{\mathrm{d}Z_{22}}{\mathrm{d}t}Y_2^{-1}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$+(\lambda_3-1)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\overline{Y}_3^{-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&Y_3^{-1}\dfrac{\mathrm{d}Z_{33}}{\mathrm{d}t}Y_3^{-1}\end{pmatrix}.$$

若 C 与 D 都是 m 阶方阵, W 与 Z 是 R_{I} 中的点,都按其行的自然顺序分别排成 m^2 维复向量 w 与 z. 而且 $w=z(C\times D)$,则有以下关系:

$$W=C'ZD$$

此事实容易直接验证. 由此可知,$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}L$ 与 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}L^*$ 若写成方阵则完全相同. 换言之,它们是由同一个方阵按同样的顺序排成的 m^2 维复向量,因此有 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}L=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}L^*$,这样,测地线方程就变为:

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\left[\overline{Y}^{-1}\times Y^{-1}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}Y^{-1}\right]\widetilde{H}^{-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}L\widetilde{T}^{-1}.$$

Ⅷ.1.3

根据 C. L. Siegel 在由[Sie]中所提供的方法,我们对 $T(Z,\overline{Z})$ 定义两个共变微分如下:

$$
\delta_j u = -\frac{i}{2} u \Big\{ Y^{-1}\delta_j Z' Y^{-1} \times Y^{-1} + Y^{-1} \times Y^{-1}\delta_j Z Y^{-1}
$$

$$
+ (\lambda_2 - 1)\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{Y}_2^{-1}\delta_j Z'_{22}\overline{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right.
$$

$$
\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1}\delta_j Z_{22} Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]
$$

$$
+ (\lambda_3 - 1)\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Y}_3^{-1}\delta_j Z'_{33}\overline{Y}_3^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1} \end{pmatrix}\right.
$$

$$
\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Y}_3^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1}\delta_j Z_{33} Y_3^{-1} \end{pmatrix}\right]\Big\} \overline{T}^{-1},
$$

$j = 1,2$. 若令 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，就得到对 $H(Z, \overline{Z})$ 而言的情形. 令

$$
\delta_j u^* = \delta_j u Q' = \delta_j u J, \quad u^* = uQ' = uJ, \quad T^{*-1} = J' T^{-1} J,
$$

则有

$$
\delta_j u^* = -\frac{i}{2} u^* [L_j + L_j^*] T^{*-1}, \quad j = 1,2
$$

其中

$$
L_j = (Y^{-1}\delta_j Z' Y^{-1} \times Y^{-1})_K + (\lambda_2 - 1)\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{Y}_2^{-1}\delta_j Z'_{22}\overline{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right.
$$

$$
\left. \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_K
$$

$$
+ (\lambda_3 - 1)\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Y}_3^{-1}\delta_j Z'_{33}\overline{Y}_3^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1} \end{pmatrix}\right]_K \quad j = 1,2
$$

$$
L_j^* = (\overline{Y}^{-1} \times Y^{-1}\delta_j Z Y^{-1})_K
$$

$$
+ (\lambda_2 - 1)\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1}\delta_j Z_{22} Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_K
$$

$$+(\lambda_3-1)\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\overline{Y}_3^{-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&Y_3^{-1}\delta_j Z_{33}Y_3^{-1}\end{pmatrix}\right]_K \quad j=1,2$$

由计算可知

$$\delta_1\delta_2 u^* = -\frac{i}{2}\delta_1 u^*\cdot(L_2+L_2^*)T^{*-1}-\frac{i}{2}u^*\delta_1(L_2+L_2^*)\cdot T^{*-1}$$

$$-\frac{i}{2}u^*(L_2+L_2^*)\delta_1 T^{*-1},$$

$$\delta_2\delta_1 u^* = -\frac{i}{2}\delta_2 u^*\cdot(L_1+L_1^*)T^{*-1}-\frac{i}{2}u^*\delta_2(L_1+L_1^*)\cdot T^{*-1}$$

$$-\frac{i}{2}u^*(L_1+L_1^*)\delta_2 T^{*-1}.$$

由于

$$\delta_j T^{*-1} = -J'[T^{-1}\delta_j T\cdot T^{-1}]J$$

$$=\frac{1}{2i}J'T^{-1}[J(L_j-\dot{L}_j+L_j^*-\dot{L}_j^*)J']T^{-1}J$$

$$=\frac{1}{2i}T^{*-1}(L_j+L_j^*-\dot{L}_j-\dot{L}_j^*)T^{*-1}$$

其中，$\dot{L}_j$ 是 L_j 的表达式中将 $\delta_j Z'$ 换为 $\delta_j\overline{Z}$ 而成的式子，$\dot{L}_j^*$ 是 L_j^* 的表达式中将 $\delta_j Z$ 换为 $\delta_j Z'$ 而成的式子．这样，我们有

$$(\delta_2\delta_1-\delta_1\delta_2)u^* = -\frac{u^*}{4}(L_2+L_2^*)T^{*-1}(\dot{L}_1+\dot{L}_1^*)T^{*-1}$$

$$+\frac{u^*}{4}(L_1+L_1^*)T^{*-1}(\dot{L}_2+\dot{L}_2^*)T^{*-1}$$

$$+\frac{i}{2}u^*[\delta_1(L_2+L_2^*)-\delta_2(L_1+L_1^*)]T^{*-1}.$$

我们引进如下的微分运算符号：$\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\overline{\mathrm{d}}_1,\overline{\mathrm{d}}_2$.

$$\mathrm{d}_j=\sum\frac{\partial}{\partial z_{kl}}\mathrm{d}_j z_{kl},\overline{\mathrm{d}}_j=\sum\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{kl}}\overline{\mathrm{d}}_j\bar{z}_{kl},\ j=1,2$$

记

$$\dot{T}=(\overline{A}\times A)_K I_\lambda(A'\times\overline{A}')_K.$$

经过具体计算可知，

$$u^*\mathrm{d}_2\dot{T}\cdot T^{*-1}\overline{\mathrm{d}}_1\dot{T}\cdot T^{*-1}+u^*\mathrm{d}_1\dot{T}\cdot T^{*-1}\overline{\mathrm{d}}_2\dot{T}\cdot T^{*-1}$$

$$+u^*(\overline{\mathrm{d}}_1\mathrm{d}_2\dot{T}-\overline{\mathrm{d}}_2\mathrm{d}_1\dot{T})T^{*-1}$$

就等于$(\delta_2\delta_1-\delta_1\delta_2)u^*$ 的表示式中将 $\delta_j Z$ 改为 $\mathrm{d}_j Z$，将 $\delta_j\overline{Z}$ 改为 $\overline{\mathrm{d}}_j\overline{Z}$ 之后而得的式子$(j=1,2)$．因此，我们可以定义

$$(\delta_2\delta_1-\delta_1\delta_2)u^* = -u^*\mathrm{d}_2\dot{T}\cdot T^{*-1}\overline{\mathrm{d}}_1\dot{T}\cdot T^{*-1}$$

$$+u^*\mathrm{d}_1\dot{T}\cdot T^{*-1}\overline{\mathrm{d}}_2\dot{T}\cdot T^{*-1}+u^*(\overline{\mathrm{d}}_1\mathrm{d}_2\dot{T}-\overline{\mathrm{d}}_2\mathrm{d}_1\dot{T})T^{*-1}$$
$$\equiv(\mathrm{d}_2\mathrm{d}_1-\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2)u^*$$
此即定义 $\delta_j u^*\equiv-u^*\mathrm{d}_j\dot{T}\cdot T^{*-1}$，对函数 $\varphi(Z,\overline{Z})$，定义 $\delta_j\varphi=\mathrm{d}_j\varphi+\overline{\mathrm{d}}_j\varphi$ $(j=1,2)$. 由于 S_{I} 的 Bergman 度量为
$$\mathrm{d}S^2=\mathrm{d}\tilde{z}T\overline{\mathrm{d}\tilde{z}T\,\mathrm{d}\tilde{z}'}=\mathrm{d}\tilde{z}J\dot{T}J'\overline{\mathrm{d}\tilde{z}'}=\mathrm{d}z^*\dot{T}\overline{\mathrm{d}z^{*\prime}}.$$
令
$$g(z_1^*,z_2^*)=z_1^*\dot{T}\overline{z_2^{*\prime}},$$
则有
$$R(u^*,v^*)=\frac{1}{2}[(g(\mathrm{d}_2\mathrm{d}_1-\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2)u^*,v^*)$$
$$+(\overline{g}'(\mathrm{d}_2\mathrm{d}_1-\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2)u^*,v^*)].$$
取
$$u^*=\mathrm{d}_1z^*=\mathrm{d}_1\tilde{z}J=\mathrm{d}_1zQ',\ v^*=\mathrm{d}_2z^*=\mathrm{d}_2\tilde{z}J=\mathrm{d}_2zQ',$$
则有
$$R(\mathrm{d}_1z^*,\mathrm{d}_2z^*)=\frac{1}{2}[g((\mathrm{d}_2\mathrm{d}_1-\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2)\mathrm{d}_1z^*,\mathrm{d}_2z^*)$$
$$+\overline{g}'((\mathrm{d}_2\mathrm{d}_1-\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2)\mathrm{d}_1z^*,\mathrm{d}_2z^*)]$$
$$=\frac{1}{2}\{\mathrm{d}_1z^*[(\overline{\mathrm{d}}_1\mathrm{d}_2\dot{T}-\mathrm{d}_2\dot{T}\cdot T^{*-1}\overline{\mathrm{d}}_1\dot{T})$$
$$-(\overline{\mathrm{d}}_2\mathrm{d}_1\dot{T}-\mathrm{d}_1\dot{T}\cdot T^{*-1}\overline{\mathrm{d}}_2\dot{T})]\overline{\mathrm{d}_2z^{*\prime}}$$
$$+\mathrm{d}_2z^*[(\overline{\mathrm{d}}_2\mathrm{d}_1\dot{T}-\mathrm{d}_1\dot{T}\cdot T^{*-1}\overline{\mathrm{d}}_2\dot{T})$$
$$-(\overline{\mathrm{d}}_1\mathrm{d}_2\dot{T}-\mathrm{d}_2\dot{T}\cdot T^{*-1}\overline{\mathrm{d}}_1\dot{T})]\overline{\mathrm{d}_2z^{*\prime}}\}.$$
由文[Hel]第 65 页可知，S_{I} 的 Riemann 截曲率为
$$K(S_{\mathrm{I}})=\frac{R(\mathrm{d}_1z^*,\mathrm{d}_2z^*)}{|\mathrm{d}_1z^*\wedge\mathrm{d}_2z^*|^2}.$$
由于分母是正的，因而我们只考虑分子.

在 $R(\mathrm{d}_1z^*,\mathrm{d}_2z^*)$ 的表达式中. 将 $\dot{T}$ 换为 $[(\overline{A}A')\times(A\overline{A}')]_K$，将 T^{*-1} 换为 $J'[J(\overline{A}A'\times\overline{A}'A)_KJ']J$，就得到 S_{I} 的以 $H(Z,\overline{Z})$ 为度量张量的相应的值，记为 $R_H(\mathrm{d}_1z^*,\mathrm{d}_2z^*)$.

不难验证，$[\overline{\mathrm{d}}\mathrm{d}\dot{T}-\mathrm{d}\dot{T}\cdot T^{*-1}\mathrm{d}\dot{T}]$ 就是 S_{I} 的 Bergman 度量的西曲率张量. 在其中令 $\lambda_2=\lambda_3=1$，就得到 S_{I} 的以 $H(Z,\overline{Z})$ 为度量张量的西曲率张量.

Ⅷ.2 曲率在 $\mathrm{i}I$ 处的值

Ⅷ.2.1

我们计算 $Z=\mathrm{i}I$ 时，$R(\mathrm{d}_1 z^*, \mathrm{d}_2 z^*)$的值.

$$
\begin{aligned}
T^{*-1}|_{Z=\mathrm{i}I} = (I\times I)_K &- \left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\right]_K \\
&- \left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K \\
&+ \frac{m_3}{m_1+m_2}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K \\
&+ \frac{m_2}{m_1+m_3}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\right]_K \\
&= T_1^{-1} + \frac{m_3}{m_1+m_2}T_2^{-1} + \frac{m_2}{m_1+m_3}T_3^{-1},
\end{aligned}
$$

其中

$$
T_1^{-1} = T_{11}^{-1} + T_{12}^{-1},\ T_{11}^{-1} = (I\times I)_K,
$$

$$
\begin{aligned}
T_{12}^{-1} = &-\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\right]_K \\
&-\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K .
\end{aligned}
$$

记

$$
\dot{T} = T_1 - \frac{m_3}{m}T_2 - \frac{m_2}{m}T_3\left(\because\ \lambda_2 - 1 = -\frac{m_3}{m}, \lambda_3 - 1 = -\frac{m_2}{m}\right).
$$

其中

$$
T_1 = (\overline{Y}^{-1}\times\overline{Y}^{-1})_K,\ T_2 = \left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\overline{Y}^{-1}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&Y^{-1}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K,
$$

$$T_3=\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&Y_3^{-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&Y_3^{-1}\end{pmatrix}\right]_K .$$

我们有

$$\begin{aligned}
d_2\hat{T}\cdot\hat{T}^{*-1}\bar{d}_1\hat{T}|_{Z=iI}=&\Big[d_2T_1\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_1+\frac{m_3}{m_1+m_2}d_2T_1\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_1\\
&+\frac{m_2}{m_1+m_3}d_2T_1\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_1-\frac{m_3}{m}d_2T_2\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_1\\
&-\frac{m_3^2}{m(m_1+m_2)}d_2T_2\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_1-\frac{m_2^2}{m(m_1+m_3)}d_2T_3\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_1\\
&-\frac{m_2}{m}d_2T_3\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_1-\frac{m_3}{m}d_2T_1\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_2\\
&-\frac{m_3^2}{m(m_1+m_2)}d_2T_1\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_2+\frac{m_3^2}{m^2}d_2T_2\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_2\\
&+\frac{m_3^2}{m^2(m_1+m_2)}d_2T_2\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_2-\frac{m_2}{m}d_2T_1\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_3\\
&-\frac{m_2^2}{m(m_1+m_3)}d_2T_1\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_3+\frac{m_2^2}{m^2}d_2T_3\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_3\\
&+\frac{m_2^3}{m^2(m_1+m_3)}d_2T_3\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_3\Big]_{Z=iI},
\end{aligned}$$

而且当 $Z=iI$ 时，有如下等式：

$$\begin{aligned}
d_2T_2\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_1&=d_2T_2\cdot T_{11}^{-1}\bar{d}_1T_1=d_2T_2\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_1,\\
d_2T_3\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_1&=d_2T_3\cdot T_{11}^{-1}\bar{d}_1T_1=d_2T_3\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_1,\\
d_2T_1\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_2&=d_2T_1\cdot T_{11}^{-1}\bar{d}_1T_2=d_2T_1\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_2,\\
d_2T_2\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_2&=d_2T_2\cdot T_{11}^{-1}\bar{d}_1T_2=d_2T_2\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_2,\\
d_2T_1\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_3&=d_2T_1\cdot T_{11}^{-1}\bar{d}_1T_3=d_2T_1\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_3,\\
d_2T_3\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_3&=d_2T_3\cdot T_{11}^{-1}\bar{d}_1T_3=d_2T_3\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_3,
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
[d_2\hat{T}\cdot\hat{T}^{*-1}\bar{d}_1\hat{T}]_{Z=iI}=&\Big[d_2T_1\cdot T_1^{-1}\bar{d}_1T_1+\frac{m_3}{m_1+m_2}d_2T_1\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_1\\
&+\frac{m_2}{m_1+m_3}d_2T_1\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_1-\frac{m_3}{m_1+m_2}d_2T_2\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_1\\
&-\frac{m_2}{m_1+m_3}d_2T_3\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_1-\frac{m_3}{m_1+m_2}d_2T_1\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_2\\
&+\frac{m_3^2}{m(m_1+m_2)}d_2T_2\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_2-\frac{m_2}{m_1+m_3}d_2T_1\cdot T_3^{-1}\bar{d}_1T_3
\end{aligned}$$

$$+\frac{m_2^2}{m(m_1+m_2)} d_2 T_3 \cdot T_3^{-1}\bar{d}_1 T_3 \Big]_{Z=iI}.$$

由于

$$\bar{d}_1 d_2 T = \bar{d}_1 d_2 T_1 - \frac{m_3}{m}\bar{d}_1 d_2 T_2 - \frac{m_2}{m}\bar{d}_1 d_2 T_3$$

$$d_2 T_1 \cdot T_1^{-1}\bar{d}_1 T_1 = d_2 T_1 \cdot T_{11}^{-1}\bar{d}_1 T_1 + d_2 T_1 \cdot T_{12}^{-1}\bar{d}_1 T_1,$$

因此有

$$\begin{aligned}
[\bar{d}_1 d_2 T - d_2 T \cdot T^{*-1}\bar{d}_1 T]_{Z=iI} &= [\bar{d}_1 d_2 T_1 - d_2 T_1 \cdot T_{11}^{-1} d_1 T_1 \\
&- \frac{m_3}{m}(\bar{d}_1 d_2 T_2 - d_2 T_2 \cdot T_2^{-1}\bar{d}_1 T_2) - \frac{m_2}{m}(\bar{d}_1 d_2 T_3 - d_2 T_3 \cdot T_3^{-1}\bar{d}_1 T_3) \\
&- d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} d_1 T_1 - \frac{m_3}{m_1+m_2}(d_2 T_1 \cdot T_2^{-1}\bar{d}_1 T_1 - d_2 T_2 \cdot T_2^{-1}\bar{d}_1 T_1 \\
&- d_2 T_1 \cdot T_2^{-1}\bar{d}_1 T_2 + d_2 T_2 \cdot T_2^{-1}\bar{d}_1 T_2) - \frac{m_2}{m_1+m_3}(d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} d_1 T_1 \\
&- d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} d_1 T_1 - d_2 T_1 \cdot T_3^{-1}\bar{d}_1 T_3 + d_2 T_3 \cdot T_3^{-1}\bar{d}_1 T_3)]|_{Z=iI}.
\end{aligned}$$

Ⅶ.2.2

由计算不难得到

$$(\bar{d}_1 d_2 T_1 - d_2 T_1 \cdot T_{11}^{-1}\bar{d}_1 T_1)_{Z=iI} = \frac{1}{4}[(\overline{d_1 Z} d_2 Z' \times I)_K + (I \times \overline{d_1 Z'} d_2 Z)_K],$$

$$\begin{aligned}
(\bar{d}_1 d_2 T_2 - d_2 T_2 \cdot T_2^{-1}\bar{d}_1 T_2)_{Z=iI} &= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \overline{d_1 Z_{22}} d_2 Z_{22}' & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K \\
&+ \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \overline{d_1 Z_{22}'} d_2 Z_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{d}_1 d_2 T_3 - d_2 T_3 \cdot T_3^{-1}\bar{d}_1 T_3)_{Z=iI} &= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \overline{d_1 Z_{33}} d_2 Z_{33}'\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\right]_K \\
&+ \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \overline{d_1 Z_{33}'} d_2 Z\end{pmatrix}\right]_K.
\end{aligned}$$

下面计算$[d_2T_1\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_1-d_2T_2\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_1-d_2T_1\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_2+d_2T_2\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_2]_{Z=U}$.

由于

$$(d_2T_1\cdot T_2^{-1}d_1T_1)_{Z=U}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & d_2Z'_{22} & 0\\ 0 & d_2Z'_{21} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ d_1Z_{21} & \overline{d_1Z_{22}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & d_2Z_{12} & 0\\ 0 & d_2Z_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \overline{d_1Z'_{12}} & \overline{d_1Z'_{22}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \overline{d_1Z_{21}} & \overline{d_1Z_{22}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & d_2Z_{12} & 0\\ 0 & d_2Z_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & d_2Z'_{21} & 0\\ 0 & d_2Z'_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \overline{d_1Z'_{12}} & \overline{d_1Z'_{22}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K,$$

$$(d_2T_2\cdot T_2^{-1}d_1T_1)_{Z=U}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & d_2Z'_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \overline{d_1Z_{21}} & \overline{d_2Z_{22}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & d_2Z_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \overline{d_1Z'_{12}} & \overline{d_1Z'_{22}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \overline{d_1Z_{21}} & \overline{d_1Z_{22}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & d_1Z_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & d_2Z'_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \overline{d_1Z'_{12}} & \overline{d_1Z'_{22}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K,$$

$$(d_2T_1\cdot T_2^{-1}\bar{d}_1T_2)_{Z=U}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ d_2Z'_{12} & d_2Z'_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \overline{d_1Z_{22}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\d_2 Z_{21}&d_2 Z_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\overline{d_1 Z'_{22}}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\overline{d_1 Z_{22}}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&d_2 Z_{12}&0\\0&d_2 Z_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0&d_2 Z'_{21}&0\\0&d_2 Z'_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\overline{d_1 Z'_{22}}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K,$$

$$(d_2 T_2\cdot T_2^{-1}\overline{d}_1 T_2)_{Z=H}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&d_2 Z'_{22}\overline{d_1 Z_{22}}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&d_2 Z'_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\overline{d_1 Z'_{22}}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&d_2 Z_{22}\overline{d_1 Z'_{22}}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K$$

$$+\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\overline{d_1 Z_{22}}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&d_2 Z_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K$$

因此我们得到$[d_2 T_1\cdot T_2^{-1}\overline{d}_1 T_1 - d_2 T_2\cdot T_2^{-1} d_1 T_1 - d_2 T_1\cdot T_2^{-1} d_1 T_2 + d_2 T_2\cdot T_2^{-1}\overline{d_1 T_2}]_{Z=H}$的表达式

$$\frac{1}{4}\left\{\left[\begin{pmatrix}0&d_2 Z'_{21}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K+\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&d_2 Z_{12}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K\right\}$$

$$-\left\{\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\\overline{d_1 Z_{21}}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K+\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\\overline{d_1 Z'_{12}}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K\right\}.$$

同样我们可以得到$[d_2 T_1\cdot T_3^{-1} d_1 T_1 - d_2 T_3\cdot T_3^{-1} d_1 T_1 - d_2 T_1\cdot T_3^{-1}\overline{d}_1 T_3 + d_2 T_3\cdot T_3^{-1}\overline{d}_1 T_3]_{Z=H}$的表达式

$$\frac{1}{4}\left\{\left[\begin{pmatrix}0&0&d_2Z'_{31}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\right]_K+\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&d_2Z_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K\right\}$$

$$+\left\{\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\overline{d_1Z_{31}}&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\right]_K+\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\overline{d_1Z'_{13}}&0&0\end{pmatrix}\right]_K\right\}.$$

Ⅶ.2.3

现在计算 $d_2T_1\cdot T_{12}^{-1}\overline{d}_1T_1$. 在下面的表达式中,我们已作了某种简化,即将矩阵的某些不影响最后结果的元素径直以 0 来代替,例如

$$\left[\begin{pmatrix}0&d_2Z'_{21}&0\\0&*&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\\overline{d_1Z_{21}}&*&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\right]_K$$

我们就简化为

$$\left[\begin{pmatrix}0&d_2Z'_{21}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\\overline{d_1Z_{21}}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\right]_K.$$

原因是在上两式的左边乘以 d_1z^* 右边乘以 $\overline{d_2z^{*\prime}}$ 所得结果是完全一样的. 我们有

$$(d_2T_1\cdot T_{12}^{-1}\overline{d}_1T_1)_{ZH}=\frac{1}{4}\left\{\left[\begin{pmatrix}0&d_2Z'_{21}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\right]_K\right.$$

$$\left.+\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&d_2Z_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K\right\}$$

$$+\left\{\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\\overline{d_1Z_{21}}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\right]_K+\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\overline{d_1Z'_{13}}&0&0\end{pmatrix}\right]_K\right\}$$

$$\frac{1}{4}\left\{\left[\begin{pmatrix}0&0&d_2Z'_{31}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K+\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&d_2Z_{12}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K\right\}$$

$$+\left\{\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\overline{d_1Z_{31}}&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K+\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&I\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\\overline{d_1Z_{12}}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]_K\right\}$$

Ⅶ.2.4

综合 2.2 与 2.3 就得到$[\bar{\mathrm{d}}_1\mathrm{d}_2\dot{T}-\mathrm{d}_2\dot{T}\cdot T^{*-1}\bar{\mathrm{d}}_1\dot{T}]_{Z=I}$的具体表达式,其共轭转置就是$[\bar{\mathrm{d}}_2\mathrm{d}_1\dot{T}-\mathrm{d}_1\dot{T}\cdot T^{*-1}\bar{\mathrm{d}}_2\dot{T}]_{Z=I}$的具体表达式,再注意到以下两点:

a. $\mathrm{d}_1 z^*(C\dot{\times}D)_K\overline{\mathrm{d}_2 z^{*}}=\mathrm{d}_1 z(C\dot{\times}D)\mathrm{d}_2 z'$

b. $u(C\dot{\times}D)(E\dot{\times}F)v'=\mathrm{tr}[C'UDFV'E']$.

事实上,a 是显然的,至于 b,令

$$x=u(C\dot{\times}D),y=v(\overline{E}'\dot{\times}\overline{F}'),$$

将 x 与 y 排成方阵有

$$X=C'UD,Y=\overline{E}VF'.$$

因此有

$$u((C\dot{\times}D)(E\dot{\times}F)\bar{v}'=xy'=\mathrm{tr}[XY']=\mathrm{tr}[C'UDFV'E'],$$

b 得证.这样我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}_1 z^*[\bar{\mathrm{d}}_1\mathrm{d}_2\dot{T}-\mathrm{d}_2\dot{T}\cdot T^{*-1}\bar{\mathrm{d}}_1\dot{T}]_{Z=I}\overline{\mathrm{d}_2 z^{*\prime}}\\
=&\frac{1}{4}\mathrm{tr}[\mathrm{d}_2Z\,\overline{\mathrm{d}_1Z'}\mathrm{d}_1Z\,\overline{\mathrm{d}_2Z'}+\mathrm{d}_1Z\,\overline{\mathrm{d}_1Z'}\mathrm{d}_2Z\,\overline{\mathrm{d}_2Z'}]\\
&-\frac{m_3}{4m}\mathrm{tr}[\mathrm{d}_2Z_{22}\overline{\mathrm{d}_1Z'}\mathrm{d}_1Z_{22}\overline{\mathrm{d}_1Z'_{22}}+\mathrm{d}_1Z_{22}\overline{\mathrm{d}_1Z'}_{22}\mathrm{d}_2Z_{22}\mathrm{d}_2Z'_{22}]\\
&-\frac{m_2}{4m}\mathrm{tr}[\mathrm{d}_2Z_{33}\overline{\mathrm{d}_1Z'_{33}}\mathrm{d}_1Z_{33}\overline{\mathrm{d}_2Z'_{33}}+\mathrm{d}_1Z_{33}\overline{\mathrm{d}_1Z'}_{33}\mathrm{d}_2Z_{33}\overline{\mathrm{d}_2Z'_{33}}]\\
&-\frac{1}{4}\mathrm{tr}[(\mathrm{d}_2Z_{12}\mathrm{d}_1Z_{13}+\mathrm{d}_1Z_{21}\mathrm{d}_2Z_{13})\overline{(*)'}]\\
&+\frac{1}{4}\mathrm{tr}[\mathrm{d}_2Z_{31}\mathrm{d}_1Z_{12}+\mathrm{d}_1Z_{31}\mathrm{d}_2Z_{12})\overline{(*)'}]\\
&-\frac{m_3}{4(m_1+m_2)}\mathrm{tr}[\mathrm{d}_2Z_{21}\mathrm{d}_1Z_{12}+\mathrm{d}_1Z_{21}\mathrm{d}_2Z_{12})\overline{(*)'}]\\
&-\frac{m_2}{4(m_1+m_3)}\mathrm{tr}[(\mathrm{d}_2Z_{31}\mathrm{d}_1Z_{13}+\mathrm{d}_1Z_{31}\overline{\mathrm{d}_2Z_{13}})(*)'],
\end{aligned}$$

其中,$\overline{(*)'}$表示其前面的因子的共轭转置,下同.

同样我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}_1 z^*[\bar{\mathrm{d}}_2\mathrm{d}_1\dot{T}-\mathrm{d}_1\dot{T}\cdot T^{*-1}\mathrm{d}_2\dot{T}]_{Z=I}\overline{\mathrm{d}_2 z^{*\prime}}\\
=&\frac{1}{4}\mathrm{tr}[\mathrm{d}_1Z\,\mathrm{d}_2Z'\mathrm{d}_2Z\,\overline{\mathrm{d}_2Z'}+\mathrm{d}_1Z\,\overline{\mathrm{d}_1Z'}\mathrm{d}_2Z\,\overline{\mathrm{d}_2Z'}]\\
&-\frac{m_3}{4m}\mathrm{tr}[\mathrm{d}_1Z_{22}\overline{\mathrm{d}_2Z'_{22}}\mathrm{d}_1Z_{22}\overline{\mathrm{d}_2Z'_{22}}+\mathrm{d}_1Z_{22}\overline{\mathrm{d}_1Z'_{22}}\mathrm{d}_2Z_{22}\overline{\mathrm{d}_2Z'_{22}}]\\
&-\frac{m_2}{4m}\mathrm{tr}[\mathrm{d}_1Z_{33}\cdot\mathrm{d}_2Z'_{33}\mathrm{d}_1Z_{33}\overline{\mathrm{d}_2Z'_{33}}]+[\mathrm{d}_1Z_{33}\overline{\mathrm{d}_1Z'}_{33}\mathrm{d}_2Z_{33}\mathrm{d}_2Z'_{33}]
\end{aligned}$$

$$+\operatorname{tr}[\mathrm{d}_1 Z_{21}\mathrm{d}_1 Z_{13}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{13}}\ \overline{\mathrm{d}_2 Z'_{21}}]+\operatorname{tr}[\mathrm{d}_1 Z_{31}\mathrm{d}_1 Z_{12}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{12}}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{31}}]$$

$$-\frac{m_3}{m_1+m_2}\operatorname{tr}[\mathrm{d}_1 Z_{21}\mathrm{d}_1 Z_{12}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{12}}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{21}}]$$

$$-\frac{m_2}{m_1+m_3}\operatorname{tr}[\mathrm{d}_1 Z_{31}\mathrm{d}_1 Z_{13}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{13}}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{31}}].$$

最后我们得到

$$R(\mathrm{d}_1 z^*,\mathrm{d}_2 z^*)_{Z=H}$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tr}[(\mathrm{d}_1 Z\ \overline{\mathrm{d}_2 Z'}-\mathrm{d}_2 Z\ \overline{\mathrm{d}_1 Z'})\overline{(*)'}]$$

$$-\frac{m_3}{4m}\operatorname{tr}[(\mathrm{d}_1 Z_{22}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{22}}-\mathrm{d}_2 Z_{22}\overline{\mathrm{d}_1 Z'_{22}})\overline{(*)'}]$$

$$-\frac{m_2}{4m}\operatorname{tr}[(\mathrm{d}_1 Z_{33}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{33}}-\mathrm{d}_2 Z_{33}\overline{\mathrm{d}_1 Z'_{33}})\overline{(*)'}]$$

$$+\frac{1}{4}\operatorname{tr}[(\mathrm{d}_2 Z_{21}\mathrm{d}_1 Z_{13}+\mathrm{d}_1 Z_{21}\mathrm{d}_2 Z_{13})\overline{(*)'}]$$

$$+\frac{1}{4}\operatorname{tr}[(\mathrm{d}_2 Z_{31}\mathrm{d}_1 Z_{12}+\mathrm{d}_1 Z_{31}\mathrm{d}_2 Z_{12})\overline{(*)'}]$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\mathrm{d}_1 Z_{21}\mathrm{d}_1 Z_{13}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{13}}\cdot\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{21}}]$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\overline{[\mathrm{d}_1 Z_{21}\mathrm{d}_1 Z_{13}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{13}}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{21}}]'}$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\mathrm{d}_1 Z_{31}\mathrm{d}_1 Z_{12}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{12}}\cdot\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{31}}]$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\overline{[\mathrm{d}_1 Z_{31}\mathrm{d}_1 Z_{12}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{12}}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{31}}]'}$$

$$-\frac{m_3}{4(m_1+m_2)}\operatorname{tr}[(\mathrm{d}_2 Z_{21}\mathrm{d}_1 Z_{12}+\mathrm{d}_1 Z_{21}\mathrm{d}_2 Z_{12})\overline{(*)'}]$$

$$-\frac{m_2}{4(m_1+m_3)}\operatorname{tr}[(\mathrm{d}_2 Z_{31}\mathrm{d}_1 Z_{13}+\mathrm{d}_1 Z_{31}\mathrm{d}_2 Z_{13})\overline{(*)'}]$$

$$+\frac{m_3}{2(m_1+m_2)}\operatorname{tr}[(\mathrm{d}_1 Z_{21}\mathrm{d}_1 Z_{12}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{12}}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{21}}]$$

$$+\frac{m_3}{2(m_1+m_2)}\operatorname{tr}\overline{[\mathrm{d}_1 Z_{21}\mathrm{d}_1 Z_{12}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{12}}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{21}}]'}$$

$$+\frac{m_2}{2(m_1+m_3)}\operatorname{tr}[\mathrm{d}_1 Z_{31}\mathrm{d}_1 Z_{13}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{13}}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{31}}]$$

$$+\frac{m_2}{2(m_1+m_3)}\operatorname{tr}\overline{[\mathrm{d}_1 Z_{31}\mathrm{d}_1 Z_{13}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{13}}\overline{\mathrm{d}_2 Z'_{31}}]'}.$$

Ⅷ.2.5

在上式中令 $m_2=m_3=0$,就得到 S_1 的 Hua 度量的 $R_H(\mathrm{d}_1 z^*,\mathrm{d}_2 z^*)$的值.

由于 $S_{\rm I}$ 的关于 Bergman 度量及 Hua 度量的西曲率分别为：

$$\omega_T=-\frac{\mathrm{d}z^*[\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}\dot{T}-\mathrm{d}\dot{T}\cdot \dot{T}^{*-1}\bar{\mathrm{d}}\dot{T}]\overline{\mathrm{d}z^{*\prime}}}{(\mathrm{d}z^*\dot{T}\,\overline{\mathrm{d}z^{*\prime}})^2}=-\frac{W_T}{(\mathrm{d}z^*\dot{T}\,\overline{\mathrm{d}z^{*\prime}})^2},$$

$$\omega_H=-\frac{\mathrm{d}z^*[\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}\dot{H}-\mathrm{d}\dot{H}\cdot \dot{H}^{*-1}\bar{\mathrm{d}}\dot{H}]\overline{\mathrm{d}z^{*\prime}}}{(\mathrm{d}z^*\dot{H}\,\overline{\mathrm{d}z^{*\prime}})^2}=-\frac{W_H}{(\mathrm{d}z^*\dot{H}\,\overline{\mathrm{d}z^{*\prime}})^2},$$

其中，$\dot{H}$ 及$(H^*)^{-1}$分别为 $\dot{T}$ 及$(T^*)^{-1}$中将$[(A\times A)_K I_\lambda(A'\times\bar{A})'_K]$换为$[AA'\times A\bar{A}']_K$ 后而成的式子.

容易看出，W_T 在 $Z=\mathrm{i}I$ 处的值为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'}]^2-\frac{m_3}{2m}\mathrm{tr}[\mathrm{d}Z_{22}\overline{\mathrm{d}Z'_{22}}\mathrm{d}Z_{22}\overline{\mathrm{d}Z'_{22}}]-\frac{m_2}{2m}\mathrm{tr}[\mathrm{d}Z_{33}\mathrm{d}Z'_{33}]^2\\&+\mathrm{tr}[\mathrm{d}Z_{21}\mathrm{d}Z_{13}\overline{\mathrm{d}Z'_{13}}\,\overline{\mathrm{d}Z'_{21}}]+\mathrm{tr}[\mathrm{d}Z_{31}\mathrm{d}Z_{12}\overline{\mathrm{d}Z'_{12}}\,\overline{\mathrm{d}Z'_{31}}]\\&-\frac{m_3}{m_1+m_2}\mathrm{tr}[\mathrm{d}Z_{21}\mathrm{d}Z_{12}\overline{\mathrm{d}Z'_{12}}\,\overline{\mathrm{d}Z'_{21}}]\\&-\frac{m_3}{m_1+m_3}\mathrm{tr}[\mathrm{d}Z_{31}\mathrm{d}Z_{13}\overline{\mathrm{d}Z'_{13}}\,\overline{\mathrm{d}Z'_{31}}],\end{aligned}$$

在此式中令 $m_2=m_3=0$，就得到 W_H 的在 $Z=\mathrm{i}I$ 处的值.

VII.3 曲率的特点

VII.3.1

$S_{\rm I}$ 的对于 Bergman 度量及 Hua 度量的 Riemann 截曲率是不定的.

事实上，令

$$\mathrm{d}_1Z=\begin{pmatrix}\mathrm{d}_1Z_{11}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{d}_2Z=\begin{pmatrix}\mathrm{d}_2Z_{11}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则显然有

$$R(\mathrm{d}_1z^*,\mathrm{d}_2z^*)\geqslant 0,\qquad R_H(\mathrm{d}_1z^*,\mathrm{d}_2z^*)\geqslant 0.$$

若令

$$\mathrm{d}_1Z=\begin{pmatrix}0&\mathrm{d}_1Z_{12}&\mathrm{d}_1Z_{13}\\\mathrm{d}_1Z'_{12}&\mathrm{d}_1Z_{22}&0\\\mathrm{d}_1Z'_{13}&0&\mathrm{d}_1Z_{33}\end{pmatrix},\quad \mathrm{d}_2Z=\begin{pmatrix}0&\mathrm{d}_2Z_{12}&\mathrm{d}_2Z_{13}\\\mathrm{d}_2Z'_{12}&\mathrm{d}_2Z_{22}&0\\\mathrm{d}_2Z'_{13}&0&\mathrm{d}_2Z_{33}\end{pmatrix}$$

而

$$\mathrm{d}_1Z_{12}=\underset{\ \ 1\quad\ m_2-1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}\begin{matrix}1\\m_1-1\end{matrix},\quad \mathrm{d}_1Z_{13}=\underset{\ \ 1\quad\ m_3-1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}\begin{matrix}1\\m_1-1\end{matrix},\quad \mathrm{d}_1Z_{22}=\underset{\ \ 1\quad\ m_2-1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}\begin{matrix}1\\m_2-1\end{matrix},$$

$$d_1Z_{33}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\m_3-1\end{matrix},\quad d_2Z_{12}=\begin{pmatrix}-i&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\m_1-1\end{matrix},\quad d_2Z_{13}=\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\m_1-1\end{matrix},$$
$$\qquad\;\; 1\quad m_3-1 \qquad\qquad\qquad 1\quad m_2-1 \qquad\qquad\qquad 1\quad m_3-1$$

$$d_2Z_{22}=\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\m_2-1\end{matrix},\quad d_2Z_{33}=\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\m_3-1\end{matrix},$$
$$\qquad\;\; 1\quad m_2-1 \qquad\qquad\qquad 1\quad m_3-1$$

我们有

$$R(d_1\overset{*}{z},d_2\overset{*}{z})=-\left[\frac{m_2+m_3}{m}+\frac{2m_3}{m_1+m_2}+\frac{2m_2}{m_1+m_3}+2\right]<0,$$
$$R_H(d_1\overset{*}{z},d_2\overset{*}{z})=-2<0.$$

Ⅷ.3.2 S_1 的关于 Hua 度量的西曲率恒小于零.事实上,由于

$$W_H|_{Z=iI}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}[dZ\,\overline{dZ'}]^2+\mathrm{tr}[(dZ_{21}dZ_{13})\overline{(dZ_{21}dZ_{13})'}]$$
$$+\mathrm{tr}[(dZ_{31}dZ_{12})\overline{(dZ_{31}dZ_{12})'}]>0,$$

因此有 $\omega_H|_{Z=iI}<0$,由于 S_1 可递,所以总有 $\omega_H<0$.

Ⅷ.3.3 S_1 的对于 Bergman 度量的西曲率 ω_T,当$(m_1+m_2-m_3)$与$(m_1+m_3-m_2)$同时非负时,$\omega_T<0$,当$(m_1+m_2-m_3)$与$(m_1+m_3-m_2)$异号时,ω_T 符号不定.

事实上,令

$$B_{11}=dZ_{11}\overline{dZ'_{11}}+dZ_{12}\overline{dZ'_{12}}+dZ_{13}\overline{dZ'_{13}},\quad B_{12}=dZ_{11}\overline{dZ'_{21}}+dZ_{12}\overline{dZ'_{22}}$$
$$B_{13}=dZ_{11}\overline{dZ'_{31}}+dZ_{13}\overline{dZ'_{33}},\quad B_{21}=\overline{B}'_{12}$$
$$B_{22}=dZ_{21}\overline{dZ'_{21}}+dZ_{22}\overline{dZ'_{22}},\quad B_{23}=dZ_{21}\overline{dZ'_{31}}$$
$$B_{33}=dZ_{31}\overline{dZ'_{31}}+dZ_{33}\overline{dZ'_{33}},\quad B_{31}=\overline{B}'_{13},B_{32}=\overline{B}'_{23}$$

则有

$\mathrm{tr}[dZ\,\overline{dZ'}]^2=\mathrm{tr}[B_{11}\overline{B}'_{11}+2B_{12}\overline{B}'_{12}+2B_{13}\overline{B}'_{13}+B_{22}B'_{22}+2B_{23}B'_{23}+B_{33}\overline{B}'_{33}]$ 以此代入 $W_T|_{Z=iI}$的表达式中,我们有

$$W_T|_{Z=iI}=\mathrm{tr}[B_{12}\bar{B}'_{12}+B_{13}B'_{13}+B_{23}B'_{23}]+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[dZ_{11}\overline{dZ'_{11}}]^2.$$

原书空白页

第三章

Reinhardt 域

第三章　Reinhardt 域

第一章我们讨论了 Cartan 域，这是对称的可递域（齐性域），华罗庚称它们为典型域；第二章讨论了非对称的可递域．这都是属于有界可递域的范畴．我国对典型域的研究有自己的特色与方法，并一直处于国际先进水平．一般用李群李代数作为工具，或者用 Jordan Triple System（JTS）作为工具对典型域进行研究．这方面的结果十分丰富．由于有界可递域都全纯等价于 Siegel 域，因而对有界齐性域的研究归结为对 Siegel 域的研究．但是对于非对称齐性域的研究，由于非常复杂，其结果远没有像对称齐性域那样丰富和漂亮．研究非对称齐性域太复杂，这是作者转向于研究蛋型 Reinhardt 域的原因之一．原因之二，是由于这种蛋型域是弱拟凸域的最简单的模型，从中可以得到很多关于弱拟凸域的信息，因此一直受到数学家的关注．我从阅读文献[Gon]开始，该文主要研究 2 维蛋型 Reinhardt 域 $D=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2:|z_1|^2+|z_2|^p\}$ 在 Bergman 度量下的曲率．读后有两点感觉．首先，该文的 Bergman 度量方阵的计算有误，因而随之而来的各种曲率的计算也就不正确．其次，该文通篇是死算硬算，事实上完全可以通过域 D 的全纯自同构群将 D 中的点 (z_1,z_2) 变为形为 $(w^*,0)$ 的点，而曲率在此变换下是不变的，因而多个变量的计算就化为一个变量的计算．对域 $\{z\in\mathbf{C}^n:1-|z_1|^2-\cdots-|z_{n-1}|^2-|Z_n|^{2p}>0,\}$ 也可以利用同样方法化为对一个变量的计算．这种化简计算的方法是相当基本的和有用的．在本章及下一章中我们都要用到．这一章包含了作者在蛋型 Reinhardt 域方面迄今为止的主要结果．

I．一种域的曲率与群不变函数

对 $\mathbf{C}^n$ 中的非齐性有界域 D，我们在 D 的解析自同胚群 Aut（D）下得到了不变的函数；给出了在 Aut（D）下不变的 Kahler 度量的一般形式；利用群不变函数的性质，将满足给定曲率条件的不变 Kahler 度量的求解化为相应的常微分方程问题；给出了使 Ricci 曲率、Scalar 曲率和全纯截曲率在给定的条件下相应的不变 Kahler 度量的一些有趣的具体表达式．

1.1. 基本事实

我们所考虑的域 $D=D(K)$是：

$$D=\{z=(z_1,z_2,\cdots z_n)=(z_1,Z)\in\mathbf{C}^n\mid |z_1|^{2K}+|Z|^2<1\},$$

其中 $K>0$. 我们之所以集中研究 $D(K)$，是因为随 K 的不同，$D(K)$可以是齐性、非齐性，也可以是强拟凸、弱拟凸，是一个很好的模型，能对上述四方面提供很好信息.

1. $D(K)$的解析自同胚最大群

此群若记之为 $\mathrm{Aut}(D)$，则它由下列形式的 D 的双全纯映照组成(见文[Web])：

$$w_1=e^{i\theta}z_1(1-|\alpha|^2)^{1/2K}(1-\bar{\alpha}Z')^{-1/K},$$

$$W=(w_2,\cdots,w_n)=e^{i\varphi}(1-|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}(Z-\alpha)Q_\alpha(1-\bar{\alpha}Z')^{-1},$$

其中 θ,φ 为任意实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，而且

$$\alpha=(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{C}^{n-1},\ |\alpha|^2<1,$$

$$(Q_\alpha\overline{Q}_\alpha')^{-1}=I^{(n-1)}-\bar{\alpha}'\alpha.$$

2. $D(K)$的 Bergman 核

此核若记为 $K_D(z,\bar{z})$，则它有下列具体的显表达式[DA]：

$$K_D(z,\bar{z})=\frac{K(1-|Z|^2)^{-n+\frac{1}{K}}}{\pi^n[(1-|Z|^2)^{1/K}-|z_1|^2]^{n+1}}\sum_{j=0}^{n-1}b_j(1-|Z|^2)^{\frac{n-j}{K}}[(1-|Z|^2)^{1/K}-|z_1|^2]^j.$$

其中 $b_j(j=0,1,2,\cdots,n-1)$由下式对 x 的同次幂比较系数而确定[YW28]：

$$\prod_{j=0}^{n-1}(x+1+jK)=K^n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{b_j\Gamma(x+n+1-j)}{\Gamma(n+1-j)\Gamma(x+1)}.$$

3. $D=D(K)$在 $\mathrm{Aut}(D)$下不变的 Kahler 度量与不变函数

由文[YW28]易知，若

$$w=f(z)\in\mathrm{Aut}(D),$$

$$K_j(z,\bar{z})=(1-|Z|^2)^{-n+\frac{n-1}{K}}[(1-|Z|^2)^{\frac{1}{K}}-|z_1|^2]^{-(n+1)+j},$$

则有

$$K_j(z,\bar{z})=K_j(w,\overline{w})\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|^2\ (j\ 为任意实数).$$

当 j 属于闭区间$[0,n]$时，对 $K_j(z,\bar{z})$进行 ∂^2－过程后所得矩阵 $H_j(z,\bar{z})$是定正的，而且

$$H_j(z,\bar{z})=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)H_j(w,\bar{w})\left(\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)',$$

因此度量

$$ds_j^2=dzH_j(z,\bar{z})d\bar{z}'$$

是在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的 Kahler 度量.

由文[YW28]易知,函数

$$Y(z,\bar{z})=(1-|Z|^2)^{\frac{1}{K}}\left[(1-|z|^2)^{\frac{1}{K}}-|z_1|^2\right]^{-1}\tag{3.1.1}$$

在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变,即若 $r\in\mathrm{Aut}(D)$,则 $Y(rz,\overline{rz})=Y(z,\bar{z})$. 而且以 Y 为变量的任何函数也在 $\mathrm{Aut}(D)$下不变.

I.2. $D=D(K)$的不变 Kähler 度量与群不变函数 $Y(z,\bar{z})$的关系

由于

$$\begin{aligned}K_j(z,\bar{z})&=(1-|Z|^2)^{-n-\frac{n-1}{K}}\left[(1-|Z|^2)^{\frac{1}{K}}-|z_1|^2\right]^{-(n+1)+j}\\&=[Y(z,\bar{z})]^{n+1-j}(1-|Z|^2)^{-\frac{nK-1}{K}},\end{aligned}$$

因此,$D(K)$的 Bergman 核 $K_D(z,\bar{z})$可表为:

$$\begin{aligned}K_D(z,\bar{z})&=\frac{K}{\pi^n}\sum_{j=0}^{n-1}b_jK_j(z,\bar{z})\\&=\frac{K}{\pi^n}(1-|Z|^2)^{-\frac{nK+1}{K}}\sum_{j=0}^{n-1}b_j(Y(z,\bar{z}))^{n+1-j}.\end{aligned}$$

由此可知,$D(K)$的 Bergman 度量方阵,实际上就是 $Y(z,\bar{z})$为变量的某一个函数与$(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$的积经过∂^2-过程而得到的. 下面我们证明 $D(K)$的任何在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的 Kahler 度量,在一个相当广泛的基本假定之下,都可由下列形式的函数生成:

$$F(Y)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K},\tag{3.1.2}$$

其中 $F(Y)$是 Y 的任意一个函数.

基本假定 设 $D(K)$的函数 $K(z,\bar{z})$满足:

(A)
1. 是 z 和 $\bar{z}$ 的解析函数,
2. 对 $w=f(z)\in\mathrm{Aut}(D)$,有 $K(z,\bar{z})=K(w,\bar{w})\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|^2$,
3. $z=(z_1,0)$时,$\boldsymbol{K}(z,\bar{z})$是$|z_1|^2$ 的某个函数 $F(|z_1|^2)$,
4. 当 $z\in D(K)$时 $K(z,\bar{z})>0$,
5. 对 $K(z,\bar{z})$进行 ∂^2-过程后所得矩阵定正,即$\left(\frac{\partial^2\ln K(z,\bar{z})}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\right)>0$,

此时我们称 $\boldsymbol{K}(z,\bar{z})$为 $D(K)$的不变 Kähler 度量的生成函数. 我们有如

下定理.

定理 1. 若 $K(z,\bar{z})$ 为 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量的生成函数,则

$$K(z,\bar{z})=F[Y(z,\bar{z})](1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}.$$

证: 由(A)2 知,当 $z=(z_1,\alpha)$ 时,

$$K[(z_1,\alpha),(\bar{z},\bar{\alpha})]=K[(w_1,0),(\bar{w}_1,0)]\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|^2_{Z=\alpha}$$

由(A)3 知,

$$K[(w_1,0),(\bar{w}_1,0)]=F(|w_1|^2)=F\left[\frac{|z_1|^2}{(1-|\alpha|^2)^{1/K}}\right],$$

而

$$\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|^2_{Z=\alpha}=(1-|\alpha|^2)^{-(nK+1)/K}.$$

上面运算对任意 $(z_1,\alpha)\in D(K)$ 都成立,令 $\alpha=Z$ 得

$$K(z,\bar{z})=F\left[\frac{|z_1|^2}{(1-|z|^2)^{1/K}}\right](1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K},\quad(3.1.3)$$

而

$$F\left[\frac{|z_1|^2}{(1-|z_1|^2)^{1/K}}\right]=F\left[-\frac{((1-|Z|^2)^{\frac{1}{K}}-|z_1|^2)+(1-|Z|^2)^{1/K}}{(1-|Z|^2)^{1/K}}\right]$$
$$=F[-Y^{-1}(z,\bar{z})+1]$$

仍然是 $Y(z,\bar{z})$ 的一个函数,不妨仍将它记为 $F(Y)$,以此代入(3.1.3)式即得所证.

由定理 1 知,满足条件(A)的 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量由形式(3.1.2)式的函数所生成.显然,并不是所有(3.1.2)式的函数都符合基本假定(A),但是我们有:

定理 2. 若(3.1.2)式的函数满足(A)中的 1,4,5,则此函数是 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量的生成函数.而且与(A)5 相应的度量矩阵为:

$$J\begin{pmatrix}F_1(Y) & 0\\ 0 & F_2(Y)I^{(n-1)}\end{pmatrix}\bar{J}',$$

其行列式为:

$$G(Y)(1-|Z|^2)^{-\frac{nK+1}{K}}$$

也具(3.1.2)式的形式.其中

$$J=\begin{pmatrix}J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix},\quad J_{11}=e^{i\theta}(1-|Z|^2)^{-\frac{1}{2K}},\ J_{21}=\frac{e^{i\varphi}}{K}z_1(1-|Z|^2)^{-\frac{(2K+1)}{2K}}\bar{z}',$$
$$J_{22}=e^{i\varphi}(1-|Z|^2)^{-\frac{1}{2}}Q_z.$$

证:(3.1.2)式的函数显然满足(A)3.由第一节知:

$$1-|W|^2=1-(1-|\alpha|^2)(Z-\alpha)Q_\alpha Q'_\alpha(Z'-\bar{\alpha}')|1-\bar{\alpha}Z'|^{-2}.$$

经计算知

$$1-|W|^2=|1-\bar{\alpha}z'|^{-2}(1-|\alpha|^2)(1-|z|^2).$$

而

$$\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|^2=\frac{(1-|\alpha|^2)^{(nK+1)/K}}{|1-\alpha Z'|^{2(nK+1)/K}},$$

因此

$$F(Y)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$$

$$=F(Y(w,\bar{w}))(1-|W|^2)^{-\frac{nK+1}{K}}\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|^2$$

满足(A)2,因此可成为不变 Kähler 度量的生成函数.

经过一些计算可知,对(3.1.2)式的函数进行了 ∂^2-过程后所得矩阵为:

$$J\begin{pmatrix} F_1(Y) & 0 \\ 0 & F_2(Y)I^{(n-1)} \end{pmatrix}\bar{J}',$$

其中

$$F_1(Y)=Y^2\left[\frac{F'(Y)}{F(Y)}(-1+2Y)+\frac{F''(Y)}{F(Y)}(Y^2-Y)+\left(\frac{F'}{F}\right)^2(Y-Y^2)\right],$$

$$F_2(Y)=\frac{F'(Y)Y}{KF(Y)}(Y-1)+\frac{nK+1}{K},$$

$F'(Y)$,$F''(Y)$分别表示 $F(Y)$对 Y 的一阶和二阶导数.

上面矩阵的行列式为:

$$F_1(F_2)^{n-1}(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}=G(Y)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}.$$

对任一不变函数 $F(Y)$,由于对 $w=f(z)\in \mathrm{Aut}(D)$有

$$\left(\frac{\partial^2 F(Y)}{\partial z_i\partial \bar{z}_j}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 F[Y(w,\bar{w})]}{\partial w_i\partial \bar{w}_j}\right)\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)'},$$

因此上式若为定正方阵,则 $F(Y)$就生成一个不变的 Kahler 度量.但计算表明,上式左端为:

$$J\begin{pmatrix} Y^2[F''(Y^2-Y)+F'(2Y-1)], & 0 \\ 0, & K^{-1}YF'(Y-1)I^{(n-1)} \end{pmatrix}\bar{J}',$$

而 $Y-1=[(1-|Z|^2)^{\frac{1}{K}}-1]^{-1}|z_1|^2$,当 $z_1=0$ 时,上面方阵不可能定正.因此,任何一个不变函数都不可能成为 $D(K)$的不变 Kahler 度量的生成函数.这种生成函数,正如定理1所证明的,必须在(3.1.2)式的函数中去找.

1.3. 对 $\mathbf{C}^n$ 中任意一个有界域 $\mathscr{D}$ 的情形

将(3.1.2)式改写一下,并注意到第二节开头的 $D(K)$的 Bergman 核的表达形式.我们有:

$$
\begin{aligned}
& F(Y)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K} \\
= & F(Y)\Big(\sum_{j=0}^{n-1} b_j Y^{n-1-j}\Big)^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} b_j Y^{n-1-j}\Big)(1-|Z|^2)^{-\frac{(nK+1)}{K}} \\
= & G(Y)K_D(z,\bar{z}).
\end{aligned}
$$

其中 $G(Y)$仍然是一个 Y 的某一函数,即是 $D(K)$的在 $\mathrm{Aut}(D)$下不变的函数.

因此,对 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域 $\mathscr{D}$,若 $K_{\mathscr{D}}(z,\bar{z})$是 Bergman 函数,以 $F(z,\bar{z})$表示域 $\mathscr{D}$ 的在 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$下的任意不变函数,若下式的函数

$$
F(z,\bar{z})K_{\mathscr{D}}(z,\bar{z}) \tag{3.1.4}
$$

中,$F(z,\bar{z})$是 z 和 $\bar{z}$ 的解析函数且大于零,而且由对(3.1.4)式进行 $\partial\bar{\partial}$ 过程所得的方阵定正,则(3.1.4)式的函数就生成了域 $\mathscr{D}$ 的在 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$下不变的 Kahler 度量.

当 $\mathscr{D}$ 为齐性域时,在 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$下不变的函数显然只能是常数.此时(3.1.4)式的函数只能生成惟一的一个不变 Kahler 度量即 Bergman 度量.

当 $\mathscr{D}$ 不是齐性域时,总存在域 $\mathscr{D}$ 的在 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$下不变的函数且非常数.例如令

$$
Y(z,\bar{z})=\frac{K_{\mathscr{D}}(z,\bar{z})}{\det T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z})},
$$

其中 $T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z})$是域 $\mathscr{D}$ 的 Bergman 度量方阵,则易知,$Y(z,\bar{z})$在 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$下不变,任何以 Y 为变量的函数 $G(Y(z,\bar{z}))=F(z,\bar{z})$也在 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$下不变.而且当 $\mathscr{D}$ 不是齐性域时,一般来说,$Y(z,\bar{z})$不是常数.因此存在着 $\mathscr{D}$ 的在 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$下不变的非常数函数,而且其数量是无穷的.这样正如对 $D(K)$讨论的那样,形如下式:

$$
F(Y)K_{\mathscr{D}}(z,\bar{z}) \tag{3.1.5}
$$

的函数,当 $\mathscr{D}$ 不是齐性域时,能产生无穷多个在 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$下不变的域 $\mathscr{D}$ 的 Kahler 度量,适当选取 $F(Y)$,就能得到满足给定曲率条件的在 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$下不变的 Kahler 度量来.

Ⅰ.4. $D(K)$的不变 Kähler 度量所满足的微分方程

令

$$X = |z_1|^2(1-|Z|^2)^{-1/K}, \tag{3.1.6}$$

则 $X = 1 - Y^{-1}$是 Y 的函数.同时 $Y = (1-X)^{-1}$也是 X 的函数.因此可令

$$I(D) = \{F(Y) \mid F(Y)\text{是 } Y \text{ 的实值函数}\}$$
$$= \{G(X) \mid G(X)\text{是 } X \text{ 的实值函数}\}.$$

若 $G(X) \in I(D)$,而且 $W = \ln G(X)$有意义,同时有

$$(\mathrm{M})\begin{cases} X\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X} + nK + 1 > 0, \\ X\dfrac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}X^2} + \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X} > 0, \end{cases}$$

我们称 $G(X)$满足条件(M).令

$$IM(D) = \{G(X)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K} \mid G(X) \in I(D)\text{并满足(M)}\},$$

则 $IM(D)$中的任一元素 $G(X)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$都是 D 的不变 Kahler 度量的生成函数.事实上,令

$$T(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial^2 \ln[G(X)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}]}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right),$$

则容易验证有 $T(z,\bar{z}) > 0$.若 $w = f(z) \in \mathrm{Aut}(D)$,则不难验证有下式成立:

$$T(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) T(w,\overline{w}) \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}. \tag{3.1.7}$$

因此度量

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}z T(z,\bar{z}) \mathrm{d}\bar{z}'$$

在 $\mathrm{Aut}(D)$下不变.经我们计算,有

$$T(z,\bar{z}) = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & K^{-1}G_2 I^{(n-1)} \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}}', \tag{3.1.8}$$

其中 J_{11}, J_{21}, J_{22}如定理 2 中所示,

$$G_1 = XW'' + W', G_2 = XW' + nK + 1. \tag{3.1.9}$$

这里 $W' = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X}, W'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}X^2}$(下同).

若令

$$H(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial^2 \ln \det T(z,\bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right),$$

则经过计算，我们有

$$H(z,\bar{z}) = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & K^{-1}H_2 I^{(n-1)} \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}}', \tag{3.1.10}$$

其中

$$H_2 = X\left[\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}X} + (n-1)\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}X}\right] + nK + 1, \tag{3.1.11}$$

$$H_1 = \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}X} = X[W''_1 + (n-1)W''_2] + W'_1 + (n-1)W'_2, \tag{3.1.12}$$

$$W_1 = \ln G_1, W_2 = \ln G_2. \tag{3.1.13}$$

Ⅰ.4.1 $D(K)$的 Ricci 曲率

设由 $G(X)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$生成的$D(K)$的不变 Kahler 度量下的 Ricci 曲率记为 $R(z,\mathrm{d}z)$. 则

$$R(z,\mathrm{d}z) = -\mathrm{d}zH(z,\bar{z})\mathrm{d}\bar{z}'/[\mathrm{d}zT(z,\bar{z})\mathrm{d}\bar{z}'].$$

(1)$R(z,\mathrm{d}z)\equiv0$，易知其充要条件为 $H_2\equiv0$. 即

$$X(W'_1 + (n-1)W'_2] + nK + 1 = 0,$$

即 $$W_1 + (n-1)W_2 = -(nK+1)\ln X + C_1,$$

即 $$G_1G_2^{n-1} = \mathrm{e}^{C_1}X^{-(nK+1)},$$

即 $$(G_2^n)' = n\mathrm{e}^{C_1}X^{-(nK+1)},$$

即有 $G_2^n = -K^{-1}\mathrm{e}^{C_1}X^{-nK} + C_2$. 当 X 趋于零时，G_2^n 趋于 $-\infty$. 因而不管常数 C_2 取多么大，总不能使 $G_2 - XW' + nK + 1$ 总大于零. 不满足条件(M)，也即 $IM(D)$中的任一元素所生成的不变 Kahler 度量的 Ricci 曲率不能恒等于零

(2)用上述类似办法，可以证明 $IM(D)$中的任一元素所生成的不变 Kahler 度量的 Ricci 曲率不可能恒大于等于零或恒大于零.

(3)$R(z,\mathrm{d}z)\equiv-1$，易知其充要条件为 $H(z,\bar{z}) = T(z,\bar{z})$.

即 $X[W'_1 + (n-1)W'_2] - XW' = 0$，即 $W_1 + (n-1)W_2 - W = C_1$，

即 $$\ln G_1 + (n-1)\ln G_2 - \ln G = C_1.$$

即

$$(XW'' + W')(XW' + nK + 1)^{n-1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{W}. \tag{3.1.14}$$

熟知，要得到$\mathbf{C}^n$ 中光滑有界域的 Kahler－Einstein 度量，一般要解下列复 Monge－Ampère 型的方程：

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) = \mathrm{e}^{(n+1)u}.$$

而我们在域 $D(K)$的情况，将它化为一个常微分方程的求解问题.

(4)$R(z,\mathrm{d}z)\leqslant0$，其充要条件为 $H(z,\bar{z})\geqslant0$. 此即

$$H_2 = X[W_1' + (n-1)W_2'] + nK + 1 \geqslant 0 \text{ 及 } H_2' \geqslant 0,$$

这说明 H_2 是变量 X 在[0,1)上的非负不减函数(因 $0 \leqslant X < 1$),因此设 $f(X)$是任一给定的在[0,1)上不减的非负函数,则方程

$$X[W_1' + (n-1)W_2'] + nK + 1 = f(X)$$

的解 $G(X) \in I(D)$,而 $G(X)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K} \in IM(D)$. 因此要求 $R(z, dz) \leqslant 0$ 的问题就化为下列常微分方程的求解问题:

$$\begin{cases} W_1' + (n-1)W_2' = [f(X) - (nK+1)]/X, \\ f(X)\text{在}[0,1)\text{上不减且非负}. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

解得

$$G(X) = X^{-(nK+1)}\exp\left\{C_3 + \int\left[n\int X^{-(nK+1)}\exp\left(C_1 + \int f(X)X^{-1}dX\right)dX + C_2\right]^{\frac{1}{n}}X^{-1}dX\right\},$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意实常数.

(5)$R(z, dz) < 0$,同(3.1.4)一样,此问题化为下列常微分方程问题:

$$\begin{cases} W_1' + (n-1)W_2' = [f(X) - (nK+1)]/X, \\ f(X)\text{为在}[0,1)\text{上增加的正值函数}. \end{cases} \tag{3.1.16}$$

解得

$$G(X) = X^{-(nK+1)}\exp$$

$$\cdot\left\{C_3 + \int\left[C_2 + n\int X^{-(nK+1)}\exp\left(C_1 + \int f(X)X^{-1}dX\right)dX\right]^{\frac{1}{n}}X^{-1}dX\right\},$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意实常数.

(6)$R(z, dz) \leqslant -1$,其充要条件为 $H(z, \bar{z}) - T(z, z) \geqslant 0$,此即 $H_2 - G_2 \geqslant 0$ 及 $(H_2 - G_2)' \geqslant 0$. 因此 $H_2 - G_2$ 为[0,1)上不减的非负函数. 这就化为下列方程问题:

$$\begin{cases} X[W_1' + (n-1)W_2' - W'] = f(X), \\ f(X)\text{在}[0,1)\text{上非负且不减}. \end{cases} \tag{3.1.17}$$

上述方程等价于

$$(XW'' + W')[XW' + nK + 1]^{n-1} = e^W\exp[C_1 + \int f(X)X^{-1}dX].$$

(7)$-1 \leqslant R(z, dz) \leqslant 0$,这等价于 $H(z, z) - T(z, \bar{z}) \leqslant 0$,此即 $H_2 - G_2 \leqslant 0$ 及 $(H_2 - G_2)' \leqslant 0$. 因此,$H_2 - G_2$ 为[0,1)上不增的非正函数. 这化为下列方程问题:

$$\begin{cases} X[W_1' + (n-1)W_2' - W'] = f(X), \\ f(X)\text{在}[0,1)\text{上非正且不增}. \end{cases} \tag{3.1.18}$$

这方程等价于

$$(XW''+W')(XW'+nK+1)^{n-1}=e^{W}\exp\left[C_1+\int f(X)X^{-1}\mathrm{d}X\right].$$

(3)—(7)的解 $G(X)=e^{W}$ 必须符合条件(M).

I.4.2 $D(K)$的 Scalar 曲率

设由 $IM(D)$ 中的元素 $G(X)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 生成的不变 Kähler 度量下 D 的 Scalar 曲率记为 $Q(z,\bar{z})$,则有

$$Q(z,\bar{z})=-\mathrm{tr}[T^{-1}(z,\bar{z})H(z,\bar{z})]$$
$$=-\left[\frac{H_1}{G_1}+(n-1)\frac{H_2}{G_2}\right].$$

经计算,我们有:

$$Q(z,\bar{z})=-X\left[\frac{G_2'''}{(G_2')^2}-\frac{(G_2'')^2}{(G_2')^3}+\frac{2(n-1)G_2''}{G_2G_2'}+(n-1)(n-2)\frac{G_2'}{G_2^2}\right]$$
$$-\left[\frac{G_2''}{(G_2')^2}+(n-1)(nK+2)\frac{1}{G_2}\right]. \tag{3.1.20}$$

其中 G_2 如(3.1.19)式所示,而

$$W=\ln G(X), \tag{3.1.21}$$

因此(3.1.20)式就是关于 $G(X)$的对 X 的常微分方程.对 $Q(z,\bar{z})$给定曲率条件(例如$\leqslant 0$,<0,$<-a^2<0$ 等),就化为常微分方程的求解问题.这里就不一一列出了,都可仿 I.4.1 的方法去转化.

I.4.3 全纯截曲率

设由 $IM(D)$中任一元素 $G(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 所生成的不变 Kahler 度量下的 D 的全纯截曲率记为$\omega(z,\mathrm{d}z)$,则有

$$\omega(z,\mathrm{d}z)=\frac{\mathrm{d}z[-\bar{\partial}\partial T+\partial T\cdot T^{-1}\overline{\partial T}']\overline{\mathrm{d}z}'}{[\mathrm{d}zT\overline{\mathrm{d}z}']^2},$$

由于

$$T=T(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$T_{11}=(XW''+W')(1-|Z|^2)^{-\frac{1}{K}},$$
$$T_{12}=K^{-1}(XW''+W')(1-|Z|^2)^{-1-\frac{1}{K}}\bar{z}_1Z,$$
$$T_{22}=K^{-2}(XW''+W')(1-|Z|^2)^{-2-\frac{1}{K}}|z_1|^2\bar{Z}'Z$$
$$+K^{-1}(XW'+nK+1)(1-|Z|^2)^{-1}Q\bar{Q}',$$
$$Q\bar{Q}'=(I-\bar{Z}'Z)^{-1},\ T_{21}=\bar{T}'_{12}.$$

为了得到 $\omega(z,\mathrm{d}z)$ 的表达式，我们只要计算出在点 $z=(z_1,0)$ 处的表达式，就能得到在任意点 $z\in D$ 的表达式. 以下先计算 $\omega(z,\mathrm{d}z)$ 在 $(z_1,0)$ 处的式子，为书写简单起见本段下面的算式都理解为在 $(z_1,0)$ 点处的值，经我们计算，有：

$$\mathrm{d}T_{11}=(XW'''+2W'')\bar{z}_1\mathrm{d}z_1,$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{11}=&\{(XW'''+2W'')+(XW^{(4)}+3W''')X\}|\mathrm{d}z_1|^2\\&+K^{-1}[(XW''+W')+(XW'''+2W'')X]\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'},\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}T_{12}=K^{-1}(XW''+W')\bar{z}_1\mathrm{d}Z,$$

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}=K^{-1}[(XW''+W')+X(W'''+2W'')]\overline{\mathrm{d}z_1}\mathrm{d}Z$$

$$\mathrm{d}T_{22}=K^{-1}(XW''+W')\bar{z}_1\mathrm{d}z_1 I^{(n-1)},$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{22}=&K^{-1}\{(K^{-1}X(XW''+W')+(XW'+nK+1))\overline{\mathrm{d}Z}'\mathrm{d}Z\\&+K^{-1}I^{(n-1)}[(XW''+W')+(XW'''+2W'')X]|\mathrm{d}z_1|^2\\&+[(XW'+nK+1)+X(XW''+W')]\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'}\}.\end{aligned}$$

令

$$\bar{\mathrm{d}}T\cdot T^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}=\begin{pmatrix}R_{11}&R_{12}\\R_{21}&R_{22}\end{pmatrix},$$

则经计算有

$$\begin{aligned}R_{11}=&(XW''+W')^{-1}(XW'''+2W'')^2X|\mathrm{d}z_1|^2\\&+K^{-1}(XW'+nK+1)^{-1}(XW''+W')^2X\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'},\end{aligned}$$

$$R_{12}=\overline{R'_{21}}=K^{-1}(XW'+nK+1)^{-1}(XW''+W')^2X\,\overline{\mathrm{d}z_1}\mathrm{d}Z,$$

$$R_{22}=K^{-1}(XW'+nK+1)^{-1}(XW''+W')^2X|\mathrm{d}z_1|^2I^{(n-1)}.$$

因此，最后我们得到 $\omega(z,\mathrm{d}z)$ 在 $(z_1,0)$ 处之值为：

$$\begin{aligned}\omega(z,\mathrm{d}z)=&\{[(XW''+W')^{-1}(XW'''+2W'')^2X-(XW'''+2W'')\\&-X(XW'''+2W'')']|\mathrm{d}z_1|^4-K^{-1}[2(XW'+nK+1)\\&+K^{-1}(K+1)X(XW''+W')](\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'})^2+[4(XW'+nK+1)^{-1}\\&\cdot(XW''+W')^2X-4(XW''+W')-4(XW'''+2W'')X]K^{-1}|\mathrm{d}z_1|^2\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'}\}\\&\cdot\{(XW''+W')|\mathrm{d}z_1|^2+K^{-1}(XW'+nK+1)\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'}\}^{-2}.\end{aligned}$$

上式中把 $|\mathrm{d}z_1|^2$ 换为

$$\begin{aligned}&\{(1-|Z|^2)^{-2+\frac{1}{K}}[(1-|Z|^2)^2|\mathrm{d}z_1|^2+K^{-2}|z_1|^2Z\mathrm{d}Z'Z\overline{\mathrm{d}Z'}\\&+2K^{-1}(1-|Z|^2)\mathrm{Re}(\bar{z}_1\mathrm{d}z_1Z\overline{\mathrm{d}Z'})]\},\end{aligned}$$

把 $\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'}$ 换为 $[(1-|Z|^2)^{-1}\cdot\mathrm{d}Z(I-\bar{Z}'Z)^{-1}\overline{\mathrm{d}Z'}]$，$X$ 如(3.1.6)式所示，W 如(3.1.21)式所示，则所得结果就是 $\omega(z,\mathrm{d}z)$ 在 D 的任意点 z

处的表达式.

对 $\omega(z,\mathrm{d}z)$ 给定条件,则满足此给定条件的不变 Kahler 度量的求解,就化为相应的常微分方程的求解问题.

I.5. 满足给定曲率条件的不变 *Kähler* 度量的具体表达式

I.5.1 Ricci 曲率 $R(z,\mathrm{d}z)$

(1)令 $G(X)=(1+X)^{2(nK+1)/(n-1)}$,则 $G_2=XW'+nK+1=2(nK+1)(n-1)^{-1}X(1+X)^{2(nK+1)(n-1)^{-1}-1}+nK+1$.

$$G_1=G_2'-2(nK+1)(n-1)^{-1}(1+X)^{-2},$$

显然 $G(X)$ 满足条件(M).

$$H_2=X[W_1'+(n-1)W_2']+nK+1$$
$$=X(n+1)[(1+X)^{-1}-(1+(n+1)(n-1)^{-1}X)^{-1}]+nk+1>0,$$
$$H_1=-(n+1)(1+X)^{-2}+(n-1)^2(n+1)[n-1+(n+1)X]^{-2}\leqslant 0,$$

因此在相应的不变度量下其 Ricci 曲率符号不定. 若 $\mathrm{d}z=(\mathrm{d}z_1,0)\neq 0$,则 $R(z,\mathrm{d}z)\geqslant 0$. 若 $\mathrm{d}z=(0,\mathrm{d}Z)\neq 0$,则 $R(z,\mathrm{d}Z)<0$. 特别 $X=0$ 时,$H_1=0$,$H_2=nK+1$,因此取 $\mathrm{d}z=(\mathrm{d}z_1,0)\neq 0$,在 $z=(0,Z)$ 点(即 $X=0$ 的点)有 $R(z,\mathrm{d}z)=0$.

(2)令 $G(X)=(1-X)^{-(n+1-j)}$,则由文献[YW2]可知,当 $0\leqslant j\leqslant n$ 时,相应的 Ricci 曲率 $R(z,\mathrm{d}z)<0$. X 当 $j=0$ 时,$R(z,\mathrm{d}z)>-1$,当 $j=n-1$ 时,$R(z,\mathrm{d}z)\leqslant -1$(都假定 $K>1$).

(3)令 $G(X)=(1-X)^{-(nK+1)}$,则

$$G_2=(nK+1)(1-X)^{-1}>0,$$
$$G_1=(nK+1)(1-X)^{-2}>0,$$

故 $G(X)$ 符合条件(M). 又有

$$H_2=X[2(1-X)^{-1}+(n-1)(1-X)^{-1}]+nK+1$$
$$=(n+1)X(1-X)^{-1}+nK+1,$$

$H_1=(n+1)(1-X)^{-2}$. 而 $H_1-G_1=(n-nK)(1-X)^{-2}$,

$H_2-G_2=(n-nK)(1-X)^{-1}+nK-n=(n-nK)(1-X)^{-1}X$.

因此,当 $K=1$ 时,$H_1-G_1\equiv 0$,$H_2-G_2\equiv 0$,对应的 $R(z,\mathrm{d}z)\equiv -1$;当 $K>1$ 时,$H_1-G_1<0$,$H_2-G_2<0$,对应的 $R(z,\mathrm{d}z)>-1$;当 $K<1$ 时,$H_1-G_1>0$,$H_2-G_2>0$,故对应的 Ricci 曲率 $R(z,\mathrm{d}z)<-1$. 由此可知由

$$(1-X)^{-(nK+1)}(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$$

生成的 Kähler 度量与 D 的 Bergman 度量很相似.

(4)令 $G(X)=(1-X)^{-2(nK+1)/(n+1)}$,则

$$G_2=[2(nK+1)/(n+1)](1-X)^{-1}X+nK+1,$$

$$G_1=2(nK+1)(n+1)^{-1}(1-X)^{-2},$$

故 $G(X)$满足条件(M).

$$\begin{aligned}H_2&=X[(n+1)(1-X)^{-1}-(n-1)^2(n+1-(n-1)X)^{-1}]+nK+1\\&=(n+1)[(1-X)^{-1}-(n-1)(n+1-(n-1)X)^{-1}]\\&\quad+nK-1>0,\end{aligned}$$

$$H_1=4[n-(n-1)X](1-X)^{-2}[(n+1)-(n-1)X]^{-2}.$$

因此,$R(z,\mathrm{d}z)<0$. 当 $K<1$ 时,相应的 $R(z,\mathrm{d}z)<-1$. 当 $K>1$ 时,n 适当大,有 $-1<R(z,\mathrm{d}z)<0$

I.5.2 Scalar 曲率

(1)令 $G(X)=(1-X)^{-(n+1-j)}(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$,由文献[YW27]可知,当 $K>1,0\leqslant j\leqslant n$ 时,有

$$Q(z,\bar z)\leqslant -(n+1)[(n+1-j)^{-1}+(n-1)(n+1-j)(nK+1)^{-2}].$$

(2)令 $G(X)=(1-X)^{-(nK+1)}$,由计算易知,相应的

$$\begin{aligned}Q(z,\bar z)&=-n(nK+1)^{-1}[(n-1)(1-K)X+(n-1)K+2]\\&=-n(nK+1)^{-1}[(n-1)(K-1)(1-X)+n+1]<0.\end{aligned}$$

当 $K>1$ 时,$Q(z,\bar z)$随 X 而递增,故

$$-n(nK+2-K)(nK+1)^{-1}<Q(z,\bar z)<-n(n+1)(nK+1)^{-1}.$$

当 $K<1$ 时,$Q(z,\bar z)$随 X 而递减. 因此,此时有

$$-n(n+1)(nK+1)^{-1}<Q(z,\bar z)<-n(nK+2-K)(nK+1)^{-1}.$$

不论 K 如何,当 $K\to1$ 时,总有 $Q(z,\bar z)\to -n$. 由此可知,由 $(1-x)^{-(nK+1)}(1-|Z|^2)^{-(nK-1)/K}$ 所生成的不变 Kahler 度量与 Bergman 度量很类似.

(3)令 $G(X)=(1+X)^{\lambda(nK+1)}(\lambda>0)$,则有

$$G_2=(1+X)^{-1}[(1+\lambda)X+1](nK+1)>0,$$

$$G_1=(1+X)^{-2}\lambda(nK+1)>0,$$

$$H_2=(n+1)(1+X)^{-1}-(n-1)[(1+\lambda)X+1]^{-1}+nK-1.$$

$$H_1=-(n+1)(1+X)^{-2}+(n-1)(1+\lambda)[(1+\lambda)X+1]^{-2}$$

(当 $\lambda\leqslant\frac{n+1}{n-1}$时,显然有 $H_1<0$,因此,有可能使 $Q(z,\bar z)>0$).

经计算,

$$-Q(z,\bar z)=H_1G_1^{-1}+(n-1)H_2\cdot G_2^{-1}$$

$$=(nK+1)^{-1}\lambda^{-1}[(1+\lambda)X+1]^{-2}\cdot\{-(n+1)[1+(1+\lambda)X]^2$$
$$+(1+X)^2(n-1)(1+\lambda)+(n-1)(n+1)\lambda[1+(1+\lambda)X]$$
$$-\lambda(n-1)^2(1+X)+(1+X)(n-1)(nK-1)\lambda[1+(1+\lambda)X]\}.$$

令 $f(X)$ 代表大括号内的式子，取

$$X_0=-\{\lambda^2 n(n-1)(K+1)+2\lambda[(n-1)nK-2]-4\}\{2(1+\lambda)$$
$$\cdot[(n(n-1)K-2n)\lambda-2]\}^{-1}=-n(n-1)(K+1)(\lambda-\lambda_1)(\lambda$$
$$-\lambda_2)\{2(1+\lambda)[(n(n-1)K-2n)\lambda-2]\}^{-1},$$

其中 λ_1 是

$$\{(n-1)n(K+1)\}^{-1}\{-(n-1)nK+2\pm[((n-1)nK-2)^2$$
$$+4n(n-1)(K+1)]^{\frac{1}{2}}\}$$

中取"$-$"号的项，λ_2 是取"$+$"号的项．易见 $\lambda_1<0$，而当 $K>1$ 时有 $\lambda_2>0$，由 X_0 的表示式可知，当 $K>1$，$\lambda\leqslant\lambda_2$，$[n(n-1)K-2n]\lambda-2\leqslant0$ 时，有 $X_0<0$．即 $f(X)$ 的惟一的一个取最大值的点 $X_0\notin[0,1)$，因此 $f(X)$ 在 $[0,1)$ 单调所以若 $f(0)<0$，则 $f(X)$ 在 $[0,1)$ 恒小于零，从而 $Q(z,z)>0$ 在 $D(K)$ 成立．下面计算 $f(0)$．经计算有 $f(0)=\lambda(n-1)(nK+2)-2$．因此当 $\lambda<2[(n-1)(nK+2)]^{-1}$，$K>1$ 时，有 $f(0)<0$．故最后得结论如下：当 $K>1$，

$$0<\lambda<\min\{2[(n-1)(nK+2)]^{-1},\lambda_2,2[n(n-1)K-2n]^{-1}\}$$

时，由 $(1+X)^{\lambda(nK+1)}(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 生成的不变 Kahler 度量的 Scalar 曲率，$Q(z,z)>0$ 在 $D(K)$ 的每一点成立．

(4) 令 $G(X)=(1-X)^{-l}$ $(l>0)$，则

$$G_2=l(1-X)^{-1}+nK+1>0,$$
$$G_1=l(1-X)^{-2}>0,$$
$$H_2=(n+1)(1-X)^{-1}-(n-1)(nK+1)[(l-nK-1)X$$
$$+(nK+1)]^{-1}+nK-1,$$
$$H_1=(n+1)(1-X)^{-2}+(n-1)(nK+1)(l-nK-1)[(l$$
$$-nK-1)X+nK+1]^{-2}.$$

经计算有：

$$H_1G_1^{-1}+(n-1)H_2G_2^{-1}=(n+1)/l+l^{-1}[(l-nK-1)X$$
$$+nK+1]^{-2}\{(1-X)^2[(n-1)(nK+1)(l-nK-1)$$
$$+l(n-1)(nK-1)(nK+1-l)]+(1-X)[l^2(n-1)(nK-1)$$
$$+l(n-1)(n+1)(nK+1-l)-l(n-1)^2(nK+1)]$$
$$+l^2(n-1)(n+1)\}.$$

令大括号内的式子为 $f(1-X)$,并令 $1-X=T$,则

$$f'(T)=2T(n-1)(nK+1-l)[l(nK-1)-(nK+1)]$$
$$+l(n-1)[(nK+1)(l+2)-l(n+3)],$$

$f'(T)$的惟一零点为

$$T_0=-l[(nK+1)(l+2)-l(n+3)]\cdot\{2(nK+1-l)$$
$$\cdot[l(nK-1)-(nK+1)]\}^{-1}.$$

$nK+1>l>(nK+1)(nK-1)^{-1}$时,$T_0<0(K>1)$.当 $T>T_0$ 时 $f(T)$递增.$f(T)$在$(0,1]$的最小值为 $f(0)=l^2(n-1)(n+1)$,其最大值为 $f(1)=(n-1)(nK+1)[l(nK+2)-(nK+1)]$.因此有如下估计式:

$$\frac{n+1}{l}-\frac{l(nK+2)-nK-1}{l^3(n-1)^{-1}(nK+1)^{-1}}\leqslant Q(z,z)\leqslant\frac{n+1}{l}$$
$$-\frac{l(n-1)(n+1)}{(nK+1)^2}, \tag{3.1.22}$$

当 $K>1,(nK+1>l)>(nK+1)(nK-1)^{-1}$时成立.

易知,当 $K>1,l>nK+1$ 或 $l<(nK+1)(nK-1)^{-1}$时,有 $T_0>0$.由计算表明,当 $l>l_2,K>1$ 时,有 $T_0>1$.当 $K>1,l<l_1$ 时,有 $T_0>1$,其中

$$l_1=(nK+1)(nK+n)^{-1}[(nK+1)-(n^2K^2-2n+1)^{\frac{1}{2}}],$$

$$l_2=(nK+1)(nK+n)^{-1}[(nK+1)+(n^2K^2-2n+1)^{\frac{1}{2}}].$$

因此,当 $K>1,l>l_2$ 时或 $l<l_1$ 时,都有 $T_0>1$,而且 $f(T)$在$(0,1)$单调递增,所以此时也有估计式(3.1.22)成立.

1.5.3 $D(K)$的全纯截曲率(Holomorphic sectional curvature)

本文我们简称为全纯曲率.

(1)令 $G(X)=(1-X)^{-(n+1-j)}$,则文献[YW27]可知,

$G(X)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}\in IM(D)$,而且 $\omega(z,dz)<0(0\leqslant j\leqslant n)$.

(2)设 C 为常数,则我们得到 $\omega(z,dz)$在$(z_1,0)$之值为:

$$\omega(z,dz)=-C-\{|dz_1|^4[(XW'''+2W'')+X(XW'''+2W'')'$$
$$-X(XW'''+2W'')^2(XW''+W')^{-1}-C(XW''+W')^2]$$
$$+K^{-1}(dZ\,\overline{dZ}')^2$$
$$[2(XW'+nK+1)+(K+1)X(XW''+W')$$
$$-K^{-2}C(XW'+nK+1)^2]+2K^{-1}|dz_1|^2dZ\,\overline{dZ}'[2(XW''+W')$$
$$+2X(XW'''+2W'')-2X(XW''+W')^2\cdot(XW'+nK+1)^{-1}$$
$$-C(XW'+nK+1)(XW''+W')]\}\cdot\{dzT\,\overline{dz}'\}^{-2}$$

令大括号内式子以 $\omega_1(z,dz)$表之,即有

$$\omega(z,\mathrm{d}z) = -C - \omega_1(z,\mathrm{d}z)\cdot\{\mathrm{d}zT\mathrm{d}z'\}^{-2}. \qquad (3.1.23)$$

令 $G(X)=(1-X)^{-l}(l>0)$,则经计算有:

$$W'=l(1-X)^{-1},\ W''=l(1-X)^{-2},$$

$$W'''=2l(1-X)^{-3},\ W^{(4)}=6l(1-X)^{-4}.$$

以此代入 $\omega_1(z,\mathrm{d}z)$的表示式,并令 $l=nK+1$ 得:

$$\begin{aligned}\omega_1(z,\mathrm{d}z) = {} & |\mathrm{d}z_1|^4[(1-X)^{-4}(2l-Cl^2)] + K^{-1}l(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}')^2 \\ & \cdot[(1-X)^{-2}(K+1-K^{-2}Cl)+(1-X)^{-1}(1-K)] \\ & + 2K^{-1}l|\mathrm{d}z_1|^2\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}'[(1-X)^{-3}(2-Cl)].\end{aligned}$$

易知,当 $C\leqslant 2l^{-1}=2(nK+1)^{-1}$时,上式$|\mathrm{d}z_1|^4$的系数大于等于零,$|\mathrm{d}z_1|^2\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}'$的系数也大于等于零.当

$$C\leqslant\min\{2K^2(nK+1)^{-1},K^2(K+1)(nK+1)^{-1}\}$$

时,$(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}')^2$ 的系数大于等于零.由此可见,当

$$C\leqslant\min\{2K^2(nK+1)^{-1},K^2(K+1)(nK+1)^{-1},2(nK+1)^{-1}\}$$

时,有 $\omega_1(z,\mathrm{d}z)\geqslant 0$,此时就有 $\omega(z,\mathrm{d}z)\leqslant -C$. 当

$$C\geqslant\max\{2(nK+1)^{-1},2K^2(nK+1)^{-1},K^2(K+1)(nK+1)^{-1}\}$$

时,$0>\omega(z,\mathrm{d}z)\geqslant -C$,当 $K=1,C=2(n+1)^{-1}$时,有 $\omega_1(z,\mathrm{d}z)=0$,从而就有 $\omega(z,\mathrm{d}z)=-2(n+1)^{-1}$.容易验证当 $K=1,C=-(n-1)(n+1)^{-1}$时,$\omega(z,\mathrm{d}z)=(n-1)(n+1)^{-1}$.

(3)令 $G(X)=\mathrm{e}^X$,则 $W=\ln G=X,W'=1,W''=0$,而

$$G_2=XW'+nK+1=X+nK+1>0,G_1=1>0,$$

故 $\mathrm{e}^X(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$属于$IM(D)$.经计算有:

$$\begin{aligned}\omega_1(z,\mathrm{d}z) = {} & -C|\mathrm{d}z_1|^4 + K^{-1}(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}')^2[2(X+nK+1) \\ & +(K+1)X-K^{-2}C(X+nK+1)^2] \\ & +2K^{-1}|\mathrm{d}z_1|^2\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}'[(nK+1)(X+nK+1)^{-1} \\ & -C(X+nK+1)].\end{aligned}$$

因此,当 $C<0$ 时,总有 $\omega_1(z,\mathrm{d}z)>0$,从而有

$$\omega(z,\mathrm{d}z)<-C.$$

当 $C=0$ 时,取 $\mathrm{d}z=(\mathrm{d}z_1,0)\neq 0$,则总有 $\omega(z,\mathrm{d}z)=0$.

(4)令 $G(X)=(1+X)^l(l>0)$.则经计算有:

$$\begin{aligned}\omega_1(z,\mathrm{d}z) = {} & l(1+X)^{-4}|\mathrm{d}z_1|^4(-2-Cl)+K^{-1}(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}')^2\{-l(K \\ & +1+K^{-2}Cl)(1+X)^{-2}+[l(K-1+2K^{-2}C(nK+1 \\ & +l)](1+X)^{-1}+2(nK+1+l)-K^{-2}C(nK+1+l)^2\} \\ & +2K^{-1}(1+X)^{-2}l|\mathrm{d}z_1|^2\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}'\{(4+Cl)(1+X)^{-1}\end{aligned}$$

$$[2+C(nK+l+1)]+2l(l+X)^{-1}[(1+X)(nK+1+l)-l]^{-1}-2l[(1+X)(nK+1+l)-l]^{-1}\}.$$

当 $C=-2l^{-1}$, $dz=(dz_1,0)\neq 0$，则有

$$\omega(z,dz)=2l^{-1}.$$

注意在讨论全纯曲率时，我们都是在点 $z=(z_1,0)$ 处进行计算的. 从上式可知，当 l 为任意小的正数时，由 $e^X(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 生成的不变的 Kahler 度量的全纯截曲率 $\omega(z,dz)$ 在方向 $dz=(dz_1,0)\neq 0$ 处可任意大.

本节内容取自文[YW29, YW48～YW50].

Ⅲ. 在解析自同胚群下不变的调和函数

我们考虑 $\mathbf{C}^n$ 中的非齐性有界域 $D=D(k)$：

$$D=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(z_1,Z)\in\mathbf{C}^n \mid |z_1|^{2k}+|Z|^2<1, k\neq 1\},$$

其中 k 为正实数. 当 $k\neq 1$ 时，$D(k)$ 是有界非齐性 Reinhardt 域. 由于它是研究有界非齐性域的一个很好的模型. 因此我们专门对 $D(k)$ 进行研究，文[YW28]指出，对 $D(k)$ 存在着在 Aut(D) 下不变的非常数函数. 利用不变函数可以得到在 Aut(D) 下不变的 D 的具有连续统那么多的 Kahler 度量. 本节要揭示 $D(k)$ 另外的两个特点. 对应于上述不变 Kahler 度量的 Laplace－Beltrami 算子的解称为在相应度量下的域 D 的调和函数. 本节指出，存在着在 Aut(D) 下不变的调和函数. 这是一个特点，另一个是由 D 的在 Aut(D) 下不变的函数，可以生成 D 的不变 Kahler 度量，当然要除去 D 的一个低维点集.

Ⅲ.1.

记 $D=D(k)$ 的解析自同胚群为 Aut(D)，则它由下列变换组成[Web]：

$$\begin{cases} \widetilde{w}_1=e^{i\theta}z_1(1-|\alpha|^2)^{1/2k}(1-\bar{\alpha}Z')^{-1/k}, \\ \widetilde{W}=(w_2,\cdots,w_n)=e^{i\varphi}(1-|\alpha|^2)^{1/2}(Z-\alpha)Q_\alpha(1-\bar{\alpha}Z')^{-1}, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中 θ,φ 为任意实数，$i=\sqrt{-1}$，

$$\alpha=(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{C}^{n-1}, |\alpha|^2<1,$$

$$(Q_\alpha\bar{Q}_\alpha')^{-1}=I^{(n-1)}-\bar{\alpha}'\alpha. \tag{3.2.2}$$

令

$$x = |z_1|^2(1-|Z|^2)^{-1/k} = x(z,\bar{z}). \tag{3.2.3}$$

则容易验证 x 在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变，即若 $r\in\mathrm{Aut}(D)$，则有 $x(rz,\overline{rz}) = x(z,\bar{z})$. 显然，任一以 x 为变元的函数也在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变，即若 $w = (\tilde{w}_1, W) = f(z)\in\mathrm{Aut}(D)$，则对任一以 x 为变元的函数 $F(x)$ 有

$$F(x(z,\bar{z})) = F(x(w,\bar{w})).$$

从而有

$$\left(\frac{\partial^2 F(x(z,\bar{z}))}{\partial z_i\partial \bar{z}_j}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 F(x(w,\bar{w}))}{\partial \tilde{w}_i\partial \bar{\tilde{w}}_j}\right)\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}', \tag{3.2.4}$$

其中 $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ 表示变换 $w = f(z)$ 的函数方阵在 $Z = a$ 时的值. 经计算得到上式左边的具体表达式

$$\begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & k^{-1}x\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}I^{(n-1)} \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}}', \tag{3.2.5}$$

其中

$$J_{11} = e^{i\theta}(1-|Z|^2)^{-1/2k},\ J_{21} = K^{-1}e^{i\theta}Z_1(1-|Z|^2)^{-(2k-1)/2k}\bar{Z}',$$

$$J_{22} = e^{i\theta}(1-|Z|^2)^{-1/2}Q_Z,\ (Q_Z\bar{Q}_Z')^{-1} = I^{(n-1)} - Z\bar{Z}'. \tag{3.2.6}$$

由 x 的表达式(3.2.3)可知，x 可取值为 0. 因此(3.2.5)式所示的方阵在 D 不定正. 另外，易知使 x 取 0 值的仅仅是 D 中 $z_1=0$ 的点集. 此点集即

$$x_0 = \{z\in D\,|\,z_1=0\} = \{z = (z_1,\cdots,z^n)\,|\,|z|^2<1\},$$

其复维数为 $n-1$，因此是域 D 中的一低维点集. 而且 x_0 在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变，即任意 $w=f(z)\in\mathrm{Aut}(D)$，有 $f(x_0)=x_0$. 从而 $f(D-x_0) = D-x_0$.

因此，适当选取 $F(x)$，可使(3.2.5)式所示方阵在 $D-x_0$ 总是定正的. 这样(3.2.5)式便是在 $D-x_0$ 上的一个度量方阵，由(3.2.4)这个度量方阵所决定的是在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的 $D-x_0$ 的一个 Kahler 度量. 这样就得到了在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的由 D 的不变函数直接生成的 D 的 Kahler 度量，除去 D 的一个低维子集外. 这种不变函数是很多的，例如对任意一个在区间[0,1)上的严格递增的凸函数 $F(t)$，则 $F(x)$ 就是符合要求的不变函数，即由它决定的矩阵(3.2.4)、(3.2.5)都在 $D-x_0$ 定正，而且由(3.2.5)决定的度量是在 $\mathrm{Aut}(D)$ 不变的 $D-x_0$ 的 Kahler 度量.

Ⅲ.2. 在 Aut(D) 下不变的调和函数

Ⅲ.2.1 设由(3.2.5)表示的度量矩阵记为 $T_t(z,\bar{z})$，则在此度量

下的 Laplace-Beltrami 算子为：

$$L_F(u) = \mathrm{tr}\left[T_F^{-1}(z,\bar z)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar z_j}\right)\right], \tag{3.2.7}$$

使上述算子零化的具有二阶连续偏微商的定义于 D 的实值函数 u 称为由 $F(x)$ 生成的度量下的域 D 的调和函数. 若 $u=u(x)$ 还在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变，则称为由 $F(x)$ 生成的度量下的域 D 的在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的调和函数.

为了解方程 $L_F(u)=0$. 我们只需求出该方程在 $z=(z_1,0)$ 处的解，经计算

$$L_F(u)|_{z=(z_1,0)} = (xF''+F')^{-1}\left(x\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}\right) + (n-1)(F')^{-1}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{(xF''+F')F'}\left[F'x\frac{d^2u}{dx^2} + ((n-1)xF''+nF')\frac{du}{dx}\right].$$

因此，令

$$u = u(x) = c_1\int x^{-n}(F')^{-(n-1)}dx + c_2, \tag{3.2.8}$$

c_1、c_2 为任意实数. 则上式就是方程 $L_F(u)=0$ 的通解. 因此，在由 $F(x)$ 生成的 Kahler 度量下，域 D 的不变调和函数在除去 D 的一个低维点集 e_0 之外，就由(3.2.8)式表示.

例如，令 $F(x)=x$，则 $u=u(x)=-\frac{c_1}{n-1}x^{-(n-1)}+c_2$.

Ⅲ.2.2 令

$I(D)=\{G(x)\mid G(x)$ 是 x 的实函数，x 即(3.2.3)式所示$\}$，

若 $G(x)\in I(D)$，并满足条件(M)：

$$x\frac{dW}{dx}+nk+1>0,\quad x\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{dW}{dx}>0, \tag{M}$$

$$W=\ln G(x),$$

则所有这种函数 $G(x)$ 与 $(1-|z_1|^2)^{-(nk+1)/k}$ 的乘积所形成的集合记为 $IM(D)$，即

$IM(D)=\{G(x)(1-|z_1|^2)^{-(nk+1)/k}\mid G(x)\in I(D)$，而且满足条件(M)$\}$.

那么由文[YW29]可知，$IM(D)$ 中的每一个元素都生成一个在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的 D 的 Kahler 度量. 令

$$T_G(z,\bar z) = \left[\frac{\partial^2 \ln G(x)(1-|z_1|^2)^{-(nk+1)/k}}{\partial z_i \partial \bar z_j}\right],$$

则由[YW29]还可知 $T_G(z,\bar z)>0$，而且有如下表达式

$$T_G(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_1 & 0\\ 0 & k^{-1}G_2I^{(n-1)}\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}}'.$$

其中 J_{11},J_{21},J_{22} 同(6).

$$G_2=x\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}+nk+1,\ G_1=\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x},$$

$$W=\ln G(x).$$

对应于 $T_G(z,\bar{z})$ 的 Laplace - Beltrami 算子为

$$L_G(u)=\mathrm{tr}\left[T_G^{-1}(z,\bar{z})\left(\frac{\partial^2u}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\right)\right].$$

若 u 是使 $L_G(u)$ 零化的实函数并具有连续的二阶偏导数.则 u 称为域 D 的由 $G(x)(1-|z|^2)^{-(nk+1)/k}$ 生成的不变 Kahler 度量下的调和函数.若 $u=u(x)\in I(D)$, $L_G(u)=0$,则 $u(x)$ 称为在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的域 D 调的和函数.令 $IH(D)=\{u(x)\mid u(x)\in I(D),L_G(u)=0\}$.下面求出 $IH(D)$ 的所有元素.

由于 $u(x)$ 与 $L_G(u)$ 在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下都是不变的,而且对任意 $z=(z_1,Z)\in D$,总存在 $r\in\mathrm{Aut}(D)$ 使得 $rz=(w_1,0)$,因此只要在 $(z_1,0)(\in D)$ 处解 $L_G(u)=0$.经计算,有

$$\begin{aligned}L_G(u)|_{z=(z_1,0)}&=(xW''+W')^{-1}(xu''+u')\\&\quad+(xW'+nk+1)^{-1}(n-1)xu'|_{z=(z_1,0)}=0,\end{aligned}$$

亦即 $x(xW'+nk+1)\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+[(n-1)x^2W''+nxW'+nk+1]\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big|_{z=(z_1,0)}=0,$

这样,解得 $u(x)=e^{c_1}\int x^{-1}(xW'+nk+1)^{-(n-1)}\mathrm{d}x+c_2,\ x\neq0,$

其中 c_1,c_2 为任意实数,即

$IH(D)=\left\{e^{c_1}\int x^{-1}(xW'+nk+1)^{-(n-1)}\mathrm{d}x+c_2\mid c_1,c_2\text{ 为任意实数}\right\}$ $(x\neq0)$.因此,除了 D 的一个低维点集 x_0 外,得到在 $D-x_0$ 上的在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的调和函数.

例如,令 $G(x)=(1-x)^{-(nk+1)}$,则当 $x\neq0$、$n=2$ 时,

$$IH(D)=\{e^{c_1}\ln x-e^{c_1}x+c_2\mid c_1,c_2\text{ 为任意实数}\}.$$

本节内容来自文[YW30].

Ⅲ. 一类 Reinhardt 域的全纯截曲率

我们考虑如下的 Reinhardt 域

$D=D(k)=\{Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(z_1,z)\in\mathbf{C}^n:|z_1|^{2k}+|z|^2<1\}$，其中 $k>0$，但 $k\neq1$．域 $D(k)$ 最近颇得一些数学家的青睐，原因是当 $k>1$ 时，$D(k)$ 是弱拟凸域的一个具体而又简单的模型；其二，Bedford 和 Pinchuk 最近证明在 $\mathbf{C}^2$ 中具有实解析边界的而且解析自同胚群是非紧致的每一个有界弱拟凸域都全纯等价于（见文献[BeP]）

$$E_m=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2:|z_1|^{2m}+|z_2|^2<1,m\ \text{为正整数}\},$$

因而 $D(k)$ 更引人注目．

我们在文献[YW35]中给出了域 $D(k)$ 的在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的 Kahler 度量的一般形式，并得到了这些度量的全纯截曲率的具体表达式．本文内容之一便是详细证明文献[YW35]的结果，同时构造了一个在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的完备的 Kahler 度量 $Y(Z,\mathrm{d}Z)$，使得 $Y(Z,\mathrm{d}Z)\geqslant B_D(Z,\mathrm{d}Z)$，其中 $B_D(Z,\mathrm{d}Z)$ 为 $D(k)$ 的 Bergman 度量，证明 $Y(Z,\mathrm{d}Z)$ 的全纯截曲率的上界为一个负常数，这样利用上述度量不等式及 Kobayashi-Schwarz 引理，便得到域 $D(k)$ 的关于 Bergman 度量和 Kobayashi 度量的比较定理．

我们需要下列已知结果[YW35]：

1．$D(k)$ 的解析自同胚最大群

此群若记为 $\mathrm{Aut}(D)$，则它由下列形式的映照组成：设 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)=(w_1,w)=f(Z)\in\mathrm{Aut}(D)$，则

$$w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1(1-|a|^2)^{1/2k}(1-\bar{a}z')^{-1/k},$$

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(1-|a|^2)^{1/2}(z-a)Q_a(1-\bar{a}z')^{-1},$$

其中 θ,φ 为实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，而且

$$a=(a_2,a_3,\cdots,a_n)\in\mathbf{C}^{n-1},|a|^2<1,$$

$$(Q_a\bar{Q}_a')^{-1}=I^{(n-1)}-\bar{a}'a.$$

2．$D(k)$ 的 Bergman 核

此核若记之为 $K_D(Z,\bar{Z})$，则有如下之表达式：

$$K_D(Z,\bar{Z})=\frac{k}{\pi^n}F(X)(1-|z|^2)^{-(nk+1)/k},\tag{3.3.1}$$

其中
$$F(X)=\sum_{j=0}^{n-1}b_j[1-X]^{j-n-1},\tag{3.3.2}$$

而且
$$X=|z_1|^2(1-|z|^2)^{-1/k}.\tag{3.3.3}$$

$b_j(j=0,1,\cdots,n-1)$ 由下式对 x 的同次幂比较系数而定

$$\prod_{j=0}^{n-1}(x+1+jk)=k^n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{b_j\Gamma(x+n+1-j)}{\Gamma(n+1-j)\Gamma(x+1)}.$$

3. $D(k)$的 Kähler 度量方阵

此方阵若记之为 $T=T(Z,\bar{Z})$，则它有如下形式

$$T=\begin{pmatrix}J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_1 & 0\\ 0 & k^{-1}G_2 I^{(n-1)}\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}}', \tag{3.3.4}$$

其中

$$J_{11}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-|z|^2)^{-1/2k},\ J_{21}=k^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1(1-|z|^2)^{-(2k+1)/2k}z',$$

$$J_{22}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(1-|z|^2)^{-1/2}Q_z,\ (Q_z\overline{Q}'_z)^{-1}=I^{(n-1)}-\bar{z}'z,$$

$$W=\ln G(X),\ G_1=XW''+W',\ G_2=XW'+nk+1,$$

$$W'=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X},\ W''=\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}X^2}.$$

证：由文献[YW35]知，$D(k)$的任一在 $\mathrm{Aut}(D)$下不变的 Kahler 度量都可由下列形式的函数

$$K(Z,\bar{Z})=G(X)(1-|z|^2)^{-(nk+1)/k} \tag{3.3.5}$$

生成，即其 Kahler 度量方阵为

$$T=T(Z,\bar{Z})=\left(\frac{\partial^2\ln K(Z,\bar{Z})}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}\right).$$

任取 $\mathrm{Aut}(D)$中的一个映照 $f(Z)$，它把$(z_1,a)\in D$ 映为 D 中的一点$(w_1,0)$，则在此映照下有关系

$$T(Z,\bar{Z})\Big|_{z=(z_1,a)}=\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)\Big|_{z=(z_1,a)}$$

$$T((w_1,0),\overline{(w_1,0)})\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)}'\Big|_{z=(z_1,a)}. \tag{3.3.6}$$

我们容易得到 $\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)\Big|_{z=(z_1,a)}$，而且也不难得到表达式 $T((w_1,0),\overline{(w_1,0)})$的值，令

$$w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1(1-|a'|^2)^{1/2k}(1-az')^{-1/k},$$

并令 $a=z$. 以此代入(3.3.6)式，就得到(3.3.4)式，证毕.

由(3.3.4)式，得到

$$T=\begin{pmatrix}(XW''+W')(1-|z|^2)^{-1/k}, & k^{-1}(XW''+W')(1-|z|^2)^{-1/k-1}z_1\bar{z}\\ *, & k^{-2}(XW''+W')|z_1|^2(1-|z|^2)^{-1/k-2}\bar{z}'z+k^{-1}(XW'+nk+1)(1-|z|^2)^{-1}Q_z\overline{Q}'_z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}T_{11}, & T_{12}\\ \overline{T}'_{12}, & T_{22}\end{pmatrix}. \tag{3.3.7}$$

Ⅲ.1. 全纯截曲率

令 $\omega(Z,\mathrm{d}Z)$表示 $D(k)$的 Kähler 度量下的全纯截曲率，则由定义，

有

$$\omega(Z,\mathrm{d}Z)=\frac{\mathrm{d}Z(-\bar{\partial}\mathrm{d}T+\mathrm{d}T\cdot T^{-1}\overline{\mathrm{d}T'})\overline{\mathrm{d}Z'}}{(\mathrm{d}ZT\,\overline{\mathrm{d}T'})^2}. \tag{3.3.8}$$

由于对任一点$(z_1,\alpha)\in D$,存在$f(Z)\in \mathrm{Aut}(D)$使得点(z_1,α)变为形为$(w_1,0)$的点.因此只要计算出$\omega(Z,\mathrm{d}Z)$在$Z=(z_1,0)$时的表达式.下面就具体计算$\omega(Z,\mathrm{d}Z)|_{z=(z_1,0)}$的表达式.

由于

$$\mathrm{d}T=\begin{pmatrix}\mathrm{d}T_{11} & \mathrm{d}T_{12}\\ \mathrm{d}\overline{T}'_{12} & \mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix},\bar{\partial}\mathrm{d}T=\begin{pmatrix}\bar{\partial}\mathrm{d}T_{11} & \bar{\partial}\mathrm{d}T_{12}\\ \bar{\partial}\mathrm{d}\overline{T}'_{12} & \bar{\partial}\mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix}.$$

Ⅲ.1.1 因为$T_{11}=(XW''+W')(1-|z|^2)^{-1/k}$(见3.3.7式),

$X=|z_1|^2(1-|z|^2)^{-1/k}$(见3.3.3式),

$$\mathrm{d}T_{11}=\frac{\partial T_{11}}{\partial z_1}\mathrm{d}z_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial T_{11}}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j.$$

而

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial z_1}=(1-|z|^2)^{-1/k}(XW'''+2W'')\frac{\partial X}{\partial z_1}$$
$$-(1-|z|^2)^{-2/k}(XW'''+2W'')\bar{z}_1.$$

$$\left.\frac{\partial T_{11}}{\partial z_j}\right|_{j\neq 1}=k^{-1}(1-|z|^2)^{-\frac{1}{k}-1}z_j(XW''+W')$$
$$+(1-|z|^2)^{-\frac{2}{k}-1}(XW'''+2W'')k^{-1}|z_1|^2\bar{z}_j.$$

所以

$$\mathrm{d}T_{11}|_{(z_1,0)}=(XW'''+2W'')\bar{z}_1\mathrm{d}z_1, \tag{3.3.9}$$

$$\bar{\partial}\mathrm{d}T_{11}=\frac{\partial^2T_{11}}{\partial\bar{z}_1\partial z_1}\mathrm{d}z_1\overline{\mathrm{d}z_1}+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2T_{11}}{\partial\bar{z}_j\partial z_1}\mathrm{d}z_1\overline{\mathrm{d}z_j}$$
$$+\sum_{j=2}^{n}\left[\frac{\partial^2T_{11}}{\partial\bar{z}_1\partial z_j}\mathrm{d}z_j\overline{\mathrm{d}z_1}+\sum_{l=2}^{n}\frac{\partial^2T_{11}}{\partial\bar{z}_l\partial z_j}\mathrm{d}z_j\overline{\mathrm{d}z_l}\right].$$

而

$$\left.\frac{\partial^2T_{11}}{\partial\bar{z}_1\partial z_1}\right|_{(z_1,0)}=(XW'''+2W'')+(XW^{(4)}+3W''')|z_1|^2$$
$$=[XW'''+2W''+(XW^{(4)}+3W''')X]_{(z_1,0)},$$

$$\left.\frac{\partial^2T_{11}}{\partial\bar{z}_j\partial z_j}\right|_{(z_1,0)}=0\quad(j\neq1),\quad \left.\frac{\partial^2T_{11}}{\partial\bar{z}_1\partial z_j}\right|_{(z_1,0)}=0(j\neq1),$$

$$\left.\frac{\partial^2T_{11}}{\partial\bar{z}_j\partial z_1}\right|_{(z_1,0)}=[k^{-1}(XW''+W')+k^{-1}(XW'''+2W'')|z_1|^2]_{(z_1,0)}$$

$$= k^{-1}[XW'' + W' + (XW''' + 2W'')X]_{(z_1,0)} (j \neq 1),$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial \bar{z}_l \partial z_j}\right|_{(z_1,0)} = 0 (l \neq j),$$

因此有

$$\bar{\partial}\partial T_{11}|_{(z_1,0)} = [XW''' + 2W'' + (XW^{(4)} + 3W''')X]|dz_1|^2$$
$$+ k^{-1}\sum_{j=2}^{n}[XW'' + W' + (XW''' + 2W'')X]|dz_j|^2$$
$$= [XW''' + 2W'' + (XW^{(4)} + 3W''')X]|dz_1|^2$$
$$+ k^{-1}[XW'' + W' + (XW''' + 2W'')X]dz\overline{dz'}.$$

(3.3.10)

Ⅲ.1.2 由于 $T_{12} = k^{-1}(XW'' + W')z_1 z(1-|z|^2)^{-1/k-1}$,

$$dT_{12} = \frac{\partial T_{12}}{\partial z_1}dz_1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial T_{12}}{\partial z_j}dz_j.$$

但是$\frac{\partial T_{12}}{\partial z_1} = k^{-1}(XW''' + 2W'')(1-|z|^2)^{-2/k-1}\bar{z}_1^2 z$,

$$\left.\frac{\partial T_{12}}{\partial z_j}\right|_{j\neq 1} = k^{-2}(XW''' + 2W'')|z_1|^2(1-|z|^2)^{-2/k-2}z_1\bar{z}_j z$$
$$+ k^{-2}(k+1)(XW'' + W')(1-|z|^2)^{-1/k-2}z_1 z_j z$$
$$+ k^{-1}(XW'' + W')(1-|z|^2)^{-1/k-1}\bar{z}_1 e_j,$$

这里 e_j 表示第 j 个分量为 1 其余为 0 的 n 维向量. 因此有

$$dT_{12}|_{(z_1,0)} = k^{-1}(XW'' + W')\bar{z}_1 dz. \tag{3.3.11}$$

因

$$\bar{\partial}\partial T_{12} = \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1}|dz_1|^2 + \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_j \partial z_1}dz_1\overline{dz_j} + \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_j}\overline{dz_1}dz_j\right.$$
$$\left. + \sum_{l=2}^{n}\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_l \partial z_j}dz_j\overline{dz_l}\right].$$

而

$$\left.\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1}\right|_{(z_1,0)} = 0, \left.\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_j \partial z_1}\right|_{(z_1,0)} = 0, \left.\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_l \partial z_j}\right|_{(z_1,0)} = 0 (l \neq 1, j \neq 1),$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_j}\right|_{(z_1,0)} = k^{-1}(XW'' + W')e_j + k^{-1}(XW''' + 2W'')|z_1|^2 e_j$$
$$= k^{-1}[XW'' + W' + (XW''' + 2W'')X]_{(z_1,0)}e_j \quad (j \neq 1),$$

因此有

$$\bar{\partial}\partial T_{12}|_{(z_1,0)} = k^{-1}[XW'' + W' + (XW''' + 2W'')X]_{(z_1,0)}\overline{dz_1}dz.$$

(3.3.12)

由 1.3
$$T_{22}=k^{-2}(XW''+W')|z_1|^2(1-|z|^2)^{-\frac{1}{k}-2}\bar{z}'z + k^{-1}(XW'+nk+1)(1-|z|^2)^{-1}(I-\bar{z}'z)^{-1},$$

$$\begin{aligned} dT_{22}= & k^{-2}(XW''+W')|z_1|^2(1-|z|^2)^{-\frac{1}{k}-2}\bar{z}'dz \\ & + k^{-2}d[(XW''+W')|z_1|^2(1-|z|^2)^{-\frac{1}{k}-2}]\cdot\bar{z}'z \\ & + k^{-1}d[(XW'+nk+1)\cdot(1-|z|^2)^{-1}]\cdot(I-\bar{z}'z)^{-1} \\ & + k^{-1}(XW'+nk+1)\cdot(1-|z|^2)^{-1}(I-\bar{z}'z)^{-1}\bar{z}'dz(I-\bar{z}'z)^{-1}. \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} dT_{22}|_{(z_1,0)} & = k^{-1}d[(XW'+nk+1)(1-|z|^2)^{-1}]_{(z_1,0)}I^{(n-1)} \\ & = k^{-1}(XW''+W')\bar{z}_1dz_1I^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

$$\begin{aligned} \bar{d}dT_{22}|_{(z_1,0)} = & k^{-2}(XW''+W')|z_1|^2\overline{dz}'dz \\ & + k^{-1}\bar{d}d[(XW'+nk+1)\cdot(1-|z|^2)^{-1}]I^{(n-1)} \\ & + k^{-1}(XW'+nk+1)\overline{dz}'dz|_{(z_1,0)}. \end{aligned}$$

但是 $d[(XW'+nk+1)(1-|z|^2)^{-1}]$

$$\begin{aligned} & = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{k}-1}(XW''+W')z_1dz_1 \\ & \quad + \sum_{j=2}^{n}[(XW''+W')|z_1|^2)k^{-1}(1-|z|^2)^{-\frac{1}{k}-1}\bar{z}_j \\ & \quad + (XW'+nk+1)(1-|z|^2)^{-2}\bar{z}_j]dz_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{d}d[(XW'+nk+1)(1-|z|^2)^{-1}]_{(z_1,0)} \\ & = (XW''+W')|dz_1|^2+(XW'''+2W'')|z_1|^2|dz_1|^2 \\ & \quad + \sum_{j=2}^{n}[(XW''+W')|z_1|^2k^{-1}\overline{dz_j}+(XW'+nk+1)d\bar{z}_j]dz_j \\ & = [XW''+W'+(XW'''+2W'')X]|dz_1|^2 \\ & \quad + \sum_{j=2}^{n}[k^{-1}(XW''+W')X+(XW'+nk+1)]|dz_j|^2 \\ & = [XW''+W'+(XW'''+2W'')X]|dz_1|^2 \\ & \quad + [k^{-1}(XW''+W')X+(XW'+nk+1)]dz\,\overline{dz}'. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \bar{d}dT_{22}|_{(z_1,0)} = & [k^{-2}(XW''+W')X+k^{-1}(XW'+nk+1)]\overline{dz}'dz \\ & + k^{-1}[XW''+W'+(XW'''+2W'')X]|dz_1|^2I^{(n-1)} \\ & + k^{-1}[k^{-1}(XW''+W')X+(XW'+nk \\ & + 1)]dz\,\overline{dz}'I^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Ⅲ.1.4 由(3.3.9),(3.3.11)和(3.3.13)式有

$$
dT|_{(z_1,0)} = \begin{pmatrix} dT_{11} & dT_{12} \\ d\bar{T}'_{12} & dT_{22} \end{pmatrix}_{(z_1,0)}
= \begin{pmatrix} (XW''' + 2W'')z_1 dz_1 & k^{-1}(XW'' + W')\bar{z}_1 dz \\ 0 & k^{-1}(XW'' + W')\bar{z}_1 dz_1 I^{(n-1)} \end{pmatrix}.
$$

由于

$$
T|_{(z_1,0)} = \begin{pmatrix} XW'' + W' & 0 \\ 0 & k^{-1}(XW' + nk + 1)I^{(n-1)} \end{pmatrix},
$$

所以

$$
T^{-1}_{(z_1,0)} = \begin{pmatrix} (XW'' + W')^{-1} & 0 \\ 0 & k(XW' + nk + 1)^{-1}I^{(n-1)} \end{pmatrix},
$$

令

$$
[dT \cdot T^{-1}\overline{dT}']_{(z_1,0)} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix},
$$

则

$$
\begin{aligned}
t_{11} &= (XW'' + W')^{-1}(XW''' + 2W'')^2 X |dz_1|^2 \\
&\quad + k^{-1}(XW' + nk + 1)^{-1}(XW'' + W')^2 X dz\, \overline{dz}', \\
t_{12} &= k^{-1}(XW' + nk + 1)^{-1}(XW'' + W')^2 X\, \overline{dz_1} dz,\ t_{21} = \bar{t}'_{12}, \\
t_{22} &= k^{-1}(XW' + nk + 1)^{-1}(XW'' + W')^2 X |dz_1|^2 I^{(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Ⅲ.1.5 令

$$
[-\bar{d}dT + dT \cdot T^{-1}dT']_{(z_1,0)} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},
$$

则

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= [-\bar{d}dT_{11} + t_{11}]_{(z_1,0)} = [(XW' + nk + 1)^{-1}(XW''' + 2W'')^2 X - (XW''' \\
&\quad + 2W'') - (XW^{(4)} + 3W''')X]|dz_1|^2 + k^{-1}[(XW' + nk + 1)^{-1}(XW'' \\
&\quad + W')^2 X - (XW'' + W')\ (XW''' + 2W'')X]dz\, \overline{dz}', \\
R_{12} &= [-\bar{d}dT_{12} + t_{12}]_{(z_1,0)} = k^{-1}[(XW' + nk + 1)^{-1}(XW'' + W')^2 X \\
&\quad - (XW'' + W') - (XW''' + 2W'')X]\overline{dz_1}dz. \\
R_{22} &= [-\bar{d}dT_{22} + t_{22}]_{(z_1,0)} \\
&\quad = k^{-1}[(XW' + nk + 1)^{-1}(XW'' + W')^2 X \\
&\quad - (XW'' + W') - (XW'' + 2W'')X]|dz_1|^2 I^{(n-1)} - k^{-1}[k^{-1}(XW'' \\
&\quad + W')X + XW' + nk + 1]\bar{d}z'dz - k^{-1}[k^{-1}(XW'' + W')X
\end{aligned}
$$

$$+(XW'+nk+1)]\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z}'I^{(n-1)},$$

$R_{21}=\bar{R}'_{12}$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}Z[-\mathrm{dd}T+\mathrm{d}T\cdot T^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}]\overline{\mathrm{d}Z'}\mid_{(z_1,0)}\\
&=(\mathrm{d}z_1,\mathrm{d}z)\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R'_{12} & R_{22}\end{pmatrix}\overline{(\mathrm{d}z_1,\mathrm{d}z)}'\\
&=R_{11}|\mathrm{d}z_1|^2+\mathrm{d}zR'_{12}\overline{\mathrm{d}z_1}+\mathrm{d}z_1R_{12}\overline{\mathrm{d}z'}+\mathrm{d}zR_{22}\overline{\mathrm{d}z'}\\
&=P|\mathrm{d}z_1|^4+Q|\mathrm{d}z_1|^2\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z'}+R(\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z'})^2,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
P&=(XW''+W')^{-1}(XW'''+2W'')^2X-(XW'''+2W'')\\
&\quad-(XW^{(4)}+3W''')X,
\end{aligned}\tag{3.3.15}$$

$$\begin{aligned}
Q&=4k^{-1}[(XW'+nk+1)^{-1}(XW''+W')^2X\\
&\quad-(XW''+W')-(XW'''+2W'')X],
\end{aligned}\tag{3.3.16}$$

$$R=-2k^{-1}[k^{-1}(XW''+W')X+(XW'+nk+1)].\tag{3.3.17}$$

而

$$(\mathrm{d}Z\cdot T\overline{\mathrm{d}Z'})|_{(z_1,0)}=(XW''+W')|\mathrm{d}z_1|^2+k^{-1}(XW'+nk+1)\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z'},$$

因此最后得到全纯截曲率在$(z_1,0)$处的表达式

$$\omega(Z,\mathrm{d}Z)|_{(z_1,0)}=\frac{P|\mathrm{d}z_1|^4+Q|\mathrm{d}z_1|^2\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z'}+R(\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z'})^2}{[(XW''+W')|\mathrm{d}z_1|^2+k^{-1}(XW'+nk+1)\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z'}]^2},\tag{3.3.18}$$

其中 P,Q,R 分别如(3.3.15)～(3.3.17)式所示.

上式$|\mathrm{d}z_1|^2$换为$\{(1-|z|^2)^{-2-\frac{1}{k}}[(1-|z|^2)^2|\mathrm{d}z_1|^2+k^{-2}|z_1|^2z\mathrm{d}z'\overline{z\mathrm{d}z'}+2k^{-1}(1-|z|^2)\mathrm{Re}(\bar{z}_1\mathrm{d}z_1\overline{z\mathrm{d}z'})]\}$，$\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z'}$换成$[(1-|z|^2)^{-1}\cdot\mathrm{d}z(I-\bar{z}'z)^{-1}\overline{\mathrm{d}z'}]$，$X$ 如(3.3.3)式所示，则所得结果就是 $\omega(Z,\mathrm{d}Z)$在域 D 的任意一点 Z 处的表达式.

Ⅲ.1.6 当 $Z=(0,z)$，$\mathrm{d}Z=(0,\mathrm{d}z)\neq0$ 时，

$$\omega(Z,\mathrm{d}Z)=\frac{-2k^{-1}(nk+1)(\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z'})^2}{k^{-2}(nk+1)^2(\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z'})^2}=-\frac{2k}{nk+1}\tag{3.3.19}$$

仅与 k 有关，而与 $G(X)$无关. 当 $k=1$ 时，上式为 $-\dfrac{2}{n+1}$ 与 n 维超球的情况一致.

Ⅲ.2. 完备的 Kähler 度量

由于 $K(Z,Z)$可写为(见(3.3.5)式)：

$$G(X)(1-|z|^2)^{-(nk+1)/k} = \frac{G(X)}{F(X)}F(X)(1-|z|^2)^{-(nk+1)/k}$$
$$= k^{-1}\pi^n g(X) K_D(Z,\bar{Z}),$$

其中 $g(X)=G(X)/F(X)$ 而 $F(X)$ 如(3.3.2)式所示，$K_D(Z,\bar{Z})$ 为 $D(k)$ 的 Bergman 核，因此由 $K(Z,\bar{Z})$ 生成的度量方阵

$$T(Z,\bar{Z})=\left(\frac{\partial^2 \ln g(X)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right)+\left(\frac{\partial^2 \ln K_D(Z,\bar{Z})}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right).$$

上式右端第二个方阵为 Bergman 度量方阵，因此只要右端第一个方阵

$$\left(\frac{\partial^2 \ln g(X)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right)\geqslant 0, \tag{3.3.20}$$

那么由于 Bergman 度量是完备的，因而由 $K(Z,\bar{Z})$ 生成的度量 $Y_G(Z,\mathrm{d}Z)$ 也完备而且

$$Y_G(Z,\mathrm{d}Z)\geqslant B_D(Z,\mathrm{d}Z), \tag{3.3.21}$$

右端为域 D 的 Bergman 度量.

由计算可得

$$\left(\frac{\partial^2 \ln g(X)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}X[\ln g(X)]''+[\ln g(X)]' & 0\\ 0 & k^{-1}X[\ln g(X)]'I^{(n-1)}\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}},$$

其中 J_{11},J_{21},J_{22} 如(3.3.4)式所示，而且

$$\begin{vmatrix}J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{vmatrix}>0,$$

因此，(3.3.20)式成立的充要条件是 $[\ln g(X)]'\geqslant 0$ 和 $[\ln g(X)]''\geqslant 0$.

由计算得知，上两式等价于

$$[\ln g(X)]'=\frac{G'(X)}{G(X)}-\frac{F'(X)}{F(X)}\geqslant 0,$$
$$[\ln g(X)]''=\left[\frac{G'(X)}{G(X)}-\frac{F'(X)}{F(X)}\right]'\geqslant 0. \tag{3.3.22}$$

因此，若 $G(X)$ 满足条件(3.3.22)，则由 $K(Z,\bar{Z})$ 生成的在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的 Kahler 度量 $Y_G(Z,\mathrm{d}Z)$ 完备而且满足关系式(3.3.21).

例 令 $G(X)=(1-X)^{-\lambda}$，$\lambda\geqslant\max\{m_1,m_2\}$，则 $K(Z,\bar{Z})=G(X)(1-|z|^2)^{-(nk+1)/k}$ 生成一个在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的完备的 Kahler 度量 $Y_G(Z,\mathrm{d}Z)$ 并满足关系式(3.3.21). 这里

$$m_1=\max_{0\leqslant X<1}\left\{\frac{F'(X)(1-X)}{F(X)}\right\},$$

$$m_2=\max_{0\leqslant X<1}\left\{\frac{[F(X)F''(X)-F'(X)^2](1-X)^2}{F(X)^2}\right\}.$$

证： 经计算

$$\frac{G'(X)}{G(X)}-\frac{F'(X)}{F(X)}=\frac{\lambda(1-X)^{-1}F(X)-F'(X)}{F(X)},$$

$$\left[\frac{G'(X)}{G(X)}-\frac{F'(X)}{F(X)}\right]'=\frac{\lambda(1-X)^{-2}F^2(X)-F''(X)F(X)+F'(X)^2}{F^2(X)}.$$

由于对 $0\leqslant X<1$ 有 $F(X)>0$. 因此条件(3.3.22)成立的充要条件是

$$\lambda(1-X)^{-1}F(X)-F'(X)\geqslant 0, \tag{3.3.23}$$

$$\lambda(1-X)^{-2}F^2(X)-F''(X)F(X)+F'(X)^2\geqslant 0. \tag{3.3.24}$$

(3.3.23)式成立的充要条件是

$$\lambda\geqslant\max_{0\leqslant X<1}\left\{\frac{F'(X)(1-X)}{F(X)}\right\}\doteq m_1.$$

由于 $F'(X)$和 $F(X)(1-X)^{-1}$都是$(n+2)$次的$(1-X)^{-1}$的实多项式，所以

$$\lim_{X\to 1}\frac{F'(X)(1-X)}{F(X)}=n+1,$$

因此，m_1 存在而且是一个有限数，(3.3.24)式成立的充要条件是

$$\lambda\geqslant\max_{0\leqslant X<1}\left\{\frac{[F''(X)F(X)-F'(X)^2](1-X)^2}{F(X)^2}\right\}\doteq m_2.$$

由同样理由，m_2 存在而且有限. 因此若 $\lambda\geqslant\max\{m_1,m_2\}$，则 $G(X)=(1-X)^{-\lambda}$满足条件(3.3.22)，证毕.

Ⅲ.3. 全纯截曲率的上界

由于

$$\omega(Z,dZ)|_{(z_1,0)}=-C\omega_1(Z,dZ)[(XW''+W')|dz_1|^2+k^{-1}(XW'+nk+1)dz\,\overline{dz}']^{-2}_{(z_1,0)},$$

这里

$$\omega_1(Z,dZ)|_{(z_1,0)}=P_1|dz_1|^4+Q_1|dz_1|^2dz\,\overline{dz}'+R_1(dz\,\overline{dz}')^2, \tag{3.3.25}$$

其中

$$P_1=XW'''+2W''+X(XW'''+2W'')'$$
$$-X(XW'''+2W'')^2(XW''+W')^{-1}-C(XW''+W')^2,$$

$$Q_1 = 4k^{-1}[XW'' + W' + X(XW''' + 2W'') - X(XW'' + W')^2$$
$$\cdot(XW' + nk + 1)^{-1} - \frac{C}{2}(XW' + nk + 1)(XW'' + W')],$$
$$R_1 = k^{-1}[2(XW' + nk + 1) + 2k^{-1}X(XW'' + W')$$
$$- k^{-1}C(XW' + nk + 1)^2],$$

$C>0$ 是常数.

设 $G(X) = (1-X)^{-\lambda}(\lambda>0)$,我们有

$$W' = \lambda(1-X)^{-1}, \qquad W'' = \lambda(1-X)^{-2},$$
$$W''' = 2\lambda(1-X)^{-3}, \qquad W^{(4)} = 6\lambda(1-X)^{-4}.$$

以此代入(3.3.25)式,并令 $\lambda = m(nk+1)$,有

$$P_1 = m(nk+1)[2 - Cm(nk+1)](1-X)^{-4},$$
$$Q_1 = 2k^{-1}m(nk+1)^2(1-X)^{-2}(XW' + nk + 1)^{-1}[(2m - m^2C(nk+1))$$
$$\cdot(1-X)^{-2} + 2(1-m)(2 - Cm(nk+1))(1-X)^{-1}$$
$$-(1-m)(2 + C(1-m)(nk+1))],$$
$$R_1 = k^{-1}(nk+1)[(2mk^{-1} - Ck^{-1}m^2(nk+1))(1-X)^{-2}$$
$$+2m(1 - k^{-1} + Ck^{-1}(m-1)(nk+1))(1-X)^{-1}$$
$$+(1-m)(2 - Ck^{-1}\cdot(1-m)(nk+1))].$$

若 P_1, Q_1, R_1 都非负,显然有 $\omega(Z, \mathrm{d}Z) \leqslant -C$. 下面适当选择 C 和 m 使得 $P_1 \geqslant 0$, $Q_1 \geqslant 0$ 和 $R_1 \geqslant 0$.

1. 易见,若

$$C \leqslant \frac{2}{m(nk+1)}, \tag{3.3.26}$$

有 $P_1 \geqslant 0$.

2. 令
$$q(Y) = m[2 - Cm(nk+1)]Y^2 + 2(1-m)[2 - Cm(nk+1)]Y - (1-m)[2 + C(1-m)(nk+1)],$$

这里 $Y = (1-X)^{-1}$ 在 $[1, \infty)$ 中变化,而且 $q(Y)$ 乘上一个正的因子 $2k^{-1}m(nk+1)^2(1-X)^{-2}(XW' + nk + 1)^{-1}$ 后便是 Q_1.

$$q'(Y) = 2m[2 - Cm(nk+1)]Y + 2(1-m)[2 - Cm(nk+1)].$$

当

$$C \leqslant \frac{2}{m(nk+1)} \tag{3.3.27}$$

时,$q'(Y)$ 是一个增函数,$q'(1)$ 是在区间 $[1, \infty)$ 上的最小值,但当 C 满足(3.3.27)式时,

$$q'(1) = 2[2 - Cm(nk+1)] \geqslant 0.$$

因而 $q'(Y)$ 在 $[1, \infty)$ 上总是大于等于零,这说明 $q(Y)$ 在区间 $[1, \infty)$ 也

是一个增函数(或不减函数). 但 $q(1)=2-C(nk+1)$ 当 $C\leqslant\frac{2}{nk+1}$ 时,$q(1)\geqslant 0$,而 $q(Y)$ 在 $[1,\infty)$ 不减,故 $q(Y)\geqslant 0$. 因此,若

$$C\leqslant\min\left\{\frac{2}{m(nk+1)},\frac{2}{nk+1}\right\}\leqslant\frac{2}{m(nk+1)},m\geqslant 1,\qquad(3.3.28)$$

则 $q(Y)$ 在 $[1,\infty)$ 上非负,从而 $Q_1\geqslant 0$.

3. 令 $r(Y)=mk^{-1}[2-Cm(nk+1)]Y^2+2m[1-k^{-1}+k^{-1}C(m-1)(nk+1)]Y+(1-m)[2-k^{-1}C(1-m)(nk+1)]$,

这里 $Y=(1-X)^{-1}$ 在 $[1,\infty)$ 上变化,同样只要 $r(Y)$ 在 $[1,\infty)$ 上非负,则 R_1 也非负.

$r'(Y)=2mk^{-1}[2-Cm(nk+1)]Y+2m[1-k^{-1}+k^{-1}C(m-1)(nk+1)]$,若 C 满足条件(3.3.27),则 $r'(Y)$ 为增函数,其在 $[1,\infty)$ 上的最小值 $r'(1)=2m[k^{-1}+1-k^{-1}C(nk+1)]$,若 $C\leqslant\frac{(1+k)}{(nk+1)}$,则 $r'(1)\geqslant 0$,因而 $r'(Y)\geqslant 0$,从而 $r(Y)$ 在 $[1,\infty)$ 上也是不减函数. 但其最小值 $r(1)=2-Ck^{-1}(nk+1)$. 当 $C\leqslant\frac{2k}{(nk+1)}$ 时,$r(1)\geqslant 0$,因此,若

$$C\leqslant\min\left\{\frac{1+k}{nk+1},\frac{2k}{nk+1}\right\},\qquad(3.3.29)$$

则 $r(Y)\geqslant 0$,从而 $R_1\geqslant 0$.

由(3.3.26),(3.3.28),(3.3.29)式可知,若

$$0\leqslant C\leqslant\min\left\{\frac{2}{m(nk+1)},\frac{1+k}{nk+1},\frac{2k}{nk+1}\right\},m\geqslant 1,\qquad(3.3.30)$$

则 $P_1\geqslant 0,Q_1\geqslant 0,R_1\geqslant 0$,从而有 $\omega(Z,\mathrm{d}Z)\leqslant -C$.

最后,我们有如下结果. 若

$$m\geqslant\max\left\{\frac{m_1}{nk+1},\frac{m_2}{nk+1},1\right\},$$

而 C 满足条件(3.3.30),则由

$$(1-X)^{-m(nk+1)}(1-|z|^2)^{-(nk+1)/k}$$

生成的 $D(k)$ 的在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的完备 Kähler 度量 $Y(Z,\mathrm{d}Z)$ 的全纯截曲率 $\leqslant -C$,而且 $Y(Z,\mathrm{d}Z)\geqslant B_D(Z,\mathrm{d}Z)$.

由文献[Hei]可知,存在常数 $C_1>0$,使得有

$$Y(Z,\mathrm{d}Z)\leqslant C_1K_D(Z,\mathrm{d}Z),$$

其中 $K_D(Z,\mathrm{d}Z)$ 为域 D 的 Kobayashi 度量. 从而有

$$B_D(Z,\mathrm{d}Z)\leqslant C_1K_D(Z,\mathrm{d}Z),$$

这就是域 D 的关于 Bergman 度量与 Kobayashi 度量的比较定理. 由于此

比较定理在域 $D=D(k)$成立,这说明了域 $D(k)$的 Carathéodory 度量、Bergman 度量和 Kobayashi 度量是彼此等价的.

本节内容来自文[YW31,YW36].

Ⅳ. 关于表示域的一个注记

S.Bergman 利用核函数引进了 $\mathbf{C}^n$ 中有界域 G 的表示域的想法[Be1].设 $K_G(z,\bar{t})$是域 G 的 Bergman 核函数,$T_G^{-1}(t,\bar{t})$是域 G 的 Bergman 度量方阵

$$T_G(t,\bar{t})=\left(\frac{\partial^2 \ln K_G(t,\bar{t})}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right)$$

的逆矩阵.令 $w=f(z)$表示如下的映照

$$w=\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left[\ln \frac{K_G(z,\bar{t})}{K_G(t,\bar{t})}\right]T_G^{-1}(t,\bar{t}),$$

其中$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}=\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}_1},\frac{\partial}{\partial \bar{t}_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial \bar{t}_n}\right)$,则 G 在此映照下的像 $f(G)$称为域 G 的表示域.w 称为域 G 的表示坐标.陆启铿在文[Lu6]中对表示域的概念作了进一步阐述.他给出了

定义 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域 D 称为表示域,如果存在一点 $t\in D$,使得 Bergman 度量方阵 $T_D(z,\bar{t})$不依赖于 $z\in D$.点 t 称为表示域 D 的中心.

他同时证明了如下的

定理 A 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域,D_1 是 $\mathbf{C}^n$ 中的以点 s 为中心的表示域.若 $f:D\to D_1$ 是一个全纯同构,则 f 必为下列形式

$$f(z)=s+\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\ln \frac{K_D(z,\bar{t})}{K_D(t,\bar{t})}\right]T_D^{-1}(t,\bar{t})A, \qquad (3.4.1)$$

其中 $s=f(t)$,$K_D(z,\bar{t})$为域 D 的 Bergman 核函数,$A=\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=t}$,而且有

$$AT_{D_1}(s,\bar{s})A'=T_D(t,\bar{t}). \qquad (3.4.2)$$

若 $D=D_1$,则 $f(z)$就是域 D 的全纯自同构.因此定理 A 提供了一个由域 D 的 Bergman 核函数求域 D 的全纯自同构群的一个方法.

殷慰萍在文[YW35]中对域

$D(K)=\{Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(z_1,z)\in\mathbf{C}^n:|z_1|^{2K}+|z|^2<1,0<K\neq 1\}$

证明了集合 $IM(D(K))$中的任一元素生成在 $\mathrm{Aut}(D(K))$下不变的 Kahler 度量,其中

$IM(D(K))=\{G(X)(1-|z|^2)^{-(nK+1)/K}:G(X)$满足条件(M)$\}$

$$
(\mathrm{M})\begin{cases} G(X)\in \mathbf{C}^{\infty}, & W=\ln G(X) \\ X\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X}+nK+1>0, & X\dfrac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}X^2}+\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X}>0, \end{cases}
$$

而且

$$
X=\frac{|z_1|^2}{(1-|z|^2)^{1/K}}. \tag{3.4.3}
$$

在殷慰萍访问美国圣母大学(Univ. of Notre Dame)时,王必敏教授指出 $D(K)$ 的任何在 $\mathrm{Aut}(D(K))$ 下不变的 Kähler 度量都可由 $IM(D(K))$ 中的元素生成.

一个自然的问题是:在(3.4.1)式中把 Bergman 核函数换成任意一个在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变 Kähler 度量的生成函数,所得的 $f(z)$ 是不是域 D 的全纯自同构(在 $D=D_1$ 时)?

当 $D=D(K)$ 时,本文给出上述问题一个肯定的回答. 由此开始,总令 $D=D(K)$.

由上述内容及文[YW35]可知,D 的任一在 $\mathrm{Aut}(D)$ 下不变的 Kähler 度量由满足条件(M)的如下元素生成

$$
K(Z,\bar{Z})=G(X)(1-|z|^2)^{-(nK+1)/K}, \tag{3.4.4}
$$

而且由 $K(Z,\bar{Z})$ 生成的度量方阵为

$$
\begin{aligned}
T_D(Z,\bar{Z})&=\left(\frac{\partial^2\ln K(Z,\bar{Z})}{\partial z_\alpha\partial \bar{z}_\beta}\right)\\
&=\begin{pmatrix} J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 & 0\\ 0 & K^{-1}G_2I^{(n-1)}\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} J_{11} & 0\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}}',
\end{aligned} \tag{3.4.5}
$$

其中 $G_2=XW'+nK+1$,

$$
G_1=XW''+W',\ W'=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X},\ W''=\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}X^2},
$$

$$
\begin{cases} J_{11}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-|z|^2)^{-1/2K},\quad J_{21}=K^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1(1-|z|^2)^{-(2K+1)/2K}\bar{z}',\\ J_{22}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(1-|z|^2)^{-1/2}Q_z,\quad Q_z\bar{Q}'_z=(I^{(n-1)}-\bar{z}'z)^{-1}. \end{cases} \tag{3.4.6}
$$

1. D 是以零为中心的表示域. 根据定义,只要证明 Bergman 度量方阵在 $Z\in D$,$T_D(Z,0)$ 时为一常数方阵,由于 D 的 Bergman 核函数属于 $IM(D)$,我们可更一般的证明 D 的不变 Kähler 度量方阵 $T_D(Z,\bar{T})$ 当 $T=0$ 时,$T_D(Z,0)$ 为常数方阵与 Z 无关.

事实上,$T_D(Z,\bar{T})$ 就是 $T_D(Z,\bar{Z})$ 中令 $Z=T$ 而得的. 此时 $T=(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(t_1,t)\in D$,易知

$$T_D(Z,0)=\begin{pmatrix} W'\left(\frac{z_1\bar{t}_1}{(1-z\bar{t}')^{1/K}}\right)\Big|(Z,0) & 0 \\ 0 & \frac{nK+1}{K} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} W'(0) & 0 \\ 0 & \frac{nK+1}{K} \end{pmatrix}$$

为常数方阵. 故 D 是以零为中心的表示域, 而且在任何不变 Kähler 度量下, D 都是以零为中心的表示域.

2. 由定理 A 可知, 若 $D_1=D=D(K)$, 则 f 是映 T 为零的 D 的全纯自同构. 而熟知, 并不是 $D(K)$ 的每一点都能经全纯自同构映为点零的. 由文[YW35]可知, 只有 $T=(0,t)\in D$ 时, 才有 $f\in \mathrm{Aut}(D)$ 使得 $f(T)=0$. 因此由(3.4.1)得

$$f(Z)=\left[\frac{\partial}{\partial T}\ln\frac{K(Z,\bar{T})}{K(T,\bar{T})}\right]T_D^{-1}(T,\bar{T})A, \tag{3.4.7}$$

其中 $T=(0,t)\in D$, $K(Z,\bar{Z})$ 由式(3.4.4)表达, 且有

$$AT_D(0,0)\bar{A}'=T_D(T,\bar{T})|_{T=(0,t)}, \tag{3.4.8}$$

现根据式(3.4.7)进行计算, 所得之 f 便形成 $\mathrm{Aut}(D)$.

3. 首先计算 $T_D(T,\bar{T})$ 当 $T=(0,t)\in D$ 时之值. 由式(3.4.5)可知

$$T_D(T,\bar{T})|_{T=(0,t)}=\begin{pmatrix} (1-|t|^2)^{-1/K}W'(0) & 0 \\ 0 & \frac{nK+1}{K}(1-|t|^2)^{-1}(I-\bar{t}'t)^{-1} \end{pmatrix}.$$

同样可得

$$T_D(0,0)=\begin{pmatrix} W'(0) & 0 \\ 0 & \frac{nK+1}{K}I^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

由(3.4.8)可知

$$A=\begin{pmatrix} e^{i\theta}(1-|t|^2)^{-1/2k} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi}(1-|t|^2)^{-1/2}Q_t \end{pmatrix}. \tag{3.4.9}$$

而

$$T_D^{-1}(T,\bar{T})|_{T=(0,t)}=\begin{pmatrix} \frac{(1-|t|^2)^{1/K}}{W'(0)} & 0 \\ 0 & \frac{K}{nK+1}(1-|t|^2)(I-\bar{t}'t) \end{pmatrix}. \tag{3.4.10}$$

4. 由(3.4.3)及(3.4.4)知

$$\ln\frac{K(Z,\bar{T})}{K(T,\bar{T})}=W(X(Z,\bar{T}))-\frac{nK+1}{K}\ln(1-z\bar{t}')-W(X(T,\bar{T}))$$

$$+\frac{nK+1}{K}\ln(1-|t|^2),$$

其中

$$X(Z,\overline{T})=\frac{z_1\overline{t}_1}{(1-z\overline{t}')^{1/K}},\quad X(T,\overline{T})=\frac{|t_1|^2}{(1-|t|^2)^{1/K}},$$

而 $W(X(Z,\overline{T}))=\ln G(X(Z,\overline{T}))$是 $X(Z,\overline{T})$的函数，
$W(X(T,\overline{T}))=\ln G(X(T,\overline{T}))$是 $X(T,\overline{T})$的函数.
这样就有

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\ln\frac{K(Z,\overline{T})}{K(T,\overline{T})}\right]=\left(\frac{W'z_1}{(1-z\overline{t}')^{1/K}}-\frac{W't_1}{(1-|t|^2)^{1/K}},\frac{(nK+1)(1-z\overline{t}')^{1/K}+W'z_1\overline{t}_1}{K(1-z\overline{t}')^{1/K+1}}z-\frac{(nK+1)(1-|t|^2)^{1/K}+W'|t_1|^2}{K(1-|t|^2)^{1/K+1}}t\right).$$

因此有

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\ln\frac{K(Z,\overline{T})}{K(T,\overline{T})}\right]_{T=(0,t)}=\left(\frac{W'(0)z_1}{(1-z\overline{t}')^{1/K}},\frac{(nK+1)z}{K(1-z\overline{t}')}-\frac{(nK+1)t}{K(1-|t|^2)}\right).$$

由(3.4.7),(3.4.9),(3.4.10)及上式,我们有

$$f(Z)=(e^{i\theta}(1-|t|^2)^{1/2K}(1-z\overline{t}')^{-1/K}z_1,$$
$$e^{i\varphi}(1-|t|^2)^{1/2}(1-z\overline{t}')^{-1}(z-t)Q_t),$$

其中 $Q_t\overline{Q}'_t=(I^{(n-1)}-\overline{t}'t)^{-1}$, $T=(0,t)\in D=D(K)$.

这证明了 $D(K)$的全纯自同构群 Aut(D)由上述形式的 $f(Z)$组成. 这与已知结果一致[YW35].

5. 我们对域 $D=D(K)$证明了 Aut(D)可以由 D 的任一不变 Kähler 度量生成. 提供了由域的不变度量来求该域的全纯自同构群的一个方法. 这可进一步推广到某种复流形.

在对称的典型域即 Cartan 域中,尚余下 16 维和 27 维的两个例外域的全纯自同构群没有求出,而其 Bergman 核已求得[YW],故可用本节所提供的方法求得其全纯自同构群.

本节内容来自文[YW32].

V. 一类拟凸域的 Bergman 度量与 Kobayashi 度量的比较定理

我们考虑如下的拟凸域

$$E(m,n,K)=\{(z,w)\in \mathbf{C}^{n+m}: |z|^2+|w|^{2K}<1\},$$

其中

$$z=(z_1,\cdots,z_n)\in \mathbf{C}^n,\ w=(w_1,\cdots,w_m)\in \mathbf{C}^m,\ K>0,$$

$$|z|^2=z\bar{z}'=\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2,\quad |w|^2=w\bar{w}'=\sum_{K=1}^{m}|w_K|^2.$$

当 $K=1$ 时,$E(m,n,1)$ 为 $\mathbf{C}^{m+n}$ 中的单位超球.当 $K>1$ 时,$E(m,n,K)$ 为弱拟凸域,它的 Levi 形式有 m 个零特征值.本文推广了[YW36]的结果,[YW36]仅考虑了 $m=1$ 的情况.当 $m=1$ 时,它只有一个弱拟凸方向.

最近的一些结果表明了为什么我们对这种域感兴趣.当 $m>1$ 时,这域不是"decoupled"的;Derridj - Tartakoff [DeT]对这种域上的 $\bar{\partial}$-Neumann 问题证明了解析超椭圆性(analytic hypoellipticity);在[GeK]和[Kod]中指出,此域有一个非紧全纯自同构群;D'Angelo 在[DA1]得到了此域的 Bergman 核函数的显表达式.

不变度量理论在多复分析中很重要.众所周知,Bergman 度量,Carathéodory 度量和 Kobayashi 度量是三个经典的不变度量.$\mathbf{C}^n$ 中有界域上满足"收缩性质"的不变度量中,K_D(Kobayashi 微分度量)是最大的,而 C_D(Carathéodory 微分度量)是最小的.由于 Bergman 度量 B_D 的全纯截曲率不总是强负的,甚至对 $\mathbf{C}^n$ 中的有界齐性域也是如此,因此一般 B_D 不具有"收缩性质".但是陆启铿证明,若 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界可递域,f: D $\to D$ 是任一全纯映照,则存在一正常数 K,使 $B_D(f,f)\leqslant KB_D(z,z)$ 成立.从陆启铿的文章[Lu8]中的一个不等式,可以直接推出"$B_D\geqslant C_D$"对 $\mathbf{C}^n$ 中的任何有界域成立.所以一个很自然的问题就是何时不等式"$B_D\leqslant cK_D$"成立? 这里 D 是有界域,c 是依赖于 D 的常数.K. T. Hahn 和 P. Pflug[HP]证明上述不等式对 D 是 $\mathbf{C}^2$ 中的广义 Thullen 域成立.殷慰萍证明对域 $E(1,n,K)$ 成立.我们证明下列主要定理.

主要定理 设 B_D 和 K_D 分别表示域 $E(m,n,K)$ 的 Bergman 度量和 Kobayashi 度量,则存在正常数 c,使得不等式 $B_D\leqslant cK_D$ 成立.

首先回顾一些我们要用到的基本事实,然后给出 $E(m,n,K)$ 的不变 Kahler 度量的全纯截曲率,求出 $E(m,n,K)$ 的不小于 Bergman 度量的不变 Kahler 度量 Y,对 Y 求出其全纯截曲率的上界从而得到主要定理.

V.1. 基本事实

我们先叙述一些基本事实和一些初等计算,使我们可以找到域

$E(m,n,K)$的不变度量下的全纯截曲率的显表达式. 如通常一样 $\mathrm{Aut}(E)$表示 $E(m,n,K)$的全纯自同构群.

V.1.1 $\mathrm{Aut}(E)$由下列映照组成

$$\begin{cases} z^* = e^{i\theta}(1-|a|^2)^{1/2}(z-a)Q_a(1-\bar{a}z')^{-1}, \\ w^* = (1-|a|^2)^{1/2K}(1-\bar{a}z')^{-1/K}wU, \end{cases}$$

这里 U 是 m 阶酉方阵, $a\in \mathbf{C}^n$, $|a|^2<1$, $\theta\in\mathbf{R}$, $Q_a\overline{Q}_a' = (I^{(n)}-\bar{a}'a)^{-1}$.

这里 $\mathrm{Aut}(E)$的形式是由文[Kod]的第 348 页变化而来. 显然, 对 $E(m,n,K)$内任一点(z,w), 存在 $F\in \mathrm{Aut}(E)$, 使得

$$F(z,w)=(0,w^*).$$

V.1.2 设

$$X=X(z,w)=|w|^2(1-|z|^2)^{-1/K},$$

则 X 是一个在 $\mathrm{Aut}(E)$下不变的函数, 即 $X(z^*,w^*)=X(z,w)$.

事实上,

$$\begin{aligned} X(z^*,w^*) &= |w^*|^2(1-|z^*|^2)^{-1/K} \\ &= (1-|a|^2)^{1/K}|1-\bar{a}z'|^{-2/K}|w|^2\times[1-(1-|a|^2) \\ &\quad \times(z-a)Q_aQ'_a\overline{(z-a)}'|1-\bar{a}z'|^{-2}]^{-1/K}. \end{aligned}$$

但是,

$$\begin{aligned} &1-(1-|a|^2)(z-a)Q_a\overline{Q}'_a(\bar{z}'-\bar{a}')|1-\bar{a}z'|^{-2} \\ &=|1-\bar{a}z'|^{-2}[(1-|a|^2)(1-|z|^2)]. \end{aligned}$$

所以, 我们有

$$X(z^*,w^*)=|w|^2(1-|z|^2)^{-1/K}=X(z,w).$$

V.1.3 $E(m,n,K)$的 Bergman 核函数为[DA1]

$$K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]=F(X)(1-|z|^2)^{-N},$$

其中

$$F(X)=\sum_{j=0}^{n+1}b_j(1-X)^{-(m+j)},\quad N=N_1/K,\quad N_1=(n+1)K+m.$$

常数 b_j 依赖于 j,m,n,K, 而且 $b_0=0$.

V.1.4 若 $F=(f_1,\cdots,f_n,g_1,\cdots,g_m)\in \mathrm{Aut}(E)$, J_F 表示 F 的变换矩阵, 则

$$J_F=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial z} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial w} & \dfrac{\partial g}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

易知,

$$\frac{\partial f}{\partial w}=0,\quad \frac{\partial g}{\partial z}=(1-|a|^2)^{1/2K}(1-\bar{a}z')^{-1-1/K}K^{-1}\bar{a}'wU,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=e^{i\theta}(1-|\alpha|^2)^{1/2}(1-\bar{\alpha}z')^{-1}[I+(1-\bar{\alpha}z')^{-1}\bar{\alpha}'(z-\alpha)]Q_\alpha,$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}=(1-|\alpha|^2)^{1/2K}(1-\bar{\alpha}z')^{-1/K}U.$$

令

$$J_F|_{\alpha=z}=J=\begin{pmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix},$$

我们有

$$J_{11}=e^{i\theta}(1-|z|^2)^{-1/2}Q_z,\quad J_{22}=(1-|z|^2)^{-1/2K}U,$$

$$J_{12}=(1-|z|^2)^{-1-1/2K}K^{-1}\bar{z}'wU,\quad J_{21}=0.$$

V.1.5 令 $T=T[(z,w),\overline{(z,w)}]$，则有

$$T=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\ln K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}, & \dfrac{\partial^2\ln K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_\alpha\partial\bar{w}_j}\\ \dfrac{\partial^2\ln K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_k\partial\bar{z}_\beta}, & \dfrac{\partial^2\ln K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_k\partial\bar{w}_j}\end{pmatrix},$$

$$1\leqslant\alpha,\quad\beta\leqslant n,\quad 1\leqslant k,\quad j\leqslant m.$$

下面，我们计算 $T|_{z=0}$ 之值. 由计算得

$$\left(\frac{\partial^2\ln K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}\right)_{z=0}=[W'X+N_1]K^{-1}I,\ \left(\frac{\partial^2\ln K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_\alpha\partial\bar{w}_j}\right)_{z=0}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2\ln K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_k\partial\bar{w}_j}\right)_{z=0}=W'I+W''\bar{w}'w,\qquad \left(\frac{\partial^2\ln K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_k\partial\bar{z}_\beta}\right)_{z=0}=0.$$

这里

$$W=\ln F,\quad W'=\frac{\partial W}{\partial X},\quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}=W''.$$

因此我们有

$$T|_{z=0}=\begin{pmatrix}K^{-1}[XW'+N_1]I & 0\\ 0 & W'I+W''\bar{w}'w\end{pmatrix}.$$

V.1.6 对任何 $(\alpha,w)\in E(m,n,K)$，存在 $F\in\mathrm{Aut}(E)(U=I)$，使得 $F(z,w)=(0,w^*)$，而且有

$$T|_{(\alpha,w)}=J_F|_{z=\alpha}T[(z^*,w^*),\overline{(z^*,w^*)}]|_{z^*=0}\overline{(J_F)'_{z=\alpha}}$$

$$=J\begin{pmatrix}K^{-1}[XW'+N_1]I & 0\\ 0 & W'I+W''\bar{w}^{*\prime}w^*\end{pmatrix}\bar{J}'.$$

令 $\alpha=z$，$w^*=(1-|z|^2)^{-1/2K}w$，我们得到

$$T=\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix},$$

这里

$$T_{11}=K^{-1}(XW'+N_1)Q_z\overline{Q}'_z+K^{-2}(1-|z|^2)^{-2}(XW''+W')Xzz',$$

$$T_{21}=K^{-1}(1-|z|^2)^{-1-K^{-1}}(XW''+W')w'z,\quad T_{12}=\overline{T}'_{21},$$

$$T_{22}=W'(1-|z|^2)^{-1/K}I+(1-|z|^2)^{-2/K}W''\overline{w}'w,$$

注记 在V.1.5和V.1.6中，令 $G(X)(1-|z|^2)^{-N}=K_E[(z,w),\overline{(z,w)}]$，并设 $W=\ln G(X)$，则 T 有上面同样式子.

V.2. 全纯截曲率

$K[(z,w),\overline{(z,w)}]=G(X)(1-|z|^2)^{-N}$ 生成一个 $E(m,n,K)$ 的不变 Kahler 度量，则其度量方阵 T 有V.1.6的形式(见上面的注). 其全纯截曲率 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$ 根据定义有下列形式

$$\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]=\frac{\mathrm{d}(z,w)[-\overline{\mathrm{d}}\mathrm{d}T+\mathrm{d}T\cdot T^{-1}\overline{\mathrm{d}T}]\overline{\mathrm{d}(z,w)}'}{[\mathrm{d}(z,w)T\overline{\mathrm{d}(z,w)}']^2}$$

全纯截曲率在双全纯映照下不变，因此我们只要计算其在点$(0,w)$处之值

$$\mathrm{d}T=\begin{pmatrix}\mathrm{d}T_{11} & \mathrm{d}T_{12}\\ \mathrm{d}T_{12} & \mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix},\ \overline{\mathrm{d}}\mathrm{d}T=\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{11} & \overline{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}\\ \overline{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{21} & \overline{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix}.$$

V.2.1 $T_{22}=W'(1-|z|^2)^{-1/K}I+W''(1-|z|^2)^{-2/K}\overline{w}'w$，

经计算，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T_{22}|_{z=0}&=W'''\overline{w}'w\sum_{k=1}^{m}\overline{w}_k\mathrm{d}w_k+W''\sum_{k=1}^{m}(\overline{w}_kI+\overline{w}'e_k)\mathrm{d}w_k\\&=W'''(\overline{w}\mathrm{d}w')\overline{w}'w+W''\overline{w}\mathrm{d}w'I+W''\overline{w}'\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{22}|_{z=0}={}&K^{-1}[XW''+W']\mathrm{d}z\overline{\mathrm{d}z}'I+K^{-1}(XW'''+2W'')\overline{w}'w|\mathrm{d}z|^2\\&+[W''I+W'''\overline{w}'w]|\mathrm{d}w|^2+W''\overline{\mathrm{d}w}'\mathrm{d}w+W^{(4)}\overline{w}'w|w\overline{\mathrm{d}w}'|^2\\&+W'''[|w\overline{\mathrm{d}w}'|^2I+(\overline{w}\mathrm{d}w')(\overline{\mathrm{d}w}'w)+(w\overline{\mathrm{d}w}')(\overline{w}'\mathrm{d}w)].\end{aligned}$$

V.2.2 $T_{12}=K^{-1}(1-|z|^2)^{-1-1/K}(XW''+W')\overline{z}'w$，

经计算，我们有

$$\mathrm{d}T_{12}|_{z=0}=0,$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}|_{z=0}={}&K^{-1}(XW'''+2W'')(\overline{w}\mathrm{d}w')(\overline{\mathrm{d}z}'w)\\&+K^{-1}(XW''+W')\overline{\mathrm{d}z}'\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

V.2.3 $T_{21}=K^{-1}(1-|z|^2)^{-1-1/K}(XW''+W')\overline{w}'z$，

经计算，我们有

$$dT_{21}|_{z=0} = K^{-1}(XW''+W')w'dz,$$

$$\bar{\partial} dT_{21}|_{z=0} = K^{-1}(XW''+W')\overline{dw}'dz + K^{-1}(XW'''+2W')(w\overline{dw}')\bar{w}'dz.$$

V.2.4

$$\begin{aligned} T_{11} &= K^{-1}(XW'+N_1)(1-|z|^2)^{-1}Q_z\bar{Q}_z' \\ &\quad + K^{-2}(1-|z|^2)^{-2}(XW''+W')X\bar{z}'z \\ &= K^{-1}(XW'+N_1)(1-|z|^2)^{-1}I + K^{-1}[(XW'+N_1) \\ &\quad + K^{-1}(XW''+W')X](1-|z|^2)^{-2}\bar{z}'z. \end{aligned}$$

经计算,我们有

$$dT_{11}|_{z=0} = K^{-1}(XW''+W')\bar{w}dw'I,$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial} dT_{11}|_{z=0} &= K^{-1}(XW'+N_1)|dz|^2 I + K^{-2}(XW''+W')X|dz|^2 I \\ &\quad + K^{-1}[XW'+N_1+K^{-1}(XW''+W')X]\overline{dz}'dz \\ &\quad + K^{-1}(XW'''+2W'')|w\overline{dw}'|^2 I + K^{-1}(XW''+W')|dw|^2 I. \end{aligned}$$

V.2.5 由 V.2.1~V.2.4,我们有

$$dT|_{z=0} = \begin{pmatrix} K^{-1}(XW'+N_1)\bar{w}dw'I & 0 \\ K^{-1}(XW''+W')\bar{w}'dz & W'''(\bar{w}dw')\bar{w}'w + W''[wdw'I+\bar{w}'dw] \end{pmatrix}$$

和

$$T|_{z=0} = \begin{pmatrix} K^{-1}(XW'+N_1)I & 0 \\ 0 & W'I + W''\bar{w}'w \end{pmatrix}.$$

显然,

$$T^{-1}|_{z=0} = \begin{pmatrix} K(XW'+N_1)^{-1}I & 0 \\ 0 & (W')^{-1}[I-(W'+W''w\bar{w}')^{-1}w'wW''] \end{pmatrix}.$$

令

$$[dT\cdot T^{-1}\overline{dT}']|_{z=0} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}.$$

我们有

$$t_{11} = K^{-1}(XW''+W')^2(XW'+N_1)^{-1}|w\overline{dw}'|^2 I,$$

$$t_{12} = K^{-1}(XW''+W')^2(XW'+N_1)^{-1}\bar{w}dw'\overline{dz}'w,$$

$$t_{21} = \bar{t}'_{12},$$

$$\begin{aligned} t_{22} &= K^{-1}(XW''+W')^2(XW'+N_1)^{-1}|dz|^2\bar{w}'w \\ &\quad + (W')^{-1}\{[W'''(XW'''+4W'')-(XW''+W')^{-1}W''(XW'''+2W'')^2] \\ &\quad \times |w\overline{dw}'|^2\bar{w}'w + (W'')^2[\bar{w}dw'I+\bar{w}'dw][d\bar{w}w'I+\overline{dw}'w]\}. \end{aligned}$$

V.2.6 令 $[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T+\mathrm{d}T\cdot T^{-1}\overline{\mathrm{d}T}']_{z=0}=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}$,

我们有

$$
\begin{aligned}
R_{11}=[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{11}+t_{11}]_{z=0}={}&K^{-1}[(XW''+W')^2(XW'+N_1)^{-1}I\\
&-(XW'''+2W'')I]\,|w\overline{\mathrm{d}w}'|^2-K^{-1}(XW''+W')\mathrm{d}w\,w\,I\\
&-K^{-1}[XW'+N_1+K^{-1}(XW''+W')X]\overline{\mathrm{d}z}'\mathrm{d}z\\
&-K^{-1}[XW'+N_1+K^{-1}(XW''+W')X]\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z}'I,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{12}=[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}+t_{12}]_{z=0}={}&K^{-1}[(XW'+N_1)^{-1}(XW''+W')^2\\
&-(XW'''+2W'')](\bar{w}\mathrm{d}w')\overline{\mathrm{d}z}'\mathrm{d}w-K^{-1}(XW''+W')\overline{\mathrm{d}z}'\mathrm{d}w,
\end{aligned}
$$

$$R_{21}=\bar{R}'_{12},$$

$$
\begin{aligned}
R_{22}={}&[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{22}+t_{22}]_{z=0}\\
={}&(W')^{-1}\{[W'''(XW'''+4W'')-(XW''+W')^{-1}W''(XW'''\\
&+2W'')^2]\,|w\overline{\mathrm{d}w}'|^2\bar{w}'w\}+[(W'')^2(W')^{-1}-W'''](\bar{w}\mathrm{d}w'I\\
&+\bar{w}'\mathrm{d}w)(w\overline{\mathrm{d}w}'I+\overline{\mathrm{d}w}'w)+K^{-1}[(XW'+N_1)^{-1}(XW''\\
&+W')^2-(XW'''+2W'')]\,|\mathrm{d}z|^2\bar{w}'w-K^{-1}(XW''\\
&+W')|\mathrm{d}z|^2I-W''|\mathrm{d}w|^2I-W''\overline{\mathrm{d}w}'\mathrm{d}w-W^{(4)}|w\overline{\mathrm{d}w}'|^2\bar{w}'w.
\end{aligned}
$$

V.2.7

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T+\mathrm{d}T\cdot T^{-1}\overline{\mathrm{d}T}']\overline{(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)}'\Big|_{z=0}\\
&\quad=(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}\overline{(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)}'\\
&\quad=\mathrm{d}zR_{11}\overline{\mathrm{d}z}'+\mathrm{d}wR_{21}\overline{\mathrm{d}z}'+\mathrm{d}zR_{12}\overline{\mathrm{d}w}'+\mathrm{d}wR_{22}\overline{\mathrm{d}w}'.
\end{aligned}
$$

由计算,我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}zR_{11}\overline{\mathrm{d}z}'={}&K^{-1}[(XW''+W')^2(XW'+N_1)^{-1}-(XW'''+2W'')]\\
&\cdot|w\overline{\mathrm{d}w}'|^2|\mathrm{d}z|^2-K^{-1}(XW''+W')|\mathrm{d}w|^2|\mathrm{d}z|^2\\
&-K^{-1}[XW'+N_1+K^{-1}(XW''+W')X]|\mathrm{d}z|^4\\
&-K^{-1}\cdot[XW'+N_1+K^{-1}(XW''+W')X]|\mathrm{d}z|^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}zR_{12}\overline{\mathrm{d}w}'={}&K^{-1}[(XW'+N_1)^{-1}(XW''+W')^2-(XW'''+2W'')]\\
&\cdot|w\overline{\mathrm{d}w}'|^2|\mathrm{d}z|^2-K^{-1}(XW''+W')|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2,
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{d}wR_{21}\overline{\mathrm{d}z}'=\mathrm{d}zR_{12}\overline{\mathrm{d}w}',$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}wR_{22}\overline{\mathrm{d}w}'={}&(W')^{-1}\{[W'''(XW'''+4W'')-(XW''\\
&+W')^{-1}W''(XW'''+2W'')^2]\}|\mathrm{d}w\bar{w}'|^4\\
&+4\left[\frac{(W'')^2}{W'}-W'''\right]|w\overline{\mathrm{d}w}'|^2|\mathrm{d}w|^2+K^{-1}[(XW'
\end{aligned}
$$

$$+N_1)^{-1}(XW''+W')^2-(XW'''+2W'')]|dz|^2|w\,\overline{dw}'|^2$$
$$-K^{-1}(XW''+W')|dz|^2|dw|^2-2W''|dw|^4$$
$$-W^{(4)}|w\,\overline{dw}'|^4.$$

所以，我们得到

$$(dz,dw)[-\bar{d}dT+dT-T^{-1}\overline{dT}']_{z=0}\overline{(dz,dw)}'$$
$$=P_1|w\,\overline{dw}'|^4+P_{12}|w\,\overline{dw}'|^2|dw|^2+P_2|dw|^4$$
$$+Q_1|dz|^2|dw|^2+Q_2|w\,\overline{dw}'|^2|dz|^2+R|dz|^4,$$

这里

$$P_1=\frac{W'''}{W'}(XW'''+4W'')-\frac{W''}{W'}(XW''+W')^{-1}(XW'''+2W'')^2-W^{(4)},$$

$$P_{12}=4\left[\frac{(W'')^2}{W'}-W'''\right],\quad P_2=-2W'',\quad Q_1=-4K^{-1}(XW''+W'),$$

$$Q_2=4K^{-1}[(XW'+N_1)^{-1}(XW''+W')^2-(XW'''+2W'')],$$

$$R=-2K^{-1}[XW'+N_1+K^{-1}(XW''+W')X].$$

V.2.8 $(dz,dw)T\overline{(dz,dw)}'|_{z=0}=K^{-1}(XW'+N_1)|dz|^2$
$$+W'|dw|^2+W''|w\,\overline{dw}'|^2.$$

所以，最后我们有

$$\omega[(z,w);d(z,w)]_{z=0}$$
$$=-\frac{P_1|w\,\overline{dw}'|^4+P_{12}|w\,\overline{dw}'|^2|dw|^2+P_2|dw|^4+Q_1|dz|^2|dw|^2+Q_2|w\,\overline{dw}'|^2|dz|^2+R|dz|^4}{[K^{-1}(XW'+N_1)|dz|^2+W'|dw|^2+W''|w\,\overline{dw}'|^2]^2}.$$

若 $w=0$，$d(z,w)=(dz,0)$，则有

$$\omega[(z,w),d(z,w)]=-2K[(n+1)K+m]^{-1}.$$

V.3. 完备的 Kähler 度量

设 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]=G(X)(1-|z|^2)^{-N}$ 生成 $E(m,n,K)$ 的一个不变 Kahler 度量，则有

$$G(X)(1-|z|^2)^{-N}=\frac{G(X)}{F(X)}F(X)(1-|z|^2)^{-N}=g(X)K_E[(z,w),\overline{(z,w)}],$$

这里

$$g(X)=G(X)/F(X),K_E \text{ 是 } E(m,n,K) \text{ 的 Bergman 核}.$$

所以由 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]$ 生成的度量方阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\ln g(X)}{\partial z_\alpha\partial \bar{z}_\beta} & \frac{\partial^2\ln g(X)}{\partial z_\alpha\partial \overline{w}_k}\\ \frac{\partial^2\ln g(X)}{\partial w_j\partial \bar{z}_\beta} & \frac{\partial^2\ln g(X)}{\partial w_j\partial \overline{w}_k}\end{pmatrix}+T[(z,w),\overline{(z,w)}].$$

第一项书为 T_g，则由计算，我们有

$$T_g = J\begin{pmatrix} K^{-1}[\ln g(X)]' & 0 \\ 0 & [\ln(X)]'I + [\ln g(X)]''\bar{w}_* w_* \end{pmatrix} J'.$$

这里 J 与 1.4 中的相同，而 $w_* = (1 - |z|^2)^{-1/2K} w$.

第二项是 Bergman 度量方阵，它与 V.1.6 中的相同. 由于 Bergman 度量 B_D 是完备的，若 $T_g \geqslant 0$，则由 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]$ 生成的 Kähler 度量 Y_G 也是完备的. 而且

$$Y_G \geqslant B_D.$$

$T_g \geqslant 0$ 的充要条件是$[\ln g(X)]' \geqslant 0$，$[\ln g(X)]'' \geqslant 0$. 但

$$[\ln g(X)]' = G'(X)/G(X) - F'(X)/F(X),$$

$$[\ln g(X)]'' = \left[\frac{G''(X)}{G(X)} - \frac{F'(X)}{F(X)}\right]',$$

故 $T_g \geqslant 0$ 的充要条件为

$$\left[\frac{G'(X)}{G(X)} - \frac{F'(X)}{F(X)}\right] \geqslant 0 \text{ 和 } \left[\frac{G'(X)}{G(X)} - \frac{F'(X)}{F(X)}\right]' \geqslant 0.$$

由此若 $G(X)$满足上述条件，则由 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]$生成的不变度量 Y_G 是完备的，而且

$$Y_G \geqslant B_D.$$

例 令 $G(X) = (1 - X)^{-\lambda}$，$\lambda \geqslant \max\{m_1, m_2\}$，则由

$$K[(z,w),\overline{(z,w)}] = (1 - X)^{-\lambda}(1 - |z|^2)^{-N}$$

生成的不变度量 Y_G 是完备的，而且 $Y_G \geqslant B_D$，这里

$$m_1 = \max_{0 \leqslant X < 1}\left\{\frac{F'(X)(1-X)}{F(X)}\right\},$$

$$m_2 = \max_{0 \leqslant X < 1}\left\{\frac{[F(X)F''(X) - F'(X)^2](1-X)^2}{F(X)^2}\right\}.$$

事实上，由计算我们有

$$\frac{G'(x)}{G(X)} - \frac{F'(X)}{F(X)} = \frac{\lambda(1-X)^{-1}F(X) - F'(X)}{F(X)},$$

$$\left[\frac{G'(x)}{G(X)} - \frac{F'(X)}{F(X)}\right]' = \frac{\lambda(1-X)^{-2}F^2(X) - F''(X)F(X) + F'(X)^2}{F^2(X)}.$$

由于 $F(X) > 0 (0 \leqslant X < 1)$，故 $T_g \geqslant 0$ 的充要条件为 $\lambda(1-X)^{-1}F(X) - F'(X) \geqslant 0$ 和 $\lambda(1 - X)^{-2}F^2(X) - F''(X)F(X) + F'(X)^2 \geqslant 0$，即

$$\lambda \geqslant \max_{0 \leqslant X < 1}\left\{\frac{F'(X)(1-X)}{F(X)}\right\} = m_1,$$

$$\lambda \geqslant \max_{0 \leqslant X < 1}\left\{\frac{[F''(X)F(X) - F'(X)^2](1-X)^2}{F^2(X)}\right\} = m_2.$$

由于 $F'(X)$ 和 $F(X)(1-X)^{-1}$ 都是 $(1-X)^{-1}$ 的 $(m+n+1)$ 次的多项式，我们有

$$\lim_{X\to 1}\frac{F'(X)(1-X)}{F(X)} = n+m+1.$$

因此 m_1 存在且有限. 同样理由，m_2 也存在且有限. 因此若 $\lambda \geqslant \max\{m_1, m_2\}$，则 $(1-X)^{-\lambda}(1-|z|^2)^{-N}$ 生成一个不变 Kahler 度量，它是完备的且不小于 Bergman 度量.

V.4. 全纯截曲率的上界

由于 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]_{z=0}$ 能写为

$$\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]_{z=0}$$
$$= -C - \frac{\omega_1[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]}{[K^{-1}(XW'+N_1)|\mathrm{d}z|^2 + W'|\mathrm{d}w|^2 + W''|w\,\mathrm{d}\overline{w}'|^2]^2},$$

这里

$$\omega_1[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$$
$$= P_1^*|\overline{w\,\mathrm{d}w'}|^4 + P_{12}^*|w\,\mathrm{d}\overline{w}'|^2|\mathrm{d}w|^2 + P_2^*|\mathrm{d}w|^4$$
$$+ Q_1^*|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2 + Q_2^*|w\,\mathrm{d}\overline{w}'|^2|\mathrm{d}z|^2 + R^*|\mathrm{d}z|^4,$$

$$P_1^* = -P_1 - C(W'')^2 = \frac{W''}{W'}(XW'+N_1)^{-1}(XW'''+2W'')^2$$
$$+ W^{(4)} - \frac{W'''}{W'}(XW'''+4W'') - C(W'')^2,$$

$$P_{12}^* = -P_{12} - 2CW'W'' = 4W''' - 4\frac{(W'')^2}{W'} - 2CW'W'',$$

$$P_2^* = -P_2 - C(W')^2 = 2W'' - C(W')^2,$$

$$Q_1^* = -Q_1 - 2CK^{-1}(XW'+N_1)W'$$
$$= 4K^{-1}(XW''+W') - 2CK^{-1}(XW'+N_1)W',$$

$$Q_2^* = Q_2 - 2CK^{-1}(XW'+N_1)W''$$
$$= 4K^{-1}[(XW'''+2W'') - (XW'+N_1)^{-1}(XW''+W')^2]$$
$$- 2CK^{-1}(XW'+N_1)W'',$$

$$R^* = -R - CK^{-2}(XW'+N_1)^2$$
$$= 2K^{-1}[(XW'+N_1) + K^{-1}(XW''+W')X]$$
$$- CK^{-2}(XW'+N_1)^2,$$

其中 $C>0$ 为常数.

若我们能证明 $\omega_1[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]\geqslant 0$ 或 $P_1^*\geqslant 0, P_{12}^*\geqslant 0, P_2^*\geqslant 0, Q_1^*\geqslant 0, Q_2^*\geqslant 0, R^*\geqslant 0$，则我们有 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]_{z=0}\leqslant -C$. 我们分下

面几步来证.

V.4.1 令 $G(X)=(1-X)^{-\lambda}$,这里

$$\lambda>0,\lambda\geqslant\max\{m_1,m_2\},$$

则

$$W'=\lambda(1-X)^{-1},\quad W''=\lambda(1-X)^{-2},$$
$$W'''=2\lambda(1-X)^{-3},\quad W^{(4)}=6\lambda(1-X)^{-4},$$

将这些代人 $P_1^*,\cdots,R_1^*$,并令 $\lambda=aN_1$,则我们有下面的V.4.2～V.4.8.

V.4.2 $P_1^*=aN_1(1-x)^{-4}(2-CaN_1)$.

易见,若 $C\leqslant\frac{2}{aN_1}$,则 $P_1^*\geqslant0$.

V.4.3

$$\begin{aligned}P_{12}^*&=8aN_1(1-X)^{-3}-4aN_1(1-X)^{-3}-2Ca^2N_1(1-X)^{-3}\\&=2aN_1(1-X)^{-3}(2-CaN_1).\end{aligned}$$

故若 $C\leqslant2(aN_1)^{-1}$,我们也有 $P_{12}^*\geqslant0$.

V.4.4 $$\begin{aligned}P_2^*&=2aN_1(1-X)^{-2}-4(aN_1)^2(1-X)^{-2}\\&=aN_1(1-X)^{-2}(2-CaN_1).\end{aligned}$$

同样若 $C\leqslant2(aN_1)^{-1}$,也有 $P_2^*\geqslant0$.

V.4.5 $$\begin{aligned}Q_1^*=2K^{-1}aN_1(1-X)^{-1}[&(2-CaN_1)(1-X)^{-1}\\&-CN_1(1-a)].\end{aligned}$$

令 $y=(1-X)^{-1}$,则 $X\in[0,1)$,我们有 $y\in[1,\infty)$.令

$$f(y)=(2-CaN_1)y-CN_1(1-a),$$

则若 $C\leqslant2(aN_1)^{-1}$,则 $f(y)$是增函数,其在$[1,\infty)$上的最小值为 $f(1)$. 但 $f(1)=2-CN_1$,所以若 $a\geqslant1$,则在$[1,\infty)$上我们有 $f(y)\geqslant0$. 但 $Q_1^*=2K^{-1}aN_1yf(y)$,所以我们有

$$Q_1^*\geqslant0,若\ a\geqslant1,C\leqslant\frac{2}{aN_1}.$$

V.4.6

$$\begin{aligned}Q_2^*=2K^{-1}(XW'+N_1)^{-1}(1-X)^{-2}aN_1^2\{&(1-X)^{-2}[2a-Ca^2N_1]\\&+(1-X)^{-1}[4(1-a)-2CaN_1(1-a)]-C(1-a)^2N_1\}.\end{aligned}$$

令 $y=(1-X)^{-1}$,则 $y\in[1,\infty)$.令

$$f(y)=(2a-Ca^2N_1)y^2+2(1-a)(2-CaN_1)y-C(1-a)^2N_1,$$

则

$$f'(y)=2(2a-Ca^2N_1)y+2(1-a)(2-CaN_1).$$

当 $y_0=\frac{a-1}{a}-1-\frac{1}{a}$ 时，$f'(y_0)=0$. 若 $C\leqslant\frac{2}{aN_1}$，则 $f(y)$ 有一个最小值 $f(y_0)=-2a^{-1}(a-1)^2<0$. 同时 $f(y)$ 有两个根：

$$y_1=(1+\sqrt{2})(a-1)(2-CaN_1),\ y_2=(1-\sqrt{2})(a-1)(2-CaN_1).$$

故若 $y\in[y_0,y_1]$，则 $f(y)\leqslant 0$. 但若 $y\in[y_1,\infty)$，则 $f(y)\geqslant 0$ ($C\leqslant 2(aN_1)^{-1}, a>1$). 因而

$$Q_2^*\geqslant 0,\quad 若\ y=(1-X)^{-1}\in[y_1,\infty), C\leqslant 2(aN_1)^{-1}, a>1,$$

$$Q_2^*\leqslant 0,\quad 若\ y=(1-X)^{-1}\in[y_0,y_1], C\leqslant 2(aN_1)^{-1}, a>1,$$

所以现在我们考虑 $y=(1-X)^{-1}\in[y_0,y_1]$. 因为 $X\geqslant 0$，所以我们只考虑 $y=(1-X)^{-1}\in[1,y_1]$. 此时

$$Q_2^*|\mathrm{d}z|^2|w\overline{\mathrm{d}w}'|^2\leqslant Q_2^*|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2|w|^2, 若\ y\in[1,y_1).$$

因而，若 $(1-X)^{-1}\in[1,y_1)$，我们有

$$\begin{aligned}Q_2^*|w\overline{\mathrm{d}w}'||\mathrm{d}z|^2+Q_1^*|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2 &\geqslant Q_2^*|w|^2|\mathrm{d}w|^2|\mathrm{d}z|^2\\ &\quad +Q_1^*|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2\\ &=Q_2^*X|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2+Q_1^*|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2\\ &=(Q_2^*X+Q_1^*)|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2.\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}Q_1^*+Q_2^*X &=4K^{-1}(XW'+N_1)^{-1}(1-X)^{-2}aN_1\\ &\times\left\{\frac{(2-CaN_1)}{2}[a(1-X)^{-2}-2(a-1)(1-X)^{-1}+a-1]+\frac{(a-1)}{2}CN_1\right\}.\end{aligned}$$

令 $y=(1-X)^{-1}$，则 $y\in[1,\infty)$. 令 $f_1(y)=ay^2-2(a-1)y+a-1$，则 $f_1'(y)=2ay-2(a-1)$. 故 $f_1'(y)$ 在 $[1,y_1]$ 上递增. 但 $f'(1)=2>0$，故在 $[1,y_1]$ 上 $f_1'(y)>0$. 这表示 $f_1(y)$ 在 $[1,y_1]$ 上递增. 但 $f_1(1)=1$，因而在 $[1,y_1)$ 上 $f_1(y)\geqslant 1>0$. 所以我们得到

$$Q_1^*+Q_2^*X>0, 若\ C\leqslant\frac{2}{aN_1}, a>1.$$

V.4.7

$$\begin{aligned}R^*=K^{-2}N_1a\{&(1-X)^{-2}(2-CaN_1)+(1-X)^{-1}2(K-1\\ &+CN_1(a-1))+\left(1-\frac{1}{a}\right)[-2K-C(a-1)N_1]\}.\end{aligned}$$

令 $y=(1-X)^{-1}$，则 $y\in[1,\infty)$. 再令

$$\begin{aligned}f(y)=&(2-CaN_1)y^2+2(K-1+CN_1(a-1))y\\ &+(1-\frac{1}{a})[-2K-C(a-1)N_1],\end{aligned}$$

则 $R^* = K^{-2}aN_1 f(y)$. 若在$[1,\infty)$上 $f(y) \geqslant 0$,则对 $0 \leqslant X < 1$ 有 $R^* \geqslant 0$.但 $f'(y) = 2(2 - CaN_1)y + 2(K - 1 + CaN_1 - CN_1)$. 若 $C \leqslant 2(aN_1)^{-1}$,则 $f'(y)$在$[1,\infty)$上递增. $f'(1) = 2(K + 1 - CN_1) \geqslant 0$, 若 $C \leqslant \frac{k+1}{N_1}$. 但 $f(1) = \frac{1}{a}(2K - CN_1) \geqslant 0$, 若 $C \leqslant \frac{2K}{N_1}$. 因此有,若 $C \leqslant \min\left\{\frac{2K}{N_1}, \frac{K+1}{N_1}, \frac{2}{aN_1}\right\}$,则 $f(y) \geqslant 0$, 即 $R^* \geqslant 0$.

V.4.8 最后,从 V.4.2~V.4.7,我们有

$$\omega_1[(z,w), \mathrm{d}(z,w)] \geqslant 0, \text{若 } C \leqslant \min\left\{\frac{2K}{N_1}, \frac{K+1}{N_1}, \frac{2}{aN_1}\right\},$$

$$a \geqslant \max\left\{\frac{m_1}{N_1}, \frac{m_2}{N_1}, 1\right\}.$$

V.4.9 因此,由$(1 - X)^{-aN_1}(1 - |z|^2)^{-N}$生成的不变 Kähler 度量 Y_G 是完备的而且不小于 Bergman 度量 B_D,且若

$$0 < C \leqslant \min\left\{\frac{2K}{N_1}, \frac{K+1}{N_1}, \frac{2}{aN_1}\right\}, a \geqslant \max\left\{\frac{m_1}{N_1}, \frac{m_2}{N_1}, 1\right\},$$

则 Y_G 的全纯截曲率的上界为一个负常数$(-C)$. 从[Hei]可知存在一个正常数 C^*,使得有 $Y_G \leqslant C^* K_D$ 成立,这里 K_D 是 $E(m,n,K)$的 Kobayashi 度量,因而

$$B_D \leqslant C^* K_D.$$

这样就证明了主要定量(比较定理).

本节内容取自文[YW33,YW38,YW39,YW47].

Ⅵ. 一类蛋型域的 Einstein - Kahler 度量的显表达式

由于广义相对论的兴趣,具有 Ricci 曲率为常数的度量显得特别重要. 长期以来,我们所知道的例子仅仅是那些紧致李群可递的作用于其上的流形,也就是齐性形[Yau]. 丘成桐和郑绍远在文[ChY]中证明:任何 $\mathbf{C}^n$ 中的 c^2 有界拟凸域存在一个具有负 Ricci 曲率的 Einstein - Kahler 度量. 莫毅明和丘成桐在文[MoY]中将此结果推广到 $\mathbf{C}^n$ 中的任意有界拟凸域. 但是,仅在非常简单的情况下,我们才知道其度量的显表达式. 本节我们对如下的域 D_0 给出其 Ricci 曲率为 -1 的 Einstein - Kahler 度量的显表达式:

$$D_0 = D_0(K) = \{Z = (z_1, z) \in \mathbf{C}^n : |z_1|^{2K} + |z|^2 < 1,$$
$$0 < K \neq 1, z_1 \neq 0\}.$$

而且对如下的蛋型域 D 给出具有奇点的 Einstein - Kahler 度量的显式表达：

$$D = D(K) = \{Z = (z_1, z) \in \mathbf{C}^n : |z_1|^{2K} + |z|^2 < 1, 0 < K \neq 1\}$$

这里 $\quad z = (z_2, z_3, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$.

Ⅵ.1. EINSTEIN - KAHLER 度量

这里我们主要证明如下的

定理 1. 令

$$K(z, \bar{z}) = (n+1)^n K^2 \rho^{-(n+1)} |z_1|^{2(K-1)},$$

$$T = T(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \right),$$

这里

$$\rho = 1 - |z|^2 - c|z_1|^{2K}, \ 0 < c \leqslant 1,$$

则

$$ds^2 = dz T(z, \bar{z}) \overline{dz}'$$

是域 D_0 的 Ricci 曲率为 -1 的 Einstein-Kahler 度量.

证：众所周知，我们只要证明有

$$\det T = K(z, z).$$

1. $\ln K(z, \bar{z}) = \ln (n+1)^n K^2 - (n+1) \ln \rho + (K-1) \ln |z_1|^2$

$$\frac{\partial \ln K(z, \bar{z})}{\partial z_\alpha} = \begin{cases} (n+1) K c \bar{z}_1^K z_1^{K-1} \rho^{-1} + (K-1) z_1^{-1} & \alpha = 1 \\ (n+1) \bar{z}_\alpha \rho^{-1} & \alpha \neq 1 \end{cases},$$

$$\frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = \frac{n+1}{\rho^2} K^2 c |z_1|^{2(k-1)} (1 - |z|^2),$$

$$\frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z_1 \partial \bar{z}_\beta} = \frac{n+1}{\rho^2} Kc |z_1|^{2(k-1)} \bar{z}_1 z_\beta, \beta \neq 1$$

$$\frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha} = \frac{n+1}{\rho^2} (\rho + |z_\alpha|^2), \quad \alpha \neq 1$$

$$\frac{\partial^2 \ln K(z, z)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = \frac{n+1}{\rho^2} \bar{z}_\alpha z_\beta, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha \neq 1, \beta \neq 1.$$

所以我们有

$$T = \frac{n+1}{\rho^2} \begin{pmatrix} cK^2 |z_1|^{2(K-1)} (1 - |z|^2), & cK |z_1|^{2(K-1)} z_1 \bar{z} \\ cK |z_1|^{2(K-1)} \bar{z}_1 z', & \rho + \bar{z}' z \end{pmatrix}.$$

2. 令

$$J=\begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix},\quad \begin{aligned} &J_{11}=e^{i\theta}(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2K}},\\ &J_{21}=e^{i\theta}K^{-1}z_1\bar{z}'(1-|z|^2)^{-1-\frac{1}{2K}},\\ &J_{22}=e^{i\theta}(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}}Q_z,\ Q_z\overline{Q}_z{}'=(I-\bar{z}'z)^{-1}, \end{aligned}$$

$$T^0=\begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & K^{-1}G_2 I^{(n-1)} \end{bmatrix},\qquad \begin{aligned} &G_2=(n+1)K\rho^{-1}(1-|z|^2),\\ &G_1=(n+1)K^2c\rho^{-2}|z_1|^{2(K-1)}\\ &\qquad\times(1-|z|^2)^{1+\frac{1}{K}}. \end{aligned}$$

这样我们有

$$T=JT^0J'.$$

3. 由计算我们有

$$\det T=\det(J\bar{J})\det T^0\cdot K(z,\bar{z}).$$

定理1证毕.

注： 1. 上述 ds^2 在 D_0 上以及在 $D(K)$ 上都是不完备的；

2. 下列映射组成域 $D(K)$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(D)$（见文[YW35, YW36]）：

$$\begin{cases} \omega_1=e^{i\theta}z_1(1-|\alpha|^2)^{\frac{1}{2K}}(1-\bar{\alpha}z')^{-\frac{1}{K}},\\ \omega=(\omega_2,\cdots,\omega_n)=e^{i\varphi}(1-|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}(z-\alpha)Q_\alpha(1-\bar{\alpha}z')^{-1}. \end{cases}$$

这里 $\theta,\varphi\in\mathbf{R}$, $i=\sqrt{-1}$, $\alpha=(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{C}^{n-1}$, $|\alpha|^2<1$,

$$Q_\alpha\overline{Q}'_\alpha=(I-\bar{\alpha}'\alpha)^{-1}.$$

这样对 $D(K)$ 中的任何一点 (z_1,α)，存在上述映射 f，使得 $f(z_1,\alpha)=(w_1,0)$，而且对任何 $f\in\mathrm{Aut}(D)$，我们总有 $f(S)=S$. 因此有 $\mathrm{Aut}(D)\subsetneqq\{\mathrm{Aut}(D_0)\}$.

Ⅵ.2 全纯截曲率

令

$$X=|z_1|^2/(1-|z|^2)^{1/K},\ G(X)=(n+1)^nK^2\lambda^{-(n+1)}X^{-(nK+1)},$$

$$\lambda=X^{-K}-c,\ W=\ln G(X),\ W'=\frac{dW}{dX},\ W''=\frac{d^2W}{dX^2}.$$

则我们有

$$K(z,\bar{z})=G(X)(1-|z|^2)^{-(nK+1)/K},$$

$$T=T(z,\bar{z})=J\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & K^{-1}G_2I^{(n-1)} \end{pmatrix}J'.$$

这里

$$G_2 = XW' + nK + 1 = (n+1)K\lambda^{-1}X^{-K},$$

$$G_1 = \frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}X} = XW'' + W' - (n+1)K^2c\lambda^{-2}X^{-K-1},$$

这样我们有

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \overline{T}'_{12} & T_{22} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} T_{11} &= (XW'' + W')(1-|z|^2)^{-1/K}, \\ T_{12} &= K^{-1}(XW'' + W')(1-|z|^2)^{-\frac{1}{K}-1}\bar{z}_1 z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{22} = {} & K^{-2}(XW'' + W')|z_1|^2(1-|z|^2)^{-\frac{1}{K}-2}\bar{z}'z \\ & + K^{-1}(XW' + nK + 1)(1-|z|^2)^{-1}(I - \bar{z}'z)^{-1}. \end{aligned}$$

令 $\omega(Z,\mathrm{d}Z)$表示域 $D_0(K)$在 Einstein - Kahler 度量 $\mathrm{d}s^2$ 下的全纯截曲率.由定义,我们有

$$\omega(Z,\mathrm{d}Z) = \mathrm{d}Z(-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T + \mathrm{d}T\cdot T^{-1}\overline{\mathrm{d}T'})\overline{\mathrm{d}Z'}(\mathrm{d}Z\cdot T\,\overline{\mathrm{d}Z'})^{-2}.$$

$$\mathrm{d}T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}T_{11} & \mathrm{d}T_{12} \\ \mathrm{d}\overline{T}'_{12} & \mathrm{d}T_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T = \begin{pmatrix} \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{11} & \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12} \\ \mathrm{dd}T_{12} & \mathrm{dd}T_{22} \end{pmatrix}.$$

下面我们计算 $\omega(Z,\mathrm{d}Z)$在域 $D_0(K)$的点$(z_1,0)$处的值.

1. $$\mathrm{d}T_{11} = \frac{\partial T_{11}}{\partial z_1}\mathrm{d}z_1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial T_{11}}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j.$$

但是

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial z_1} = {} & (1-|z|^2)^{-1/K}(XW''' + 2W'')\frac{\partial X}{\partial z_1} \\ & - (1-|z|^2)^{-2/K}\times(XW''' + 2W'')\bar{z}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial z_j}\bigg|_{j\neq 1} = {} & K^{-1}(1-|z|^2)^{-\frac{1}{K}-1}\bar{z}_j(XW'' + W') \\ & + (1-|z|^2)^{-1-\frac{2}{k}}(XW''' + 2W'')K^{-1}|z_1|^2\bar{z}_j. \end{aligned}$$

这样我们有

$$\mathrm{d}T_{11}|_{(z_1,0)} = (XW''' + 2W'')\bar{z}_1\mathrm{d}z_1. \tag{3.6.1}$$

由于

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{11} = {} & \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial\bar{z}_1\partial z_1}\mathrm{d}z_1\bar{\mathrm{d}}z_1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial\bar{z}_j\partial z_1}\mathrm{d}z_1\bar{\mathrm{d}}z_j \\ & + \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial\bar{z}_1\partial z_j}\mathrm{d}z_j\bar{\mathrm{d}}z_1 + \sum_{l=2}^{n}\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial\bar{z}_l\partial z_j}\mathrm{d}z_j\bar{\mathrm{d}}z_l\right], \end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial\bar{z}_1\partial z_1}\bigg|_{(z_1,0)} &= (XW''' + 2W'') + (XW^{(4)} + 3W''')|z_1|^2 \\ &= [XW''' + 2W'' + (XW^{(4)} + 3W''')X]|_{(z_1,0)}, \end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_j}\right|_{(z_1,0)} = 0 (j \neq 1), \quad \left.\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial \bar{z}_j \partial z_1}\right|_{(z_1,0)} = 0 (j \neq 1),$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}\right|_{(z_1,0)} = [K^{-1}(XW'' + W') + K^{-1}(XW''' + 2W'')|z_1|^2]_{(z_1,0)}$$

$$= K^{-1}[XW'' + W' + (XW''' + 2W'')X]_{(z_1,0)} (j > 1),$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial \bar{z}_l \partial z_j}\right| = 0 (l \neq j),$$

所以我们有

$$\left.\bar{d} d T_{11}\right|_{(z_1,0)} = [XW''' + 2W'' + (XW^{(4)} + 3W''')X] | dz_1 |^2$$

$$+ K^{-1} \sum_{j=2}^{n} [XW'' + W + (XW''' + 2W'')X] | dz_j |^2$$

$$= [XW''' + 2W'' + (XW^{(4)} + 3W''')X] | dz |^2$$

$$+ K^{-1}[XW'' + W' + (XW'' + 2W'')X] dz \bar{d} z'. \tag{3.6.2}$$

2. $$dT_{12} = \frac{\partial T_{12}}{\partial z_1} dz_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial T_{12}}{\partial z_j} dz_j.$$

但是

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial z_1} = K^{-1}(XW''' + 2W'')(1 - |z|^2)^{-\frac{2}{K}-1} z_1^2 z,$$

$$\left.\frac{\partial T_{12}}{\partial z_j}\right|_{j \neq 1} = K^{-2}(XW''' + 2W'')|z_1|^2(1 - |z|^2)^{-\frac{2}{K}-2} \bar{z}_1 \bar{z}_j z$$

$$+ K^{-2}(K + 1)(XW'' + W')(1 - |z|^2)^{-\frac{1}{K}-2} \bar{z}_1 \bar{z}_j z$$

$$+ K^{-1}(XW'' + W')(1 - |z|^2)^{-\frac{1}{K}-1} z_1 e_j.$$

这里

$$e_j = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

所以我们有

$$\left.dT_{12}\right|_{(z_1,0)} = K^{-1}(XW'' + W') \bar{z}_1 dz. \tag{3.6.3}$$

由于

$$\bar{d} d T_{12} = \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} | dz_1 |^2 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_j \partial z_1} dz_1 dz_j$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_j} \bar{d} z_1 dz_j + \sum_{l=2}^{n} \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial \bar{z}_l \partial z_j} dz_j \bar{d} z_l \right],$$

以及

$$\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial\bar z_1\partial z_1}\Big|_{(z_1,0)} = 0,\quad \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial\bar z_j\partial z_1}\Big|_{(z_1,0)} = 0,\quad \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z_j\partial \bar z_l}\Big|_{(z_1,0)} = 0\ (j\neq 1),$$

$$\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial\bar z_l\partial z_j}\Big|_{(z_1,0)} = K^{-1}(XW''+W')e_j + K^{-1}(XW'''+2W'')|z_1|^2 e_j$$

$$= K^{-1}[XW''+W'+(XW'''+2W'')X]_{(z_1,0)}\, e_j\ (l\neq 1).$$

所以我们有

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}\Big|_{(z_1,0)} = K^{-1}[XW''+W'+(XW'''+2W'')X]_{(z_1,0)}\bar{\mathrm{d}}z_1\mathrm{d}z. \quad (3.6.4)$$

3. $$\mathrm{d}T_{22} = \frac{\partial T_{22}}{\partial z_1}\mathrm{d}z_1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial T_{22}}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j.$$

$$\mathrm{d}T_{22}\Big|_{(z_1,0)} = K^{-1}(XW''+W')\bar z_1\mathrm{d}z_1 I^{(n-1)}, \quad (3.6.5)$$

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{22}\Big|_{(z,0)} = \{K^{-2}(XW''+W')|z|^2\bar{\mathrm{d}}z'\mathrm{d}z$$
$$+ K^{-1}\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}[(XW'+nK+1)(1-|z|^2)^{-1}]I^{(K-1)}$$
$$+ K^{-1}(XW'+nK+1)\bar{\mathrm{d}}z'\mathrm{d}z\}_{(z_1,0)}.$$

但是

$$\mathrm{d}[(XW'+nK+1)(1-|z|^2)^{-1}] = (1-|z|^2)^{-1-\frac{1}{K}}(XW''+W')\bar z_1\mathrm{d}z_1$$
$$+ \sum_{j=2}^{k}[(XW'+nK+1)|z_1|^2K^{-1}\bar z_j(1-|z|^2)^{-2-\frac{1}{K}}$$
$$+ (XW'+nK+1)(1-|z|^2)^{-2}\bar z_j]\mathrm{d}z_j.$$

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}[(XW'+nK+1)(1-|z|^2)^{-1}]_{(z_1,0)} = (XW''+W')|\mathrm{d}z_1|^2$$
$$+ (XW'''+2W'')|z_1|^2|\mathrm{d}z_1|^2 + \sum_{j=2}^{n}[(XW''+W')|z_1|^2K^{-1}\overline{\mathrm{d}z_j}$$
$$+ (XW'+nK+1)\overline{\mathrm{d}z_j}]\mathrm{d}z_j$$
$$= [XW''+W'+(XW'''+2W'')X]|\mathrm{d}z_1|^2$$
$$+ \sum_{j=2}^{n}[K^{-1}(XW''+W')X+(XW'+nK+1)]|\mathrm{d}z_j|^2$$
$$= [XW''+W'+(XW'''+2W'')X]|\mathrm{d}z_1|^2$$
$$+ [K^{-1}(XW''+W')X+(XW'+nK+1)]\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z}'.$$

所以我们有

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{22}\Big|_{(z_1,0)} = [K^{-2}(XW''+W')X + K^{-1}(XW'+nK+1)]\overline{\mathrm{d}z}'\mathrm{d}z$$
$$+ K^{-1}[XW''+W'+(XW'+nK+1)X]|\mathrm{d}z_1|^2 I^{(n-1)}$$
$$+ K^{-1}[K^{-1}(XW''+W')X$$

$$+(XW'+nK+1)]\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z}'I^{(n-1)}. \tag{3.6.6}$$

4. 从(6.6.1),(6.6.3)和(6.6.5)我们有

$$\mathrm{d}T\Big|_{(z,0)}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}T_{11} & \mathrm{d}T_{12}\\ \mathrm{d}\overline{T}_{12} & \mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix}_{(z_1,0)}$$

$$=\begin{pmatrix}(XW''+2W'')\bar{z}_1\mathrm{d}z_1 & K^{-1}(XW''+W')\bar{z}_1\mathrm{d}z\\ 0 & K^{-1}(XW''+W')z_1\mathrm{d}z_1I^{(n-1)}\end{pmatrix}.$$

由于

$$T\Big|_{(z_1,0)}=\begin{pmatrix}XW''+W' & 0\\ 0 & K^{-1}(XW'+nK+1)I^{(n-1)}\end{pmatrix},$$

因而得到

$$T^{-1}\Big|_{(z_1,0)}=\begin{pmatrix}(XW''+W')^{-1} & 0\\ 0 & K(XW'+nK+1)^{-1}I^{(n-1)}\end{pmatrix}.$$

令

$$[\mathrm{d}T\cdot T^{-1}\overline{\mathrm{d}T}']_{(z_1,0)}=\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix},$$

则我们有

$$t_{11}=(XW''+W')^{-1}(XW'''+2W'')^2X|\mathrm{d}z_1|^2$$
$$+K^{-1}(XW'+nK+1)^{-1}(XW''+W')^2X\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z}',$$
$$t_{12}=K^{-1}(XW'+nK+1)^{-1}(XW''+W')^2X\,\overline{\mathrm{d}z}_1\mathrm{d}z,\quad t_{21}=\bar{t}'_{12},$$
$$t_{22}=K^{-1}(XW'+nK+1)^{-1}(XW''+W')^2X|\mathrm{d}z_1|^2I^{(n-1)}.$$

5. 令

$$[-\bar{\partial}\mathrm{d}T+\mathrm{d}T\cdot T^{-1}\overline{\mathrm{d}T}']_{(z_1,0)}=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}.$$

则由(6.6.2),(6.6.4)和(6.6.6)我们有

$$R_{11}=[-\bar{\partial}\mathrm{d}T_{11}+t_{11}]_{(z_1,0)}=[(XW''+W')^{-1}(XW'''+2W'')^2$$
$$\times X(XW'''+2W'')-(XW^{(4)}+3W''')X]|\mathrm{d}z_1|^2$$
$$+K^{-1}[(XW'+nK+1)^{-1}(XW''+W')^2X$$
$$-(XW''+W')-(XW'''+2W'')X]\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}z}',$$

$$R_{12}=[-\bar{\partial}\mathrm{d}T_{12}+t_{12}]_{(z_1,0)}=K^{-1}[(XW'+nK+1)^{-1}$$
$$\times(XW''+W')^2X-(XW''+W')-(XW'''+2W'')X]\overline{\mathrm{d}z}_1\mathrm{d}z,$$

$$R_{22}=[-\bar{\partial}\mathrm{d}T_{22}+t_{22}]_{(z_1,0)}=K^{-1}[(XW'+nK+1)^{-1}(XW''+W')^2X$$
$$-(XW''+W')-(XW'''+2W'')X]|\mathrm{d}z_1|^2I$$
$$-K^{-1}[K^{-1}(XW''+W')X+XW'+nK+1]\overline{\mathrm{d}z}'\mathrm{d}z$$

$$-K^{-1}[K^{-1}(XW''+W')X+XW'+nK+1](dz\,\overline{dz}')I^{(n-1)},$$

$R_{21}=\bar{R}'_{12}$,

$$
\begin{aligned}
&dZ[-dd T+dT\cdot T^{-1}dT']dZ'\big|_{(z_1,0)}\\
&=(dz_1,dz)\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ \bar{R}'_{12} & R_{22}\end{pmatrix}\overline{(dz_1,dz)}'\\
&=R_{11}|dz_1|^2+dz\bar{R}'_{12}d\bar{z}_1+dz_1R_{12}d\bar{z}'+dzR_{22}d\bar{z}'\\
&=P|dz_1|^4+Q|dz_1|^2dz\,\overline{dz}'+R(dz\,\overline{dz}')^2.
\end{aligned}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
P&=(XW''+W')^{-1}(XW'''+2W'')^2X\\
&\quad-(XW'''+2W'')-X(XW'''+2W'')',\\
Q&=4K^{-1}(XW'+nK+1)^{-1}(XW''+W')^2X\\
&\quad-(XW''+W')-X(XW'''+2W''),\\
R&=-2K^{-1}[K^{-1}(XW''+W')X+XW'+nK+1].
\end{aligned}
$$

同时

$$(dZ\cdot T\,dZ')|_{(z_1,0)}=(XW''+W')|dz_1|^2+K^{-1}(XW'+nK+1)dz\,\overline{dz}'.$$

因此，最后我们得到 $\omega(Z,dZ)$ 在点 $(z_1,0)$ 处的表示式：

$$\omega(Z,dZ)|_{(dz_1,0)}=[P|dz_1|^4+Q|dz_1|^2dz\,\overline{dz}'+R(dz\,\overline{dz}')^2]\cdot[(XW''+W')|dz_1|^2+K^{-1}(XW'+nK+1)dz\,\overline{dz}']^{-2}.$$

6. 从 VI.2 的开头处，我们得知

$$
\begin{aligned}
&W=\ln G(X)-\ln(n+1)^nK^2-(n+1)\ln\lambda-(nK+1)\ln X,\\
&\lambda=X^{-K}-c,\quad X=|z_1|^2(1-|z|^2)^{-1/K},\quad 0<c\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

由计算，我们有

$$
\begin{aligned}
&XW'+nK+1=(n+1)K\lambda^{-1}X^{-K},\\
&XW''+W'=(XW'+nK+1)'=(n+1)K^2c\lambda^{-2}X^{-K-1},\\
&XW'''+2W''=(XW''+W')'\\
&\qquad=(n+1)K^2c\lambda^{-3}X^{-K-2}[(K-1)X^{-K}+(K+1)c],\\
&(XW^{(4)}+3W''')=(XW'''+2W'')'\\
&\qquad=-(n+1)K^2c\lambda^{-4}X^{-K-3}[(K-1)(K-2)X^{-2K}\\
&\qquad\quad+4c(K^2-1)X^{-K}+c^2(K+1)(K+2)].
\end{aligned}
$$

所以我们有

$$
\begin{aligned}
&P|dz_1|^4+Q|dz_1|^2(dz\,\overline{dz}')+R(dz\,\overline{dz}')^2\\
&=-2(n+1)\lambda^{-2}X^{-2K}[K^2\lambda^{-1}X^{-1}c|dz_1|^2+dz\,\overline{dz}']^2.\\
&[(XW''+W')|dz_1|^2+K^{-1}(XW'+nK+1)dz\,\overline{dz}']^2
\end{aligned}
$$

$$= (n+1)^2\lambda^{-2}X^{-2K}[K^2\lambda^{-1}X^{-1}c|dz_1|^2 + dz\,\overline{dz}']^2.$$

最后,我们有

$$\omega(Z,dZ)\Big|_{(z_1,0)} = \frac{2}{n+1}.$$

由于对任何$(z_1,\alpha)\in D_0(K)$,存在$f\in \mathrm{Aut}(D_0)$使得$f(z_1,\alpha)=(w_1,0)$,同时全纯截曲率在双全纯映射下是不变的.因此,$D_0(K)$的全纯截曲率等于常数$-2(n-1)^{-1}$.此即下列定理成立.

定理 2. $D_0(K)$在 Einstein-Kahler 度量 ds^2(见定理 1)下,其全纯截曲率等于常数$-2(n-1)^{-1}$.

本节内容取自文[YW34,YW40,YWA].

原书空白页

第四章

华罗庚域

原书空白页

第四章　华罗庚域

这一章讨论华罗庚域. 上面几章讨论的 Cartan 域，Reinhardt 域和 Siegel 域都冠以外国人的名字，也都是外国人引进的. 而现在我们在自己引进的域上进行研究，这也是一大创新. 作者之所以称其为华罗庚域，第一是为了纪念华罗庚在我国开创了多复变函数论的研究，第二是因为在计算华罗庚域的 Bergman 核函数的时候，用到了华罗庚在四类典型域上的积分. 这种积分分别书写在华罗庚的经典著作《多复变函数论中的典型域上的调和分析》一书中的第 28、30、33 和 35 页上. 当时华罗庚在计算典型域的体积时用到了该积分，以后作者就一直没有发现它的其他用途. 而我们在计算华罗庚域的 Bergman 和函数的显表达式时却非用此积分不可. 华罗庚域是我们自己引进的，我们为自己开创了一个研究的新领域. 以往国人虽然做了很多出色的研究工作，但大多是在外国人开创的领域上进行的. 这好比演员有了一个自己的舞台和演出场所，不必借用别人的舞台和演出场所了. 不但如此，现在我发现一些外国人例如法国教授 G. Roos 也在我们开创的领域上进行研究. 作者认为只有让国外数学家在我们自己开创的领域中进行研究，研究我国数学家提出的 Open Problem，解决我国数学家提出的 Conjecture，领导国际数学发展的新潮流，这才算一个数学强国. 数学上创新的根本意义也在于此. 而现在我国的数学研究状况基本上还属于在外国数学家提出的研究领域中进行研究，研究外国人提出的问题和猜想. 与数学强国的地位还相差甚远. 作者并不是反对研究外国数学家提出的研究领域、问题及猜想，而是认为要在此基础上更进一步，要有我国自己的特色，更不要丢掉我国的传统的强项. 千万不要有那种认为洋人提的问题才高级而对国人提出的问题不作分析就不屑一顾的不正确的思想和行为.

I. 第一类 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核函数的显表达式

1998 年 2 月，当殷慰萍在法国高等科学研究院(IHES)访问时，与 G. Roos 引进了如下相应于 Cartan 域的四类域，称之为超 Cartan 域或 Cartan-Hartogs 域：

$$Y_{\mathrm{I}}(N,m,n;K):=\{W\in\mathbf{C}^N,Z\in R_{\mathrm{I}}(m,n):|W|^{2K}$$
$$<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}),K>0\},$$
$$Y_{\mathrm{II}}(N,p;K):=\{W\in\mathbf{C}^N,Z\in R_{\mathrm{II}}(p):|W|^{2K}$$
$$<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}),K>0\},$$
$$Y_{\mathrm{III}}(N,q;K):=\{W\in\mathbf{C}^N,Z\in R_{\mathrm{III}}(q):|W|^{2K}$$
$$<\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}),K>0\},$$
$$Y_{\mathrm{IV}}(N,n;K):=\{W\in\mathbf{C}^N,Z\in R_{\mathrm{IV}}(n):|W|^{2K}$$
$$<1-2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}+|ZZ'|^2,K>0\},$$

这里 $R_{\mathrm{I}}(m,n),R_{\mathrm{II}}(p),R_{\mathrm{III}}(q),R_{\mathrm{IV}}(n)$分别表示华罗庚意义下的第一,第二,第三,第四类 Cartan 域. $\overline{Z}^{\mathrm{T}}$ 表示 Z 的共轭转置(有时也用$\overline{Z}'$表示,即 $\overline{Z}^{\mathrm{T}}=\overline{Z}'$). det 表示行列式. N,m,n 都是自然数.

易知, $Y_{\mathrm{I}}(1,1,n;K)=E(1,\cdots,1,1/K)$. 而且当 $W=0$ 时, $Y_{\mathrm{I}}(N,m,n;K),Y_{\mathrm{II}}(N,p;K),Y_{\mathrm{III}}(N,q;K)$和 $Y_{\mathrm{IV}}(N,n;K)$就分别变为 $R_{\mathrm{I}}(m,n),R_{\mathrm{II}}(p),R_{\mathrm{III}}(q)$和 $R_{\mathrm{IV}}(n)$.

要算出一般超 Cartan 域的 Bergman 核函数,只要算出 $N=1$ 时相应的超 Cartan 域的 Bergman 核函数就行了. 因为利用膨胀原理,立得一般超 Cartan 域的 Bergman 核函数. 因而下面先考虑 $N=1$ 的情况.

由于这些超 Cartan 域不是齐性域,因而利用全纯自同构群来求 Bergman 核函数的华罗庚方法行不通;同时,由于这些超 Cartan 域也不是 Reinhardt 域,因而不能像对域 $E(1,\cdots,1,p_n)$那样用无穷级数求和的方法来得出 Bergman 核函数的有限和(Finite Sum)的形式. 我们的方法是在这两种方法基础上的创新. 首先,利用全纯自同构群使得计算 Bergman 核函数归结为确定一个群不变函数 $F(Y)$. 然后,引进 semi-Reinhardt 域的概念,利用 semi-Reinhardt 域的完备标准正交函数系,通过无穷级数求和的方法来确定 $F(Y)$.

这里我们详细给出第一类超 Cartan 域的 Bergman 核函数的计算.

1.1. 预备知识

定义 设 D 是$\mathbf{C}^{m+n}$中的包含原点的有界域,若 D 的全纯自同构群包含下列变换

$$\begin{cases} w_j^*=e^{i\theta_j}w_j, j=1,2,\cdots,m; \\ z_k^*=e^{i\theta}z_k, k=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

则称 D 为 semi-Reinhardt 域. 事实上, D 对 w 而言是 Reinhardt 的,对 z 而言是圆型的. 显然, semi-Reinhardt 域一定是圆型域,反之不然.

众所周知,若 D_1 是 $\mathbf{C}^m$ 中的包含原点的 Reinhardt 域,则 $\{w_1^{j_1}\cdots\cdots w_m^{j_m}\}$ 组成 D_1 的完备正交函数系.若 D_2 是 $\mathbf{C}^n$ 中的包含原点的圆型域,则 $\{P_{ki}\}(k=0,1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,m_k;m_k=(n+k-1)!\,[k!\,(n-1)!]^{-1})$ 组成 D_2 的完备正交函数系,其中 P_{ki} 是 $z_1,\cdots,z_n$ 的 k 次齐次多项式,而且对任何固定的 k,以下 m_k 个多项式 $P_{k1},P_{k2},\cdots,P_{km_k}$ 是线性无关的,那么对 $\mathbf{C}^{m+n}$ 中的 semi-Reinhardt 域而言,其完备正交函数系是什么呢?我们有如下

定理 1. 设 D 是 $\mathbf{C}^{m+n}$ 中的 semi-Reinhardt 域,则可选择 $w_1^{j_1}\cdots w_m^{j_m}P_{ki}^{(j)}(z)$ 使得

$$\{w_1^{j_1}\cdots w_m^{j_m}P_{ki}^{(j)}(z)\}$$
$$(j_1,\cdots,j_m,k=0,1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,m_k;$$
$$m_k=(n+k-1)![k!(n-1)!]^{-1})$$

组成 D 的标准完备正交函数系.其中 $P_{ki}^{(j)}(z)$ 是 $z_1,\cdots,z_n$ 的 k 次齐次多项式;而且对任何固定的 k,j,下述 m_k 个多项式 $P_{k1}^{(j)}(z),P_{k2}^{(j)}(z),\cdots,P_{km_k}^{(j)}(z)$ 是线性无关的;$j=(j_1,j_2,\cdots,j_m)$ 表示多重指标.

证:令 $w^j=w_1^{j_1}\cdots w_m^{j_m}$.考虑单项式 $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}$,则满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=k$ 的不同的单项式共有 $m_k=(n+k-1)!\,[k!\,(n-1)!]^{-1}$ 个.这 m_k 个单项式可按某个次序排成一个 m_k 维的行向量:

$$z^{[k]}=(z_1^k,z_1^{k-1}z_2,\cdots,z_n^k).$$

令

$$H_k^{(j)}=\int_D(w^jz^{[k]})'\overline{(w^jz^{[k]})}\mathrm{d}v=\int_D|w^j|^2(z^{[k]})'\overline{(z^{[k]})}\mathrm{d}v.$$

显然,$H_k^{(j)}$ 是一个 m_k 阶正定 Hermitian 矩阵.因此,存在一个非异矩阵 $A_k^{(j)}$ 使得 $H_k^{(j)}=(A_k^{(j)})'\overline{(A_k^{(j)})}$.因此我们有

$$\int_D|w^j|^2[z^{[k]}(A_k^{(j)})^{-1}]'\,\overline{[z^{[k]}(A_k^{(j)})^{-1}]}\mathrm{d}v=I^{(m_k)}.\qquad(*)$$

令

$$(P_{k1}^{(j)}(z),P_{k2}^{(j)}(z),\cdots,P_{km_k}^{(j)}(z))=z^{[k]}(A_k^{(j)})^{-1},$$

则对任意固定的 k,j,下列 m_k 个多项式 $P_{k1}^{(j)}(z),P_{k2}^{(j)}(z),\cdots,P_{km_k}^{(j)}(z)$ 是线性无关的.从式$(*)$可知,对任意固定的 k,j,下列各式

$$w^jP_{k1}^{(j)}(z),w^jP_{k2}^{(j)}(z),\cdots,w^jP_{km_k}^{(j)}(z)$$

是标准正交的. 令 $\Phi_{jkl}(w,z)=w^jP_{kl}^{(j)}(z)$, 要证定理 1, 我们只要证明 $\{\Phi_{jkl}(w,z)\}$ 是 D 的完备标准正交函数系就行. 至此, 其正交性和标准性是显然的. 下面我们证明其完备性.

首先, 任一在 D 全纯的函数 $f(w,z)$ 可以表为 $f(w,z)=\sum b_{jkl}\Phi_{jkl}(w,z)$. 事实上, 由于对任意固定的 z, D 对 w 而言是 Reinhardt 的, 因而 $f(w,z)=\sum b_j(z)w^j$. 但 $b_j(z)$ 是 z 的全纯函数, D 对 z 而言又是圆型的, 故 $b_j(z)=\sum c_{j,k,l}P_{kl}^{(j)}(z)$. 因此

$$f(w,z)=\sum c_{j,k,l}P_{kl}^{(j)}(z)w^j=\sum b_{jkl}\Phi_{jkl}(w,z).$$

要完成完备性的证明, 只要再证明 $b_{jkl}=\int_D f(w,z)\overline{\Phi_{jkl}(w,z)}dV$.

为此我们用一串域 $D_1,D_2,\cdots\cdots$ 逼近 D, 其中 $\overline{D}_r\subset D_{r+1}$. 不妨假定 D_r 都是 semi-Reinhardt 域. 因此, $f(w,z)$ 的展式在 $\overline{D}_r$ 上一致收敛, 而 D_r 为 semi-Reinhardt 域, 因此,

$$\begin{aligned}\int_{D_r}f(w,z)\overline{\Phi_{jkl}(w,z)}\mathrm{d}V&=\int_{D_r}\left[\sum b_{\alpha\beta\gamma}\Phi_{\alpha\beta\gamma}(w,z)\right]\overline{\Phi_{jkl}(w,z)}\mathrm{d}V\\&=\int_{D_r}b_{jkl}\Phi_{jkl}(w,z)\overline{\Phi_{jkl}(w,z)}\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

根据标准正交性, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty}\int_{D_r}b_{jkl}\Phi_{jkl}(w,z)\overline{\Phi_{jkl}(w,z)}\mathrm{d}V\\&=\int_D b_{jkl}\Phi_{jkl}(w,z)\overline{\Phi_{jkl}(w,z)}\mathrm{d}V=b_{jkl}.\end{aligned}$$

命题1. 命 $Z\in R_1(m,n)$, $\lambda>-1$ 以及

$$J_{m,n}=\int_{R_1(m,n)}\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{\lambda}\mathrm{d}V,$$ 则我们有

$$J_{m,n}=\pi^{mn}\left[\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\lambda+j)\prod_{k=1}^{m}\Gamma(\lambda+k)/\left[\prod_{h=1}^{n+m}\Gamma(\lambda+h)\right]\right].\tag{4.1.2}$$

证: 见华罗庚[Hua]第 28 页.

定理 2. 以下变换组成 $Y_1(1,m,n;K)$ 的全纯自同构群, 记之为 $\mathrm{Aut}(Y_1)$:

$$\begin{cases}W^*=e^{i\theta}W\det(I-Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{1/(2K)}\det(I-ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1/K},\\Z^*=A(Z-Z_0)(I-Z_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}D^{-1}.\end{cases}$$

其中 $A^{\mathrm{T}}A=(I-Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{-1}$, $D^{\mathrm{T}}D=(I-Z_0^{\mathrm{T}}Z_0)^{-1}$, $Z_0\in R_1(m,n)$,

$\mathrm{i}=(-1)^{1/2}$.

此变换把(W,Z_0)映为$(W^*,0)$.

证：习知，$Z^*=A(Z-Z_0)(I-Z_0^{\mathrm T}Z)^{-1}D^{-1}$是$R_{\mathrm I}(m,n)$的全纯自同构．由文[Hua]及[Lu2,Lu3]关于典型域的理论易知：

$$I-Z^*Z^{*\mathrm T}=(A^{\mathrm T})^{-1}(I-ZZ_0^{\mathrm T})^{-1}(I-ZZ^{\mathrm T})(I-Z_0Z^{\mathrm T})^{-1}A^{-1}.$$

$$\det(I-Z^*Z^{*\mathrm T})=\det(I-Z_0Z_0^{\mathrm T})|\det(I-ZZ_0^{\mathrm T})|^{-2}\det(I-ZZ^{\mathrm T}).$$

而 $W^*W^{*\mathrm T}=WW^{\mathrm T}\det(I-Z_0Z_0^{\mathrm T})^{1/K}|\det(I-ZZ_0^{\mathrm T})|^{-2/K}$．因此有

$$\det(I-Z^*Z^{*\mathrm T})-|W^*|^{2K}=\det(I-Z_0Z_0^{\mathrm T})|\det(I-ZZ_0^{\mathrm T})|^{-2}\cdot[\det(I-ZZ^{\mathrm T})-|W|^{2K}].$$

这证明了上述变换是$Y_{\mathrm I}(1,m,n;K)$是全纯自同构．

定理 3. 令 $X=X(W,Z)=|W|^2[\det(I-ZZ^{\mathrm T})]^{-1/K}$，则 X 在 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm I})$下不变，即有 $X(W^*,Z^*)=X(W,Z)$．

证：这可以直接计算而得．

令 $Y=Y(W,Z)=(1-X)^{-1}$，则 Y 在 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm I})$下不变，而且任何以 X 为变量的函数$F(X)$都是在$\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm I})$下不变的，对 $F(Y)$亦然．

我们还要下述熟知的命题

命题 2. 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$K_D(Z,Z)$是域 D 的 Bergman 核，$W=f(Z)$是 D 的全纯自同构，则

$$K_D(Z,\overline{Z})=\det(J_f)K_D(W,W)\det(J_f)^{\mathrm T}. \tag{4.1.3}$$

其中(J_f)表示在变换 $W=f(Z)$下的函数方阵．

证：这在一般的多复变的书中都可找到．

定理 4. 设 $P(x)$是 x 的 n 次多项式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \tag{4.1.4}$$

则 $P(x)$总可改写成如下形式：

$$\begin{aligned}P(x)&=b_n(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)\\&\quad+b_{n-1}(x+n-1)\cdots(x+1)\\&\quad+\cdots+b_1(x+1)+b_0\\&=\sum\nolimits_{j=0}^{n}b_j\Gamma(x+j+1)/\Gamma(x+1)\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

其中

$$b_n=a_n,b_0=P(-1). \tag{4.1.6}$$

证：容易用归纳法证之．

易见，

$$b_1=[(P(x)-b_0)/(x+1)]|_{x=-2}=(P(-2)-b_0)/(-1).$$

一般而言，我们有

$$b_j = \{(P(x) - [b_0 + b_1(x+1) + \cdots + b_{j-1}(x+j-1) \cdot (x+j-2)\cdots(x+1)])[(x+j)(x+j-1)\cdots \cdot (x+1)]^{-1}\}|_{x=-(j+1)}$$

$$= [P(-j-1) - \sum_{k=0}^{j-1} b_k(-1)^k\Gamma(j+1) / \Gamma(j-k+1)] / [(-1)^j\Gamma(j+1)]. \tag{4.1.7}$$

这就是递推公式，在求得了 $b_0, b_1, \cdots, b_{j-1}$后就可按递推公式求得 b_j.

我们经常要用到下述“膨胀原理”：设 D 是 $\mathbf{C}^{n+1}$中的有界完备 Hartogs 域，由不等式$|\zeta|^2 < \phi(z)$所界定，这里 $\zeta \in \mathbf{C}, z \in \mathbf{C}^n$，而 $\phi(z)$在 $\mathbf{C}^n$ 中的某一个有界域的内部是有界的正的和连续的函数；G 是 $\mathbf{C}^{n+m}$ 中的由不等式$|Z|^2 < \phi(z)$所界定的域，这里

$$Z = (Z_1, \cdots, Z_m), |Z|^2 = |Z_1|^2 + \cdots + |Z_m|^2.$$

由于存在函数 $L(z, w, s)$，使得 D 的 Bergman 核函数 $K_D(z, \zeta; w, \eta)$能表为 $L(z, w, \zeta\overline{\eta})$，因而域 G 的 Bergman 核函数 $K_G(z, Z; w, W)$能由下列关系式给出：

$$K_G(z, Z, w, W) = \pi^{-(m-1)}[\partial^{m-1}L(z, w, s)/\partial s^{m-1}]_{s=\langle Z, W\rangle},$$

这里$\langle Z, W\rangle = Z_1\overline{W}_1 + \cdots + Z_m\overline{W}_m$. 此原理见文献[BFS].

I. 2. Bergman 核函数

现在我们计算出第一类超 Cartan 域 $Y_{\mathrm{I}}(1, m, n; K)$的 Bergman 核函数. 设$(W^*, Z^*) = f(W, Z) \in \mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{I}})$且把$(W, Z_0)$映为$(W^*, 0)$，$K_{\mathrm{I}}(W, Z; \overline{W}, \overline{Z})$为 $Y_{\mathrm{I}}(1, m, n; K)$的 Bergman 核函数，则根据命题 2，有

$$K_{\mathrm{I}}(W, Z; \overline{W}, \overline{Z}) = K_{\mathrm{I}}(W^*, 0; \overline{W^*}, 0)(|\det(J_f)|^2|_{Z_0=Z}). \tag{4.1.8}$$

而(J_f)具以下形式：

$$\begin{pmatrix} \partial W^*/\partial W & 0 \\ * & \partial Z^*/\partial Z \end{pmatrix}_{Z_0=Z}$$

故

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0=Z} = |\det(\partial W^*/\partial W)\det(\partial Z^*/\partial Z)|^2_{Z_0=Z}.$$

根据典型域熟知的理论[Hua, Lu2, Lu3]，我们有

$$|\det(\partial Z^*/\partial Z)|^2_{Z_0=Z} = \det(I - Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-(m+n)}.$$

而易知$[|\partial W^*/\partial W|_{Z_0=Z}]^2=\det(I-ZZ^{\mathrm T})^{-1/K}$. 因此有

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0=Z}=\det(I-ZZ^{\mathrm T})^{-(m+n+1/K)}. \tag{4.1.9}$$

下面的任务是确定 $K_{\mathrm I}(W^*,0;\overline{W}^*;0)$. 为了方便,我们以 W 代 W^*.

由于 $Y_{\mathrm I}(1,m,n;K)$是 semi-Reinhardt 域,根据定理 1, $Y_{\mathrm I}(1,m,n;K)$的标准完备正交函数系是$\{W^jP_{ki}^{(j)}(Z)\}=\{\Phi_{jki}\}(j,k=0,1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,m_k;m_k=(mn+k-1)![k!(mn-1)!]^{-1})$. 而

$$K_{\mathrm I}(W,Z;\overline{W},\overline{Z})=\sum|W^jP_{ki}^{(j)}(Z)|^2,$$

因此

$$K_{\mathrm I}(W,0;\overline{W},0)=\sum|W^jP_{ki}^{(j)}(0)|^2=\sum|W^jP_{01}^{(j)}(0)|^2$$
$$=\sum|a_jW^j|^2=\sum|a_j|^2|W|^{2j}. \tag{4.1.10}$$

下面计算 a_j. 由于 $a_jW^j=\Phi_{j01}(j=0,1,2,\cdots)$是 $Y_{\mathrm I}(1,m,n;K)$的标准完备正交函数系的一部分,因而

$$a_j=\left[\int_{Y_{\mathrm I}}|W|^{2j}\mathrm dV\right]^{1/2}=\left[\int_{Y_{\mathrm I}}|W|^{2j}\mathrm dW\mathrm dZ\right]^{-1/2}.$$

面

$$\int_{Y_{\mathrm I}}|W|^{2j}\mathrm dW\mathrm dZ=\int_{|W|<R}|W|^{2j}\mathrm dW\mathrm dZ$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm d\theta\left[\int_{R_{\mathrm I}(m,n)}\int_0^R R^{2j+1}\mathrm dR\mathrm dZ\right].$$

这里 $R=\det(I-ZZ^{\mathrm T})^{1/(2K)}$. 因而有

$$\int_{Y_{\mathrm I}}|W|^{2j}\mathrm dW\mathrm dZ=\pi(j+1)^{-1}\int_{R_{\mathrm I}(m,n)}\det(I-ZZ^{\mathrm T})^{(j+1)/K}\mathrm dZ.$$

令 $\lambda=(j+1)/K$,根据命题 1,

$$\int_{R_{\mathrm I}(m,n)}\det(I-ZZ^{\mathrm T})^{(j+1)/K}\mathrm dZ=J_{m,n}$$
$$=\pi^{mn}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\lambda+i)\prod_{k=1}^{m}\Gamma(\lambda+k)/\left[\prod_{h=1}^{n+m}\Gamma(\lambda+h)\right].$$

因面

$$|a_j|^2=(j+1)\pi^{-(mn+1)}\left[\prod_{h=1}^{n+m}\Gamma(\lambda+h)\right]/$$
$$\left[\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\lambda+i)\prod_{k=1}^{m}\Gamma(\lambda+k)\right]$$
$$=K\pi^{-(mn+1)}\lambda\left[\prod_{h=1}^{n+m}\Gamma(\lambda+h)\right]/$$

$$[\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\lambda+i)\prod_{k=1}^{m}\Gamma(\lambda+k)]$$

$$\begin{aligned}= K\pi^{-(mn+1)}\lambda[(\lambda+n)(\lambda+n-1)\cdots\\ \cdot(\lambda+1)][(\lambda+n+1)(\lambda+n)\cdots(\lambda+2)]\\ \cdot[(\lambda+n+2)(\lambda+n+1)\cdots(\lambda+3)]\cdots\\ \cdot[(\lambda+n+m-1)(\lambda+n+m-2)\cdots(\lambda+m)],\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

这是 λ 的$(mn+1)$次多项式. 由于 $\lambda=(j+1)/K$,因而也是 j 的$(mn+1)$次多项式. 即

$$\begin{aligned}|a_j|^2 = K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}(j+1)[(j+1+Kn)\\ \cdot(j+1+K(n-1))\cdots(j+1+K)][(j+1+K(n+1))\\ \cdot(j+1+Kn)\cdots(j+1+2K)][(j+1+K(n+2))\\ \cdot(j+1+K(n+1))\cdots(j+1+3K)]\cdots\\ \cdot[(j+1+K(n+m-1))(j+1+K(n+m-2))\cdots\\ \cdot(j+1+mK)].\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

令 $P(j)=K^{mn}\pi^{mn+1}|a_j|^2$,则 $P(j)$是 j 的$(mn+1)$次多项式,最高项系数为 1,这可看作(4.1.4)式. 相应的(4.1.5)式为:

$$P(j) = \sum_{i=0}^{mn+1} b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1),$$

其中 $b_{mn+1}=1, b_0=P(-1)=0$. 一般 b_i 由以下递推公式决定(这相应于(4.1.7)式):

$$\begin{aligned}b_i = [P(-i-1)-\sum_{k=0}^{i-1}b_k(-1)^k\Gamma(i+1)/\\ \Gamma(i-k+1)][(-1)^i\Gamma(i+1)]^{-1},\\ i=0,1,2,\cdots,mn+1.\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

这样,我们有

$$|a_j|^2 = K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}\sum_{i=0}^{mn+1}b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1). \tag{4.1.14}$$

令 $y=|W|^2$,则 $K_{\mathrm{I}}(W,0;\overline{W},0)=\sum|a_j|^2y^j$.

下面计算这个无穷级数的和. 计算前我们要指出,当 $j=0$ 时,$|a_0|^{-2}$便是域 $Y_{\mathrm{I}}(1,m,n;K)$的体积记为 $V(Y_{\mathrm{I}})$,所以

$$\begin{aligned}V(Y_{\mathrm{I}}) = \pi^{mn+1}[\prod_{i=1}^{n}\Gamma(K^{-1}+i)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(K^{-1}+j)]/\\ [\prod_{h=1}^{n+m}\Gamma(K^{-1}+h)].\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

易见

$$\sum|a_j|^2y^j = K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}\sum_{i=0}^{mn+1}b_i\sum_{j=0}^{\infty}\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1)y^j$$

$$= K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}\sum_{i=0}^{mn+1} b_i \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{d}^i[y^{j+i}]/\mathrm{d}y^i$$

$$= K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}\sum_{i=0}^{mn+1} b_i \mathrm{d}^i\Big[\sum_{j=0}^{\infty} y^{j+i}\Big]/\mathrm{d}y^i$$

$$= K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}\sum_{i=0}^{mn+1} b_i \mathrm{d}^i[y^i/(1-y)]/\mathrm{d}y^i.$$

而

$$y^i/(1-y) = [-y^{i-1} - y^{i-2} - \cdots - y - 1 + 1/(1-y)].$$

对其进行 i 次微分后得 $\Gamma(i+1)(1-y)^{-(i+1)}$. 因而有

$$\sum |a_j|^2 y^j = K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}\sum_{i=0}^{mn+1} b_i\Gamma(i+1)(1-y)^{-(i+1)}$$

$$= K_1(W,0;\bar{W},0).$$

将 y 恢复到原来变量 $|W|^2$. 而且将 W 仍改为 W^*, 则我们有

$$K_1(W^*,0;\overline{W^*};0)$$

$$= K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}\sum_{i=0}^{mn+1} b_i\Gamma(i+1)(1-|W^*|^2)^{-(i+1)}. \tag{4.1.16}$$

在注意到 W^* 是 W 在变换 $f(W,Z)$ 下的像并令 $Z_0=Z$ 者. 这样便有

$$|W^*|^2 = X = X(W,Z) = |W|^2[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-1/K}. \tag{4.1.17}$$

注意到(4.1.8)(4.1.9)式, 我们得到

$$K_1(W,Z;\bar{W},\bar{Z}) = K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}\sum_{i=0}^{mn+1} b_i\Gamma(i+1)(1-X)^{-(i+1)}$$

$$\cdot \det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-(m+n+1/K)}. \tag{4.1.18}$$

而 $Y=(1-X)^{-1}$, 所以有

$$K_1(W,Z;\bar{W},\bar{Z}) = K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}\Big[\sum_{i=0}^{mn+1} b_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}\Big]$$

$$\cdot \det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-(m+n+1/K)}. \tag{4.1.19}$$

令

$$F(Y) = \sum_{i=0}^{mn+1} b_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}. \tag{4.1.20}$$

这是 Y 的 $(mn+2)$ 次多项式, 无常数项, 一次项系数 $b_0=0$. 最高项系数为 $\Gamma(mn+2)=(mn+1)!$. 一般的 b_i 由(4.1.13)决定. 这样我们有

$$K_1(W,Z;\bar{W},\bar{Z})$$

$$= K^{-mn}\pi^{-(mn+1)}F(Y)\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-(m+n+1/K)}. \tag{4.1.21}$$

利用 $Y_1(1,m,n;K)$ 的 Bergman 核函数的表示式(4.1.21), 用膨胀原理, 就得到域 $Y_1(N,m,n;K)$ 的 Bergman 核函数的表示式为:

$$K_{\mathrm{I}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z})$$
$$= K^{-mn}\pi^{-(mn+N)}G(Y)\det(I-ZZ^{T})^{-(m+n+N/K)}. \qquad (4.1.22)$$

其中

$$G(Y) = \sum_{i=0}^{mn+1} b_i \Gamma(N+i) Y^{N+i}$$

在(4.1.22)中令 $K=1$ 就得到 $Y_{\mathrm{I}}(N,m,n;1)$的 Bergman 核函数的表示式.

本节内容取自文献[YW1～YW3,YW5,YW10,YW41].

Ⅱ. 第二类 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核函数的显表达式

这一节我们要求出如下的第二类 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核函数的显表达式:

$$Y_{\mathrm{II}}(N,p;K) = \{W \in \mathbf{C}^N, Z \in R_{\mathrm{II}}(p): |W|^{2K} < \det(I-ZZ^{\mathrm{T}}), K>0\}.$$

Ⅱ. 1. 准备

Ⅱ.1.1　定理 1. 命 $Z \in R_{\mathrm{II}}(p)$, $\lambda > -1$,

$$J_p = \int_{R_{\mathrm{II}}(p)} \det(I-ZZ^{T})^{\lambda} dV \text{ ,则有}$$

$$J_p = \pi^{p(p+1)/2}[(\lambda+1)\cdots(\lambda+p)]^{-1}$$
$$\cdot[\Gamma(2\lambda+p+2)\Gamma(2\lambda+p+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2p)]^{-1} \qquad (4.2.1)$$
$$\cdot[\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\cdots\Gamma(2\lambda+2p-1)].$$

证:见华罗庚的名著[Hua]第 30 页.

Ⅱ.1.2　定理 2. 以下变换属于 $Y_{\mathrm{II}}(1,p;K)$的全纯自同构群,记之为 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{II}})$:

$$\begin{cases} W^{*} = e^{i\theta}W\det(I-Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{1/(2K)}\det(I-ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1/K}, \\ Z^{*} = A(Z-Z_0)(I-Z_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}A^{-1}. \end{cases}$$

其中 $A^{\mathrm{T}}A=(I-Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{-1}$, $Z_0 \in R_{\mathrm{II}}(p)$, $\mathrm{i}=(-1)^{1/2}$.

此变换把(W,Z_0)映为$(W^{*},0)$.

证:习知,$Z^{*}=A(Z-Z_0)(I-Z_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}\overline{A}^{-1}$是 $R_{\mathrm{II}}(p)$的全纯自同构.由文献[Hua,Lu2,Lu3]关于典型域的理论易知:

$$I-Z^{*}Z^{*\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}(I-ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1}(I-ZZ^{\mathrm{T}})(I-Z_0Z^{\mathrm{T}})^{-1}A^{-1}.$$

$$\det(I - Z^* Z^{*T}) = \det(I - Z_0 Z_0^T) |\det(I - ZZ_0^T)|^{-2} \det(I - ZZ^T).$$

而 $W^* W^{*T} = WW^T \det(I - Z_0 Z_0^T)^{1/K} |\det(I - ZZ_0^T)|^{-2/K}$. 因此有

$$\det(I - Z^* Z^{*T}) - |W^*|^{2K} = \det(I - Z_0 Z_0^T) |\det(I - ZZ_0^T)|^{-2}$$
$$[\det(I - ZZ^T) - |W|^{2K}].$$

这证明了上述变换是 $Y_{II}(1,p;K)$是全纯自同构. 至于其全纯性是显然的.

Ⅱ.1.3 定理 3. 令 $X = X(W,Z) = |W|^2 [\det(I - ZZ^T)]^{-1/K}$, 则 X 在 $\mathrm{Aut}(Y_{II})$下不变, 即有 $X(W^*, Z^*) = X(W, Z)$.

证: 这可以直接计算而得.

Ⅱ. 2. Bergman 核函数

本节给出第二类超 Cartan 域 $Y_{II}(1,p;K)$的 Bergman 核函数.

Ⅱ.2.1 设$(W^*, Z^*) = f(W, Z) \in \mathrm{Aut}(Y_{II})$且把$(W, Z_0)$映为$(W^*, 0)$, $K_{II}(W, Z; \overline{W}, \overline{Z})$为 $Y_{II}(1, p; K)$的 Bergman 核函数, 根据 Bergman 核函数的变换规律, 有

$$K_{II}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K_{II}(W^*,0;\overline{W}^*,0) |\det(J_f)|^2_{Z_0 = Z} \tag{4.2.2}$$

而(J_f)具以下形式:

$$\begin{pmatrix} \partial W^*/\partial W & 0 \\ * & \partial Z^*/\partial Z \end{pmatrix}_{Z_0 = Z}$$

故

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0 = Z} = |\det(\partial W^*/\partial W)\det(\partial Z^*/\partial Z)|^2_{Z_0 = Z}.$$

根据典型域熟知的理论[Hua, Lu2, Lu3], 我们有

$$|\det(\partial Z^*/\partial Z)|^2_{Z_0 = Z} = \det(I - ZZ^T)^{-(p+1)}.$$

而易知$[\partial W^*/\partial W|_{Z_0 = Z}]^2 = \det(I - ZZ^T)^{-1/K}$. 因此有

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0 = Z} = \det(I - ZZ^T)^{-(p+1+1/K)}. \tag{4.2.3}$$

下面的任务是确定 $K_{II}(W^*, 0; \overline{W}^*, 0)$. 为了方便, 下面我们以 W 代 W^*.

Ⅱ.2.2 由于 $Y_{II}(1,p;K)$是 semi-Reinhardt 域, 根据上节Ⅰ.1 的定理 1, $Y_{II}(1,p;K)$的标准完备正交函数系是 $\{W^j P_{ki}^{(j)}(Z)\} = \{\Phi_{jki}\}$ $(j, k = 0,1,2,\cdots; i = 1,2,\cdots,m_k; m_k = \left[\frac{p}{2}(p+1)+k-1\right]!\left[k!\left(\frac{p}{2}(p+1)-1\right)!\right]^{-1}$. 而 $K_{II}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = \sum |W^j P_{ki}^{(j)}(Z)|^2$. 因此

$$K_{\mathrm{II}}(W,0;\overline{W},0)-\sum|W^jP_{kt}(0)|^2=\sum|W^jP_{01}^{(j)}(0)|^2$$
$$=\sum|a_jW^j|^2=\sum|a_j|^2|W|^{2j}. \qquad (4.2.4)$$

下面计算 a_j. 由于 $a_jW^j=\Phi_{j01}(j=0,1,2,\cdots\cdots)$是 $Y_{\mathrm{II}}(1,p;K)$的标准完备正交函数系的一部分,因而

$$a_j=\left[\int_{Y_{\mathrm{II}}}|W|^{2j}\mathrm{d}V\right]^{-1/2}=\left[\int_{Y_{\mathrm{II}}}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z\right]^{-1/2}.$$

$$\int_{Y_{\mathrm{II}}}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z=\int_{|W|<R}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left[\int_{R_{\mathrm{II}}(p)}\int_0^R R^{2j+1}\mathrm{d}R\mathrm{d}Z\right].$$

这里 $R=\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{1/(2K)}$. 因而有

$$\int_{Y_{\mathrm{II}}}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z=\pi(j+1)^{-1}\int_{R_{\mathrm{II}}(p)}\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{(j+1)/K}\mathrm{d}Z.$$

令 $\lambda=(j+1)/K$,根据Ⅱ.2.1 定理 1,

$$\int_{R_{\mathrm{II}}(p)}\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{(j+1)/K}\mathrm{d}Z=J_p=\pi^{p(p+1)/2}[(\lambda+1)\cdots(\lambda+p)]^{-1}$$
$$\cdot[\Gamma(2\lambda+p+2)\Gamma(2\lambda+p+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2p)]^{-1}$$
$$\cdot[\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\cdots\Gamma(2\lambda+2p-1)].$$

因而

$$\begin{aligned}
|a_j|^2=&(j+1)\pi^{-(p(p+1)/2+1)}[(\lambda+1)\cdots(\lambda+p)]\\
&\cdot[\Gamma(2\lambda+p+2)\Gamma(2\lambda+p+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2p)]\\
&\cdot[\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\cdots\Gamma(2\lambda+2p-1)]^{-1}\\
=&K\pi^{-(p(p+1)/2+1)}\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+p)\\
&\cdot[(2\lambda+p+1)!(2\lambda+p+2)!\cdots(2\lambda+2p-1)!]\\
&\cdot[(2\lambda+2p-2)!(2\lambda+2p-4)!\cdots(2\lambda+2)!]^{-1}\\
=&K\pi^{-(p(p+1)/2+1)}\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+p)\\
&\cdot[(2\lambda+2p-1)!(2\lambda+2p-2)!\cdots(2\lambda+p+1)!]\\
&\cdot[(2\lambda+2p-2)!(2\lambda+2p-4)!\cdots(2\lambda+2)!]^{-1}\\
=&K\pi^{-(p(p+1)/2+1)}\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+p)[(2\lambda+2p-1)]\\
&\cdot[(2\lambda+2p-2)(2\lambda+2p-3)][(2\lambda+2p-3)\\
&\cdot(2\lambda+2p-4)(2\lambda+2p-5)]\\
&\cdot[(2\lambda+2p-4)(2\lambda+2p-5)(2\lambda+2p-6)(2\lambda+2p-7)]\\
&\cdots[(2\lambda+p+1)(2\lambda+p)\cdots(2\lambda+3)]. \qquad (4.2.5)
\end{aligned}$$

这是 λ 的$[p(p+1)/2+1]$次多项式. 由于 $\lambda=(j+1)/K$,因而也是 j 的

$[p(p+1)/2+1]$次多项式. 即

$$
\begin{aligned}
|a_j|^2 = K^{p(p+1)/2}\pi^{-(p(p-1)/2+1)}&[(j+1)][(j+1+K)\\
&\cdot(j+1+2K)\cdots(j+1+pK)]\\
&\cdot[2(j+1)+K(2p-1)][(2(j+1)+K(2p-2))\\
&\cdot(2(j+1)+K(2p-3))]\\
&\cdot[(2(j+1)+K(2p-3))(2(j+1)+K(2p-4))\\
&\cdot(2(j+1)+K(2p-5))]\cdots\\
&\cdot[(2(j+1)+K(p+1))(2(j+1)+Kp)\cdots\\
&\cdot(2(j+1)+3K)].
\end{aligned}
\tag{4.2.6}
$$

令 $P(j)=K^{p(p+1)/2}\pi^{(p(p+1)/2+1)}|a_j|^2$,则 $P(j)$是 j 的$(p(p+1)/2+1)$次多项式,最高项系数为 $2^{p(p+1)/2}$. 这可看作(4.1.4)式. 相应的(4.1.5)式为:

$$
P(j)=\sum_{i=0}^{h}b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1),
$$

其中 $h=[p(p+1)/2+1]$, $b_h=2^{p(p+1)/2+1}$, $b_0=P(-1)=0$. 一般 b_i 由以下递推公式决定(这相应于(4.1.7)式):

$$
\begin{aligned}
b_i=&[P(-i-1)-\textstyle\sum_{k=0}^{i-1}b_k(-1)^k\Gamma(i+1)/\Gamma(i-k+1)]\\
&\cdot[(-1)^i\Gamma(i+1)]^{-1},\quad i=0,1,2,\cdots,p(p+1)/2+1.
\end{aligned}
\tag{4.2.7}
$$

这样,我们有

$$
|a_j|^2=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h}b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1),\tag{4.2.8}
$$

令 $y=|W|^2$,则

$$
K_{\mathrm{II}}(W,0;\overline{W},0)=\sum|a_j|^2y^j.
$$

下面计算这个无穷级数的求和. 计算前我们要指出,当 $j=0$ 时,$|a_0|^{-2}$便是域 $Y_{\mathrm{II}}(1,p;K)$的体积记为 $V(Y_{\mathrm{II}})$,所以

$$
\begin{aligned}
V(Y_{\mathrm{II}})=\pi^{(p(p+1)/2+1)}&[(K^{-1}+1)\cdots(K^{-1}+p)\\
&\cdot\Gamma(2K^{-1}+p+2)\Gamma(2K^{-1}+3)\cdots\\
&\cdot\Gamma(2K^{-1}+2p)]^{-1}[\Gamma(2K^{-1}+3)\\
&\cdot\Gamma(2K^{-1}+5)\cdots\Gamma(2K^{-1}+2p-1)]].
\end{aligned}
\tag{4.2.9}
$$

Ⅱ.2.3 易见(下面总有 $h=p(p+1)/2+1$)

$$
\sum|a_j|^2y^j=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{h}b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1)y^j
$$

$$= K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i \mathrm{d}^i\Big[\sum_{j=0}^{\infty} y^{j+i}\Big]/\mathrm{d}y^i$$
$$= K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i \mathrm{d}^i[y^i/(1-y)]/\mathrm{d}y^i.$$

而

$$y^i/(1-y) = [-y^{i-1} - y^{i-2} - \cdots - y - 1 + 1/(1-y)].$$

对其进行 i 次微分后得 $\Gamma(i+1)(1-y)^{-(i+1)}$. 因而有

$$\sum |a_j|^2 y^j = K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)(1-y)^{-(i+1)}$$
$$= K_{\mathrm{II}}(W,0;\overline{W},0).$$

将 y 恢复到原来变量 $|W|^2$, 而且注意到Ⅱ.2.1 之末所述, 我们将 W 仍改为 W^*, 则我们有

$$K_{\mathrm{II}}(W^*,0;\overline{W}^*,0) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)(1-|W^*|^2)^{-(i+1)}. \tag{4.2.10}$$

在注意到 W^* 是 W 在变换 $f(W,Z)$ 下的像并令 $Z_0=Z$ 者. 这样便有

$$|W^*|^2 = X = X(W,Z) = |W|^2[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-1/K}. \tag{4.2.11}$$

注意到Ⅱ.2.1.之末及(4.2.2)(4.2.3)式, 我们得到

$$K_{\mathrm{II}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)(1-X)^{-(i+1)}$$
$$\cdot \det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-(p+1+1/K)}. \tag{4.2.12}$$

而 $Y=(1-X)^{-1}$, 所以有

$$K_{\mathrm{II}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}\Big[\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}\Big]$$
$$\cdot \det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-(p+1+1/K)}. \tag{4.2.13}$$

令

$$F(Y) = \sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}. \tag{4.2.14}$$

这是 Y 的 $(p(p+1)/2+2)$ 次多项式, 无常数项, 一次项系数 $b_0\neq 0$. 最高项系数为 $2^{p(p+1)/2}\Gamma(p(p+1)/2+2)$. 一般的 b_i 由(4.2.7)决定. 这样我们有

$$K_{\mathrm{II}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}F(Y)\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-(p+1+1/K)}. \tag{4.2.15}$$

Ⅱ.2.4 利用 $Y_{\mathrm{II}}(1,p;K)$ 的 Bergman 核函数的表示式(4.2.15),

用膨胀原理,就得到域 $Y_{\mathrm{II}}(N,p;K)$的 Bergman 核函数的表示式为:

$$K_{\mathrm{II}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{p(p+1)/2}\pi^{-(p(p+1)/2+N)}G(Y)$$
$$\cdot \det(I - Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-(p-1+N/K)}. \qquad (4.2.16)$$

其中

$G(Y) = \sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(N+i)Y^{N+i}$, b_i 由(4.2.7)式决定, $|W|^2 = \sum_{j=1}^{N}|W_j|^2$, $h = [p(p+1)/2+1]$.

在(4.2.16)中,令 $K=1$ 就得到 $Y_{\mathrm{II}}(N,p;1)$的 Bergman 核函数的表示式.

本节内容取自文献[YW1,YW2,YW6,YW10,YW41].

Ⅲ. 第三类 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核第数的显表达式

本节我们求出如下的第三类 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核函数的显表达式:

$$Y_{\mathrm{III}}(N,q;K) = \{W \in \mathbf{C}^N, Z \in R_{\mathrm{III}}(q): |W|^{2K} < \det(I - Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}), K > 0\}.$$

Ⅲ. 1. 准　　备

Ⅲ.1.1　定理 1. 命 $Z \in R_{\mathrm{III}}(q)$, $\lambda > -1$, $J_q = \int_{R_{\mathrm{III}}(q)}\det(I - Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{\lambda}\mathrm{d}V$,则有

$$J_q = \pi^{q(q-1)/2}[\Gamma(2\lambda+q)\Gamma(2\lambda+q+1)\cdots\Gamma(2\lambda+2q-2)]^{-1}$$
$$\cdot[\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2q-3)].$$

证:见文献[Hua]第 33 页.

Ⅲ.1.2　定理 2. 以下变换属于 $Y_{\mathrm{III}}(1,q;K)$的全纯自同构群,记之为 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{III}})$:

$$\begin{cases} W^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}W\det(I - Z_0\overline{Z}_0^{\mathrm{T}})^{1/(2K)}\det(I - Z\overline{Z}_0^{\mathrm{T}})^{-1/K}, \\ Z^* = A(Z - Z_0)(I - \overline{Z}_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}\overline{A}^{-1}. \end{cases}$$

其中 $\overline{A}^{\mathrm{T}}A = (I - Z_0\overline{Z}_0^{\mathrm{T}})^{-1}$, $Z_0 \in R_{\mathrm{III}}(q)$, $\mathrm{i} = (-1)^{1/2}$.

此变换把(W,Z_0)映为$(W^*,0)$.

证:习知, $Z^* = A(Z - Z_0)(I - \overline{Z}_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}\overline{A}^{-1}$是 $R_{\mathrm{III}}(q)$的全纯自同构. 由文献[Hua,Lu2,Lu3]关于典型域的理论易知:

$$I - Z^*\overline{Z}^{*\mathrm{T}} = (\overline{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(I - Z\overline{Z}_0^{\mathrm{T}})^{-1}(I - Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})(I - Z_0\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-1}A^{-1}.$$

$$\det(I - Z^* Z^{*T}) = \det(I - Z_0 Z_0^T)|\det(I - ZZ_0^T)|^{-2}\det(I - ZZ^T),$$

而 $W^* W^{*T} = WW^T \det(I - Z_0 Z_0^T)^{1/K}|\det(I - ZZ_0^T)|^{-2/K}$. 因此有

$$\det(I - Z^* Z^{*T}) - |W^*|^{2K} = \det(I - Z_0 Z_0^T)|\det(I - ZZ_0^T)|^{-2}$$

$$\cdot [\det(I - ZZ^T) - |W|^{2K}].$$

这证明了上述变换是 $Y_Ⅲ(1,q;K)$ 是全纯自同构.

Ⅲ.1.3　定理 3. 令 $X = X(W,Z) = |W|^2[\det(I - ZZ^T)]^{-1/K}$, 则 X 在 $\mathrm{Aut}(Y_Ⅲ)$ 下不变, 即有 $X(W^*,Z^*) = X(W,Z)$.

证: 这可以直接计算而得.

令 $Y = Y(W,Z) = (1 - X)^{-1}$, 则 Y 在 $\mathrm{Aut}(Y_Ⅲ)$ 下不变, 而且任何以 X 为变量的函数 $F(X)$ 都是在 $\mathrm{Aut}(Y_Ⅲ)$ 下不变的, 对 $F(Y)$ 亦然.

Ⅲ. 2. Bergman 核函数

下面给出第三类超 Cartan 域 $Y_Ⅲ(1,q;K)$ 的 Bergman 核函数的显表达式. 我们分以下几步进行.

Ⅲ.2.1　设 $(W^*,Z^*) = f(W,Z) \in \mathrm{Aut}(Y_Ⅲ)$ 且把 (W,Z_0) 映为 $(W^*,0)$, $K_Ⅲ(W,Z;\overline{W},\overline{Z})$ 为 $Y_Ⅲ(1,q;K)$ 的 Bergman 核函数, 则根据 (4.1.3), 有

$$K_Ⅲ(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K_Ⅲ(W^*,0;\overline{W}^*,0)|\det(J_f)|^2_{Z_0=Z} \tag{4.3.1}$$

而 (J_f) 具以下形式:

$$\begin{pmatrix} \partial W^*/\partial W & 0 \\ * & \partial Z^*/\partial Z \end{pmatrix}_{Z_0=Z},$$

故

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0=Z} = |\det(\partial W^*/\partial W)\det(\partial Z^*/\partial Z)|^2_{Z_0=Z}.$$

根据典型域熟知的理论[Hua, Lu2, Lu3], 我们有

$$|\det(\partial Z^*/\partial Z)|^2_{Z_0=Z} = \det(I - ZZ^T)^{-(q-1)}.$$

而易知 $[|\partial W^*/\partial W|_{Z_0=Z}]^2 = \det(I - ZZ^T)^{-1/K}$. 因此有

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0=Z} = \det(I - ZZ^T)^{-(q-1+1/K)}. \tag{4.3.2}$$

下面的任务是确定 $K_Ⅲ(W^*,0;\overline{W}^*,0)$. 为了方便, 下面我们以 W 代 W^*.

Ⅲ.2.2　由于 $Y_Ⅲ(1,q;K)$ 是 semi-Reinhardt 域, 根据本章第 1 节的定理 1, $Y_Ⅲ(1,q;K)$ 的标准完备正交函数系是 $\{W^p P_{kl}^{(p)}(Z)\}$ —

$\{\Phi_{jki}\}(j,k=0,1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,m_k=[q(q-1)/2+k-1]![k![q(q-1)/2-1]!]^{-1})$. 而 $K_{\mathrm{III}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z})=\sum|W^jP_{ki}^{(j)}(Z)|^2$.

因此

$$K_{\mathrm{III}}(W,0;\overline{W},0)=\sum|W^jP_{ki}^{(j)}(0)|^2=\sum|W^jP_{01}^{(j)}(0)|^2$$
$$=\sum|a_jW^j|^2=\sum|a_j|^2|W|^{2j}. \tag{4.3.3}$$

下面计算 a_j. 由于 $a_jW^j=\Phi_{j0}(j=0,1,2,\cdots)$是 $Y_{\mathrm{III}}(1,q;K)$的标准完备正交函数系的一部分,因而

$$a_j=\left[\int_{Y_{\mathrm{III}}}|W|^{2j}\mathrm{d}V\right]^{-1/2}=\left[\int_{Y_{\mathrm{III}}}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z\right]^{-1/2}.$$

而

$$\int_{Y_{\mathrm{III}}}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z=\int_{|W|<R}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left[\int_{R_{\mathrm{III}}(q)}\int_0^R R^{2j+1}\mathrm{d}R\mathrm{d}Z\right].$$

这里 $R=\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{1/(2K)}$. 因而有

$$\int_{Y_{\mathrm{III}}}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z=\pi(j+1)^{-1}\int_{R_{\mathrm{III}}(q)}\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{(j+1)/K}\mathrm{d}Z.$$

令 $\lambda=(j+1)/K$, 根据本节的定理 1,

$$\int_{R_{\mathrm{III}}(q)}\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{(j+1)/K}\mathrm{d}Z=J_q=\pi^{q(q-1)/2}$$
$$\cdot[\Gamma(2\lambda+q)\Gamma(2\lambda+q+1)\cdots\Gamma(2\lambda+2q-2)]^{-1}$$
$$\cdot[\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2q-3)].$$

因而

$$|a_j|^2=(j+1)\pi^{-(q(q-1)/2+1)}[\Gamma(2\lambda+q)$$
$$\cdot\Gamma(2\lambda+q+1)\cdots\Gamma(2\lambda+2q-2)]$$
$$\cdot[\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2q-3)]^{-1}.$$
$$=K\pi^{-(q(q-1)/2+1)}\lambda[\Gamma(2\lambda+q)$$
$$\cdot\Gamma(2\lambda+q+1)\cdots\Gamma(2\lambda+2q-2)]$$
$$\cdot[\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2q-3)]^{-1}.$$
$$=K\pi^{-(q(q-1)/2+1)}\lambda[(2\lambda+2q-3)!\,(2\lambda+2q-4)!\cdots$$
$$\cdot(2\lambda+q-1)!][(2\lambda+2q-4)!\,(2\lambda+2q-6)!\cdots(2\lambda)!]^{-1}$$
$$=K\pi^{-(q(q-1)/2+1)}\lambda[(2\lambda+2q-3)][(2\lambda+2q-4)$$
$$\cdot(2\lambda+2q-5)][(2\lambda+2q-5)(2\lambda+2q-6)(2\lambda+2q-7)]$$

$$\cdot[(2\lambda+2q-6)(2\lambda+2q-7)(2\lambda+2q-8)(2\lambda+2q-9)]\cdots$$
$$\cdot[(2\lambda+q-1)(2\lambda+q-2)\cdots(2\lambda+1)]. \tag{4.3.4}$$
这是 λ 的$[q(q-1)/2+1]$次多项式. 由于 $\lambda=(j+1)/K$,因而也是 j 的$[q(q-1)/2+1]$次多项式. 即
$$\begin{aligned}|a_j|^2 = K^{-q(q-1)/2}\pi^{-(q(q-1)/2+1)}&(j+1)[2(j+1)+K(2q-3)]\\ &\cdot[(2(j+1)+K(2q-4))(2(j+1)+K(2q-5))]\\ &\cdot[(2(j+1)+K(2q-5))(2(j+1)+K(2q-6))\\ &\cdot(2(j+1)+K(2q-7))]\cdots\\ &\cdot[(2(j+1)+K(q-1))(2(j+1)+K(q-2))\cdots\\ &\cdot(2(j+1)+K)].\end{aligned} \tag{4.3.5}$$
令 $P(j)=K^{q(q-1)/2}\pi^{(q(q-1)/2+1)}|a_j|^2$,则 $P(j)$是 j 的$(q(q-1)/2+1)$次多项式,最高项系数为 $2^{q(q-1)/2}$. 这可看作(4.1.4)式. 相应的(4.1.5)式为:
$$P(j)=\sum_{i=0}^{h}b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1),$$
其中 $h=[q(q-1)/2+1]$, $b_h=2^{q(q-1)/2}$, $b_0=P(-1)=0$.

一般 b_i 由以下递推公式决定(这相应于(4.1.7)式):
$$\begin{aligned}b_i=&\left[P(-i-1)-\sum\nolimits_{k=0}^{i-1}b_k(-1)^k\Gamma(i+1)/\Gamma(i-k+1)\right]\\ &\cdot[(-1)^i\Gamma(i+1)]^{-1},\ i=0,1,2,\cdots,q(q-1)/2+1.\end{aligned} \tag{4.3.6}$$
这样,我们有
$$|a_j|^2=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h}b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1), \tag{4.3.7}$$
令 $y=|W|^2$,则
$$K_{\mathrm{III}}(W,0;\overline{W},0)=\sum|a_j|^2y^j.$$
下面计算这个无穷级数的求和. 计算前我们要指出,当 $j=0$ 时,$|a_0|^2$便是域 $Y_{\mathrm{III}}(1,q;K)$的体积,记为 $V(Y_{\mathrm{III}})$,所以
$$\begin{aligned}V(Y_{\mathrm{III}})=\pi^h&[\Gamma(2K^{-1}+q)\Gamma(2K^{-1}+q+1)\cdots\Gamma(2K^{-1}+2q-2)]^{-1}\\ &\cdot[\Gamma(2K^{-1}+1)\Gamma(2K^{-1}+3)\cdots\Gamma(2K^{-1}+2q-3)].\end{aligned} \tag{4.3.8}$$
Ⅲ.2.3 易见(下面总有 $h=q(q-1)/2+1$)
$$\begin{aligned}\sum|a_j|^2y^j&=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum\nolimits_{j=0}^{\infty}\sum\nolimits_{i=0}^{h}b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1)y^j\\ &=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum\nolimits_{i=0}^{h}b_i\sum\nolimits_{j=0}^{\infty}\mathrm{d}^i[y^{j+i}]/\mathrm{d}y^i\end{aligned}$$

$$= K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i \mathrm{d}^i\left[\sum_{j=0}^{\infty} y^{j+i}\right]/\mathrm{d}y^i.$$

$$= K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i \mathrm{d}^i[y^i/(1-y)]/\mathrm{d}y^i.$$

而

$$y^i/(1-y) = [-y^{i-1} - y^{i-2} - \cdots - y - 1 + 1/(1-y)].$$

对其进行 i 次微分后得 $\Gamma(i+1)(1-y)^{-(i+1)}$.因而有

$$\sum |a_j|^2 y^j = K^{(-h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)(1-y)^{-(i+1)}$$

$$= K_{\mathrm{III}}(W,0;\overline{W},0).$$

将 y 恢复到原来变量 $|W|^2$,而且注意到Ⅲ.2.1.之末所述,我们将 W 仍改为 W^*,则我们有

$$K_{\mathrm{III}}(W^*,0;\overline{W}^*,0) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)(1-|W^*|^2)^{-(i+1)}. \tag{4.3.9}$$

在注意到 W^* 是 W 在变换 $f(W,Z)$ 下的像,并令 $Z_0=Z$ 者.这样便有

$$|W^*|^2 = X = X(W,Z) = |W|^2[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-1/K}. \tag{4.3.10}$$

注意到Ⅲ.2.1之末及(4.3.1)和(4.3.2)式,我们得到

$$K_{\mathrm{III}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)(1-X)^{-(i+1)} \cdot \det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-q(q-1+1/K)}. \tag{4.3.11}$$

而 $Y=(1-X)^{-1}$,所以有

$$K_{\mathrm{III}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}\left[\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}\right] \cdot \det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-(q-1+1/K)}. \tag{4.3.12}$$

令

$$F(Y) = \sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}. \tag{4.3.13}$$

这是 Y 的$(q(q-1)/2+2)$次多项式,无常数项,一次项系数 $b_0=0$.最高项系数为 $2^{q(q-1)/2}\Gamma(q(q-1)/2+2)$.一般的 b_i 由(4.3.6)决定.这样我们有

$$K_{\mathrm{III}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}F(Y)\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-(q-1+1/K)}. \tag{4.3.14}$$

Ⅲ.2.4 利用 $Y_{\mathrm{III}}(1,q;K)$的 Bergman 核函数的表示式(4.3.14),用膨胀原理,就得到域 $Y_{\mathrm{III}}(N,q;K)$的 Bergman 核函数的表达式:

$$K_{\mathrm{III}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-q(q-1)/2}\pi^{-(q(q-1)/2+N)}G(Y)$$
$$\cdot \det(I - Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-(q-1+N/K)}. \qquad (4.3.15)$$

其中 $G(Y) = \sum_{i=0}^{h} b_i \Gamma(N+i) Y^{N+i}$,$b_i$ 由(4.3.6) 式决定,$|W|^2 = \sum_{j=1}^{N} |W_j|^2$,$h = [q(q-1)/2+1]$.

在(4.3.15)中令 $K=1$ 就得到 $Y_{\mathrm{III}}(N,q;1)$的 Bergman 核函数的表示式.

本节内容取自文献[YW1,YW2,YW7,YW10,YW41].

Ⅳ. 第四类 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核函数的显表达式

本节我们求出如下的第四类 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核函数的显表达式:

$$Y_{\mathrm{IV}}(N,n;k):=\{W\in\mathbf{C}^N, Z\in R_{\mathrm{IV}}(n):$$
$$|W|^{2k} < 1 - 2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}} + |ZZ'|^2, k>0\}.$$

Ⅳ.1. 准 备

Ⅳ.1.1 定理 1. 设 $\alpha > -1$,则

$$\int_{R_{\mathrm{IV}}}[\beta(Z,\overline{Z})]^{\alpha}\mathrm{d}Z = \frac{\pi^n\Gamma(\alpha+1)}{2^{n-1}(2\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}.$$

(见[Hua]第 31 页)

Ⅳ.1.2 若$|t|<1$,s 为正数,则有:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+s)}{\Gamma(s)\Gamma(k+1)}t^k = (1-t)^{-s}.$$

Ⅳ.1.3 记 $\beta(Z,\overline{Z}) = 1 + ZZ'\overline{ZZ'} - 2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}$,$\beta(Z,\overline{Z_0}) = 1 + ZZ'\overline{Z_0Z_0'} - 2Z\overline{Z_0}^{\mathrm{T}}$,令

$$X = X(W,Z) = |W|^2[\beta(Z,\overline{Z})]^{-1/k},$$

则 X 在 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{IV}})$下不变,即有 $X(W^*,Z^*) = X(W,Z)$.

Ⅳ.1.4 以下变换组成 $Y_{\mathrm{IV}}(N,n;k)$的全纯自同构群,记之为 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{IV}})$:

$$\begin{cases} W^* = WI(\theta)B^{-1/k}, \\ Z^* = B^{-1}\left[Z - \left(\dfrac{1+ZZ'}{2}, \dfrac{1-ZZ'}{2\mathrm{i}}\right)X_0\right]D, \end{cases}$$

其中

$$W=(w_1,w_2,\cdots,w_N),\quad Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$

$$B=\left[\left(\frac{1+ZZ'}{2},\frac{1-ZZ'}{2\mathrm{i}}\right)-ZX_0'\right]A\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix},$$

$$AA'=(I-X_0X_0')^{-1},\ DD'=(I-X_0'X_0)^{-1},$$

$$Z_0\in R_{Ⅳ}(n),\ \mathrm{i}=\sqrt{-1},$$

$$X_0=\frac{-1}{|1-Z_0Z_0'|^2}\begin{bmatrix}(\overline{Z_0Z_0'}-1)Z_0+(Z_0Z_0'-1)\overline{Z}_0\\ \mathrm{i}(Z_0Z_0'+1)\overline{Z}_0-\mathrm{i}(\overline{Z_0Z_0'}+1)Z_0\end{bmatrix},$$

$$I(\theta)=\begin{bmatrix}e^{\mathrm{i}\theta_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\mathrm{i}\theta_2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\mathrm{i}\theta_N}\end{bmatrix}.$$

此变换将$(W,Z_0)\in Y_{Ⅳ}$映成$(W^*,0)$.

Ⅳ.2. $Y_{Ⅳ}(N,n;k)$的 Bergman 核函数

Ⅳ.2.1 设$(W^*,Z^*)=f(W,Z)\in \mathrm{Aut}(Y_{Ⅳ})$且把$(W,Z_0)$映为$(W^*,0)$,$K_{Ⅳ}(W,Z;\overline{W},\overline{Z})$为$Y_{Ⅳ}(1,n;K)$的 Bergman 核函数,则根据(4.1.3),有

$$K_{Ⅳ}(W,Z;\overline{W},\overline{Z})=K_{Ⅳ}(W^*,0;\overline{W}^*,0)\,|\det(J_f)|^2_{Z_0=Z}\tag{4.4.1}$$

而(J_f)具以下形式:

$$\begin{pmatrix}\partial W^*/\partial W & 0\\ * & \partial Z^*/\partial Z\end{pmatrix}_{Z_0=Z},$$

故$|\det(J_f)|^2_{Z_0=Z}=|\det(\partial W^*/\partial W)\det(\partial Z^*/\partial Z)|^2_{Z_0=Z}$.

根据[Hua,Lu2,Lu3]关于典型域熟知的理论,我们有

$$|\det(\partial Z^*/\partial Z)|^2_{Z_0=Z}=[\beta(Z,Z)]^{-n}=[1+|ZZ'|^2-2ZZ^{\mathrm{T}}]^{-n},$$

而易知$[|\partial W^*/\partial W|_{Z_0=Z}]^2=[\beta(Z,Z)]^{-1/K}$.因此有

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0=Z}=[1+|ZZ'|^2-2ZZ^{\mathrm{T}}]^{(n+1/K)}.\tag{4.4.2}$$

下面的任务是确定$K_{Ⅳ}(W^*,0;\overline{W^*},0)$.为了方便,下面我们以$W$代$W^*$.

Ⅳ.2.2 由于$Y_{Ⅳ}(1,n;K)$是 semi-Reinhardt 域,根据本章第Ⅰ节的

定理 1，$Y_{\text{IV}}(1,n;K)$ 的标准完备正交函数系是 $\{W^jP_{ki}^{(j)}(Z)\} = \{\Phi_{jki}\}(j,k=0,1,2,\cdots\cdots;i=1,2,\cdots,m_k;m_k=(n+k-1)![k!(n-1)!]^{-1})$. 而 $K_{\text{IV}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = \sum|W^jP_{ki}^{(j)}(Z)|^2$. 因此

$$K_{\text{III}}(W,0;\overline{W},0) = \sum|W^jP_{ki}^{(j)}(0)|^2 = \sum|W^jP_{01}^{(j)}(0)|^2$$

$$= \sum|a_jW^j|^2 = \sum|a_j|^2|W|^{2j}. \tag{4.4.3}$$

下面计算 a_j. 由于 $a_jW^j = \Phi_{j01}(j=0,1,2,\cdots\cdots)$是 $Y_{\text{IV}}(1,n;K)$的标准完备正交函数系的一部分，因而

$$a_j = \left[\int_{Y_{\text{IV}}}|W|^{2j}\mathrm{d}V\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\int_{Y_{\text{IV}}}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

而

$$\int_{Y_{\text{IV}}}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z = \int_{|W|<R}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left[\int_{R_{\text{IV}}(n)}\int_0^R R^{2j+1}\mathrm{d}R\mathrm{d}Z\right].$$

这里 $R=[H(Z)]^{1/(2K)}$. 因而有

$$\int_{Y_{\text{IV}}}|W|^{2j}\mathrm{d}W\mathrm{d}Z = \pi(j+1)^{-1}\int_{R_{\text{IV}}(n)}[H(Z)]^{(j+1)/K}\mathrm{d}Z.$$

令 $\lambda=(j+1)/K$，根据本节定理 1，

$$\int_{R_{\text{IV}}(n)}[H(Z)]^{(j+1)/K}\mathrm{d}Z = J_n = \pi^n[2^{n-1}$$

$$\cdot(\lambda+n)\Gamma(\lambda+n)]^{-1}\Gamma(\lambda+1).$$

因而

$$|a_j|^2 = (j+1)\pi^{-(n+1)}[2^{n-1}(\lambda+n)\Gamma(\lambda+n)][\Gamma(\lambda+1)]^{-1}$$

$$= K\pi^{-(n+1)}[2^{n-1}(\lambda+n)(\lambda+n-1)\cdots(\lambda+1)\lambda]. \tag{4.4.4}$$

这是 λ 的$(n+1)$次多项式. 由于 $\lambda=(j+1)/K$，因而也是 j 的$(n+1)$次多项式. 即

$$|a_j|^2 = K^{-n}\pi^{-(n+1)}2^{n-1}(j+1)(j+1+K)(j+1+2K)\cdots$$

$$\cdot(j+1+(n-1)K)\cdot(2j+2+nK). \tag{4.4.5}$$

令 $P(j)=2^{n-1}(j+1)(j+1+K)(j+1+2K)\cdots(2j+2+nK)$，则 $P(j)$是 j 的$(n+1)$次多项式，最高项系数为 2^n. 这可看作(4.1.4)式. 相应的(4.1.5)式为：

$$P(j)=\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1),$$

其中 $h=(n+1), b_h=2^n, b_0=P(-1)=0$.

一般 b_i 由以下递推公式决定(这相应于(4.1.7)式):

$$b_i=\Big[P(-i-1)-\sum_{k=0}^{i-1} b_k(-1)^k\Gamma(i+1)/\Gamma(i-k+1)\Big]\cdot[(-1)^i\Gamma(i+1)]^{-1}, i=0,1,2,\cdots,n+1. \tag{4.4.6}$$

这样,我们有

$$|a_j|^2=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1), \tag{4.4.7}$$

令 $y=|W|^2$,则 $K_{\mathrm{IV}}(W,0;\overline{W},0)=\sum|a_j|^2y^j$.

下面计算这个无穷级数的求和.计算前我们要指出,当 $j=0$ 时,$|a_0|^{-2}$便是域 $Y_{\mathrm{IV}}(1,n;K)$的体积记为 $V(Y_{\mathrm{IV}})$,所以

$$V(Y_{\mathrm{IV}})=K^n\pi^{n+1}[2^{n-1}(1+K)(1+2K)\cdots\cdot(1+(n-1)K)(2+nK)]^{-1}. \tag{4.4.8}$$

Ⅳ.2.3 易见(下面总有 $h=n+1$)

$$\begin{aligned}\sum|a_j|^2y^j&=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(j+i+1)/\Gamma(j+1)y^j\\&=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{d}^i[y^{j+i}]/\mathrm{d}y^i\\&=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\mathrm{d}^i\Big[\sum_{j=0}^{\infty}y^{j+i}\Big]/\mathrm{d}y^i\\&=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\mathrm{d}^i[y^i/(1-y)]/\mathrm{d}y^i.\end{aligned}$$

而

$$y^i/(1-y)=[-y^{i-1}-y^{i-2}-\cdots-y-1+1/(1-y)].$$

对其进行 i 次微分后得 $\Gamma(i+1)(1-y)^{-(i+1)}$.因而有

$$\begin{aligned}\sum|a_j|^2y^j&=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)(1-y)^{-(i+1)}\\&=K_{\mathrm{IV}}(W,0;\overline{W},0).\end{aligned}$$

将 y 恢复到原变量$|W|^2$,而且注意到Ⅳ.2.1.之末所述,将 W 仍改为 W^*,则有

$$K_{\mathrm{IV}}(W^*,0;\overline{W}^*,0)=K^{-(h-1)}\pi^{-h}\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)(1-|W^*|^2)^{-(i+1)}. \tag{4.4.9}$$

在注意到 W^* 是 W 在变换 $f(W,Z)$ 下的像并令 $Z_0=Z$ 者,这样便有

$$\begin{aligned}|W^*|^2 = X = X(W,Z) &= |W|^2[\beta(Z,Z)]^{-1/K}\\ &= |W|^2[1+|ZZ'|^2-2ZZ^{\mathrm{T}}]^{-1/K}.\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

注意到Ⅳ.2.1 之末及(4.4.1)及(4.4.2)式,我们得到

$$\begin{aligned}K_{\mathrm{IV}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}&\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)(1-X)^{-(i+1)}\\ &\cdot[\beta(Z,Z)]^{-(n+1/K)}.\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

而 $Y=(1-X)^{-1}$,所以有

$$\begin{aligned}K_{\mathrm{IV}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}&\left[\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}\right]\\ &\cdot[\beta(Z,Z)]^{-(n+1/K)}.\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

令

$$F(Y) = \sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(i+1)Y^{i+1}. \tag{4.4.13}$$

这是 Y 的 $(n+2)$ 次多项式,无常数项,一次项系数 $b_0=0$. 最高项系数为 $2^{n-1}\Gamma(n+2)$. 一般的 b_i 由(4.4.6)决定. 这样我们有

$$K_{\mathrm{IV}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-(h-1)}\pi^{-h}F(Y)[\beta(Z,Z)]^{-(n+1/K)}. \tag{4.4.14}$$

这里 $Y=(1-X)^{-1}=[\beta(Z,Z)]^{1/K}[(\beta(Z,Z))^{1/K}-|W|^2]^{-1}$, $\beta(Z,Z)=[1+|ZZ'|^2-2ZZ^{\mathrm{T}}]$.

Ⅳ.2.4 利用 $Y_{\mathrm{IV}}(1,n;K)$ 的 Bergman 核函数的表示式(4.4.14), 用膨胀原理,就得到域

$$\begin{aligned}K_{\mathrm{IV}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K^{-n}\pi^{-(n+N)}&G(Y)\\ &\cdot[1+|ZZ'|^2-2ZZ^{\mathrm{T}}]^{-(n+N/K)}.\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

其中 $G(Y)=\sum_{i=0}^{h} b_i\Gamma(N+i)Y^{N+i}$, b_i 由(4.4.6)式决定, $|W|^2=\sum_{j=1}^{N}|W_j|^2$, $h=(n+1)$.

在(4.4.15)中令 $K=1$ 就得到 $Y_{\mathrm{IV}}(N,n;1)$ 的 Bergman 核函数的表示式.

本节内容来自文献[YW1,YW4,GY,YW10,YW41,YW2].

V. Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数的显表达式

最近殷慰萍又引进了四类 Cartan-Egg 域，它们是上述四类 Cartan-Hartogs 域的推广：

$$
\begin{aligned}
CE_{\mathrm{I}}(M,N,m,n;K) &:= \{W_1 \in \mathbf{C}^M, W_2 \in \mathbf{C}^N,\\
&\quad Z \in R_{\mathrm{I}}(m,n): |W_1|^2\\
&\quad + |W_2|^{2K} < \det(I - ZZ^{\mathrm{T}}), K > 0\},\\
CE_{\mathrm{II}}(M,N,p;K) &:= \{W_1 \in C^M, W_2 \in \mathbf{C}^N,\\
&\quad Z \in R_{\mathrm{II}}(p): |W_1|^2\\
&\quad + |W_2|^{2K} < \det(I - ZZ^{\mathrm{T}}), K > 0\},\\
CE_{\mathrm{III}}(M,N,q;K) &:= \{W_1 \in \mathbf{C}^M, W_2 \in \mathbf{C}^N,\\
&\quad Z \in R_{\mathrm{III}}(q): |W_1|^2\\
&\quad + |W_2|^{2K} < \det(I - ZZ^{\mathrm{T}}), K > 0\},\\
CE_{\mathrm{IV}}(M,N,n;K) &:= \{W_1 \in \mathbf{C}^M, W_2 \in \mathbf{C}^N,\\
&\quad Z \in R_{\mathrm{IV}}(n): |W_1|^2\\
&\quad + |W_2|^{2K} < 1 - 2ZZ^{\mathrm{T}} + |ZZ'|^2, K > 0\},
\end{aligned}
$$

要算出上述 Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数，同样只要算出 $M = N = 1$ 时相应的 Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数就行了. 因为对 W_1 和 W_2 连续两次用下文提到的膨胀原理就得到 M, N 为一般情况时的 Bergman 核函数. 因而下面先考虑 $M = N = 1$ 的情况.

V. 1. 第一类 Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数

现在计算出域 $CE_{\mathrm{I}}(1,1,m,n;K)$的 Bergman 核函数.

定理 1. 以下变换组成 $CE_{\mathrm{I}}(1,1,m,n;K)$的全纯自同构群，记之为 $\mathrm{Aut}(CE_{\mathrm{I}})$:

$$
\begin{cases}
W_1^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} W \det(I - Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{1/2} \det(I - ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1},\\
W_2^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} W \det(I - Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{1/(2K)} \det(I - ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1/K},\\
Z^* = A(Z - Z_0)(I - Z_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}D^{-1}.
\end{cases}
$$

其中 $A^{\mathrm{T}}A = (I - Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{-1}$, $D^{\mathrm{T}}D = (I - Z_0^{\mathrm{T}}Z_0)^{-1}$, $Z_0 \in R_{\mathrm{I}}(m,n)$, $\mathrm{i} = (-1)^{1/2}$.

此变换把 $CE_{\mathrm{I}}(1,1,m,n;K)$的任意一点$(W_1, W_2, Z_0)$映为$(W_1^*, W_2^*, 0)$.

证：直接验证．

定理 2． 令 $X_1 = X_1(W_1, Z) = |W_1|^2[\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})]^{-1}$，$X_2 = X_2(W_2, Z) = |W_2|^2[\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})]^{-1/K}$，则 X_1, X_2 在 $\mathrm{Aut}(CE_{\mathrm{I}})$ 下不变，即有 $X_1(W_1^*, Z^*) = X(W_1, Z)$，$X_2(W_2^*, Z^*) = X_2(W_2, Z)$．

证：这可以直接计算而得．

有了以上结果以及(4.1.2)式，就可以开始我们的计算．

设 $(W_1^*, W_2^*, Z^*) = f(W_1, W_2, Z) \in \mathrm{Aut}(CE_{\mathrm{I}})$ 且把 (W_1, W_2, Z_0) 映为 $(W_1^*, W_2^*, 0)$，令 $K_{\mathrm{I}}(W, Z; \overline{W}, \overline{Z})$ 为 $CE_{\mathrm{I}}(1, 1, m, n; K)$ 的 Bergman 核函数，则根据 Bergman 核函数的变换公式，有

$$K_{\mathrm{I}}(W, Z; \overline{W}, \overline{Z}) = K_{\mathrm{I}}(W_1^*, W_2^*, 0; \overline{W}_1^*, \overline{W}_2^*, 0)(|\det(J_f)|^2)_{Z_0 = Z}. \tag{4.5.1}$$

而 (J_f) 具以下形式：

$$\begin{pmatrix} \partial W_1^* / \partial W_1 & 0 & 0 \\ * & \partial W_2^* / \partial W_2 & 0 \\ * & * & \partial Z^* / \partial Z \end{pmatrix}_{Z_0 = Z}$$

故

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0 = Z} = |\det(\partial W_1^* / \partial W_1)\det(\partial W_2^* / \partial W_2)\det(\partial Z^* / \partial Z)|^2_{Z_0 = Z}.$$

根据典型域熟知的理论，我们有

$$|\det(\partial Z^* / \partial Z)|^2_{Z_0 = Z} = \det(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-(m+n)}.$$

而易知 $[|\partial W_1^* / \partial W_1|_{Z_0 = Z}]^2 = \det(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-1}$，$[|\partial W_2^* / \partial W_2|_{Z_0 = Z}]^2 = \det(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-1/K}$．因此有

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0 = Z} = \det(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-(m+n+1+1/K)}. \tag{4.5.2}$$

下面的任务是确定 $K_{\mathrm{I}}(W_1^*, W_2^*, 0; \overline{W^*}_1, \overline{W^*}_2, 0)$．为了方便，下面我们以 W 代 W^*．

由于 $CE_{\mathrm{I}}(1, 1, m, n; K)$ 是 semi Reinhardt 域，根据本章第 I 节的定理 1，$CE_{\mathrm{I}}(1, 1, m, n; K)$ 的标准完备正交函数系是 $\{W_1^{j_1} W_2^{j_2} P_{ki}^{(j)}(Z)\} = \{\Phi_{j_1 j_2 ki}\}$ $(j_1, j_2, k = 0, 1, 2, \cdots; i = 1, 2, \cdots, m_k; m_k = (mn + k - 1)! \cdot [k!(mn-1)!]^{-1})$．而

$$K_{\mathrm{I}}(W_1, W_2, Z; \overline{W}_1, \overline{W}_2, \overline{Z}) = \sum |W_1^{j_1} W_2^{j_2} P_{ki}^{(j)}(Z)|^2$$

因此

$$K_{\mathrm{I}}(W_1, W_2, 0; \overline{W}_1, \overline{W}_2, 0) = \sum |W_1^{j_1} W_2^{j_2} P_{ki}^{(j)}(0)|^2$$

$$= \sum |W_1^{j_1} W_2^{j_2} P_{01}^{(j)}(0)|^2$$

$$= \sum |a_{j_1j_2} W_1^{j_1} W_2^{j_2}|^2 \tag{4.5.3}$$

$$= \sum |a_{j_1j_2}|^2 |W_1|^{2j_1} |W_2|^{2j_2}$$

下面计算 $a_{j_1j_2}$. 由于 $a_{j_1j_2} W_1^{j_1} W_2^{j_2} = \Phi_{j_1j_2 01}(j_1, j_2 = 0, 1, 2, \cdots)$ 是 $CE_1(1,1,m,n;K)$的标准完备正交函数系的一部分,因而

$$a_{j_1j_2} = \left[\int_{CE_1} |W_1|^{2j_1} |W_2|^{2j_2} \mathrm{d}V\right]^{1/2}.$$

而

$$\int_{CE_1} |W_1|^{2j_1} |W_2|^{2j_2} \mathrm{d}W_1 \mathrm{d}W_2 \mathrm{d}Z (R = [\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})]^{1/2})$$

$$= \int_{|W_1|^2 + |W_2|^{2K} < R^2} |W_1|^{2j_1} |W_2|^{2j_2} \mathrm{d}W_1 \mathrm{d}W_2 \mathrm{d}Z$$

$$(\text{Let} < W_j = r_j e^{i\theta_j}, j = 1,2 >)$$

$$= (2\pi)^2 \int_{r_1^2 + r_2^2 < R^2, r_j \geqslant 0} r_1^{2j_1+1} r_2^{2j_2+1} \mathrm{d}r_1 \mathrm{d}r_2 \mathrm{d}Z$$

$$(\text{Let} < s_1 = r_1, s_2 = r_2^K >)$$

$$= (2\pi)^2 / K \int_{s_1^2 + s_2^2 < R^2, s_j \geqslant 0} s_1^{2j_1+1} s_2^{(2j_2+2-K)/K} \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}Z$$

$$(\text{Let} < s_1 = \rho\cos\theta, s_2 = \rho\sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, 0 \leqslant \rho \leqslant R >)$$

$$= (2\pi)^2 / K \int_{R_1(m,n)} \left[\int_0^R \rho^{2(j_1+1)+2(j_2+1)/K-1} \mathrm{d}\rho\right.$$

$$\left.\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2j_1+1} (\sin\theta)^{2(j_2+1)/K-1} \mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}Z$$

$$\left[\text{因为} \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^a (\cos\theta)^b \mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a+b+2}{2}\right)}\right]$$

$$= (\pi)^2 K^{-1} \frac{\Gamma(j_1+1)\Gamma\left(\frac{j_2+1}{K}\right)}{\Gamma\left(j_1 + 1 + \frac{j_2+1}{K} + 1\right)}$$

$$\cdot \int_{R_1(m,n)} [\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})]^{j_1+1+\frac{j_2+1}{K}} \mathrm{d}Z.$$

令 $h = j_1 + 1 + \frac{j_2+1}{K}$，根据(4.1.2)，上式等于：

$$(\pi)^{2+mn}K^{-1}\frac{\Gamma(j_1+1)\Gamma\left(\frac{j_2+1}{K}\right)}{\Gamma(h+1)}\cdot\frac{\prod_{\alpha=1}^{n}\Gamma(h+\alpha)\prod_{\beta=1}^{m}\Gamma(h+\beta)}{\prod_{\gamma=1}^{m+n}\Gamma(h+\gamma)}$$

（当 $m=1$ 时，上式结果与 D'Angelo 的文[DA1]第 28 页一致.）我们有：

$$|a_{j_1j_2}|^2$$

$$= K\pi^{(mn+2)}\frac{\Gamma(h+1)\prod_{\gamma=1}^{m+n}\Gamma(h+\gamma)}{\prod_{\alpha=1}^{m}\Gamma(h+\alpha)\prod_{\beta=1}^{n}\Gamma(h+\beta)\Gamma(j_1+1)\Gamma\left(\frac{j_2+1}{K}\right)}$$

$$= K\pi^{(mn+2)}\frac{\Gamma(h+1)\prod_{\gamma=(n+1)}^{m+n}\Gamma(h+\gamma)}{\prod_{\beta=1}^{m}\Gamma(h+\beta)\Gamma(j_1+1)\Gamma(s)}. \tag{4.5.4}$$

这里，$s=(j_2+1)/K$. 而 $\frac{\prod_{\gamma=(n+1)}^{m+n}\Gamma(h+\gamma)}{\prod_{\beta=1}^{m}\Gamma(h+\beta)}$ 是 h 的 mn 次多项式，由本章第 1 节的定理 4，存在 $mn+1$ 个常数 $b_r(r=0,1,2,\cdots,mn)$ 使得

$$\frac{\prod_{\gamma=(n+1)}^{m+n}\Gamma(h+\gamma)}{\prod_{\beta=1}^{m}\Gamma(h+\beta)} = \sum_{r=0}^{mn} b_r\frac{\Gamma(h+r+1)}{\Gamma(h+1)}.$$

因而

$$|a_{j_1j_2}|^2 = K\pi^{(mn+2)}\sum_{r=0}^{mn} b_r\frac{\Gamma(j_1+1+r+1)}{\Gamma(j_1+1)\Gamma(s)}.$$

令 $t_1=|W_1|^2$，$t_2=|W_2|^2$，则由(4.5.3)式，我们有

$$K_1(W_1,W_2,0;\overline{W}_1,\overline{W}_2,0) = \frac{K}{\pi^{mn+2}}$$

$$\cdot\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{mn} b_r\left[\sum_{j_1=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j_1+r+s+2)}{\Gamma(j_1+s)\Gamma(s)}t_1^{j_1}\right]t_2^{j_2}$$

$$= K\pi^{-(mn+2)}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{mn} b_r\frac{\Gamma(s+r+2)}{\Gamma(s)}$$

$$\cdot\left[\sum_{j_1=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j_1+r+s+2)}{\Gamma(j_1+1)\Gamma(s+r+2)}t_1^{j_1}\right]t_2^{j_2}$$

$$= K\pi^{(mn+2)}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{mn} b_r\frac{\Gamma(s+r+2)}{\Gamma(s)}(1-t_1)^{(s+r+2)}t_2^{j_2}$$

$$= K\pi^{(mn+2)}\sum_{r=0}^{mn} b_r(1-t_1)^{(r+2+1/K)}$$

$$\cdot \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+r+2)}{\Gamma(s)} \left[\frac{t_2}{(1-t_1)^{1/K}} \right]^{j_2}. \tag{4.5.5}$$

但是，$\Gamma(s+r+2)/\Gamma(s)$是j_2的$r+2$次多项式，再由本章第Ⅰ节的定理4，存在$r+3$个常数$d_k(r)(k=0,1,2,\cdots,r+2)$，使得

$$\Gamma(s+r+2)/\Gamma(s) = \sum_{k=0}^{r+3} d_k(r) \frac{\Gamma(j_2+k+1)}{\Gamma(j_2+1)}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}}(W_1, W_2, 0; \overline{W}_1, \overline{W}_2, 0) \\
&= K\pi^{-(mn+2)} \sum_{r=0}^{mn+2} b_r (1-t_1)^{-(r+2+1/K)} \\
&\quad \cdot \sum_{k=0}^{r+2} d_k(r) \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+r+2)}{\Gamma(s)} \left[\frac{t_2}{(1-t_1)^{1/K}} \right]^{j_2} \\
&= K\pi^{-(mn+2)} \sum_{r=0}^{mn+2} b_r (1-t_1)^{-(r+2+1/K)} \\
&\quad \cdot \sum_{k=0}^{r+2} d_k(r) \Gamma(k+1) \left[1 - \frac{t_2}{(1-t_1)^{1/K}} \right]^{-(k+1)} \\
&= K\pi^{-(mn+2)} \sum_{r=0}^{mn+2} b_r \sum_{k=0}^{r+2} d_k(r) \Gamma(k+1) \\
&\quad \cdot [(1-t_1)^{1/K} - t_2]^{-(k+1)} (1-t_1)^{-r-2+k/K}.
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

在上式中令$t_1 = |W_1|^2, t_2 = |W_2|^2$，同时让$W_j$变回$W_j^*, j=1,2$. 并注意到$W_j^*$是$W_j$在变换$f(W_1, W_2, Z)$下的像，并令$Z_0 = Z$者. 这样，我们有

$$|W_1^*|^2 = X_1 = X_1(W_1, Z) = |W_1|^2 [\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})]^{-1},$$

$$|W_2^*|^2 = X_2 = X_2(W_2, Z) = |W_2|^2 [\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})]^{-1/K},$$

$$\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}}(W_1, W_2, 0; \overline{W}_1, \overline{W}_2, 0) \\
&= K\pi^{-(mn+2)} \sum_{r=0}^{mn+2} b_r \sum_{k=0}^{r+2} d_k(r) \Gamma(k+1) \\
&\quad \cdot [(1-X_1)^{1/K} - X_2]^{-(k+1)} (1-X_1)^{-r-2+k/K}.
\end{aligned}$$

从上式和(4.5.1)，(4.5.2)两式，我们有

$$\begin{aligned}
K_{\mathrm{I}}(W, Z; \overline{W}, \overline{Z}) &= K\pi^{-(mn+2)} \sum_{r=0}^{mn+2} b_r \sum_{k=0}^{r+2} d_k(r) \\
&\cdot \Gamma(k+1) [(1-X_1)^{1/K} - X_2]^{-(k+1)} (1-X_1)^{-r-2+k/K} \\
&\quad \cdot \det(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-(m+n+1+1/K)}
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
F(X_1, X_2) := &\sum_{r=0}^{mn+2} b_r \sum_{k=0}^{r+2} d_k(r) \Gamma(k+1) \\
&\cdot [(1-X_1)^{1/K} - X_2]^{-(k+1)} (1-X_1)^{-r-2+k/K},
\end{aligned}$$

则

$$K_1(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K\pi^{-(mn+2)}F(X_1,X_2)\det(I - Z\overline{Z}^{T})^{-(m+n+1+1/K)}.$$

这里 $F(X_1,X_2)$是在群 $\mathrm{Aut}(CE_{\mathrm{I}})$下不变的函数.

令 $|W_1|^2 = t_1$, $|W_2|^2 = t_2$,则

$$F(X_1,X_2) = F(|W_1|^2[\det(I - Z\overline{Z}^{T})]^{-1}, |W_2|^2[\det(I - Z\overline{Z}^{T})]^{-1/K})$$

$$= F(t_1[\det(I - Z\overline{Z}^{T})]^{-1}, t_2[\det(I - Z\overline{Z}^{T})]^{-1/K}) := G(t_1,t_2,Z\overline{Z}^{T}).$$

由 $CE_{\mathrm{I}}(1,1,m,n;K)$的 Bergman 核函数对 W_1 应用膨胀原理,我们得到 $CE_{\mathrm{I}}(M,1,m,n;K)$的 Bergman 核函数:

$$K\pi^{-(mn+1+M)}\frac{\partial^{M-1}}{\partial t_1^{M-1}}G(t_1,t_2,Z\overline{Z}^{T})\Big|_{t_1=|W_1|^2}$$

$$\cdot\det(I - Z\overline{Z}^{T})^{-(m+n+1+1/K)}$$

$$= K\pi^{-(mn+1+M)}\frac{\partial^{M-1}}{\partial X_1^{M-1}}F(X_1,X_2)$$

$$\cdot\det(I - Z\overline{Z}^{T})^{-(m+n+M+1/K)}.$$

这里 $|W_1|^2 = \sum_{j=1}^{M}|W_{1j}|^2$.

同样,由 $CE_{\mathrm{I}}(M,1,m,n;K)$的 Bergman 核函数对 W_2 应用膨胀原理,我们得到 $CE_{\mathrm{I}}(M,N,m,n;K)$的 Bergman 核函数:

$$K\pi^{-(mn+M+N)}\frac{\partial^{M+N-2}}{\partial t_1^{M-1}\partial t_2^{N-1}}G(t_1,t_2,Z\overline{Z}^{T})\Big|_{t_1=|W_1|^2,t_2=|W_2|^2}$$

$$\cdot\det(I - Z\overline{Z}^{T})^{-(m+n+1+1/K)}$$

$$= K\pi^{-(mn+M+N)}\frac{\partial^{M+N-2}}{\partial X_1^{M-1}\partial X_2^{N-1}}F(X_1,X_2)$$

$$\cdot\det(I - Z\overline{Z}^{T})^{-(m+n+M+N/K)}.$$

这里 $|W_2|^2 = \sum_{j=1}^{N}|W_{2j}|^2$.

V. 2. 其余三类 Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数

V.2.1 第二类 Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数

以下变换组成 $CE_{\mathrm{II}}(1,1,p;K)$的全纯自同构群(不一定是最大群!)记之为 $\mathrm{Aut}(CE_{\mathrm{II}})$:

$$\begin{cases} W_1^* = e^{i\theta_1}W_1\det(I - Z_0\overline{Z}_0)^{\frac{1}{2}}\det(I - Z\overline{Z}_0)^{-1} \\ W_2^* = e^{i\theta_2}W_2\det(I - Z_0\overline{Z}_0)^{\frac{1}{2K}}\det(I - Z\overline{Z}_0)^{-\frac{1}{K}} \\ Z^* = A(Z - Z_0)(I - \overline{Z}_0Z)^{-1}\overline{A}^{-1}. \end{cases}$$

其中 $A^{-1}A=(I-Z_0\overline{Z}_0)^{-1}$，$Z_0\in R_{\mathrm{II}}(p)$，$i=\sqrt{-1}$.

此变换把 $CE_{\mathrm{II}}(1,1,p;K)$ 的任意一点 (W_1,W_2,Z_0) 映为 $(W_1^*,W_2^*,0)$.

证：直接验证.

有了以上结果以及利用(4.2.1)就可以仿照上面的计算得到第二类 Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数的显表达式如下：

$$
\begin{aligned}
K_{\mathrm{II}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) &= \sqrt{2}^{p-p^2}[\det(I-Z\overline{Z})]^{-\left(p+2+\frac{1}{K}\right)} \\
&\cdot K\pi^{-(n+2)}\sum_{k=1}^{n} b_k\sum_{r=0}^{k+2} d_r(k)(1-X_1)^{-\left(k+2-\frac{r}{K}\right)}\Gamma(r+1) \\
&\cdot [(1-X_1)^{\frac{1}{K}}-X_2]^{-(r+1)}.
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
F(X_1,X_2):=\sum_{k=1}^{n} b_k\sum_{r=0}^{k+2} d_r(k)(1-X_1)^{-\left(k+2-\frac{r}{K}\right)} \\
\cdot\Gamma(r+1)[(1-X_1)^{\frac{1}{K}}-X_2]^{-(r+1)}.
\end{aligned}
$$

其中 $X_1=|W_1|^2[\det(I-Z\overline{Z})]^{-1}$，$X_2=|W_2|^2[\det(I-Z\overline{Z})]^{-\frac{1}{K}}$，则

$$
\begin{aligned}
K_{\mathrm{II}}(W,Z;W,Z)=[\det(I-Z\overline{Z})]^{-\left(p+2+\frac{1}{K}\right)}\sqrt{2}^{p-p^2} \\
\cdot K\pi^{-(n+2)}F(X_1,X_2).
\end{aligned}
$$

最后，由上式对 W_2 应用膨胀原理，可得 $HE_{\mathrm{II}}(1,N,p;K)$ 的 Bergman 核函数为：

$$
\sqrt{2}^{p-p^2}\pi^{-(N+n+1)}K[\det(I-Z\overline{Z})]^{-\left(p+2+\frac{N}{K}\right)}\frac{\partial^{N-1}F(X_1,X_2)}{\partial X_2^{N-1}}.
$$

其中

$$
X_2=|W_2|^2[\det(I-Z\overline{Z})]^{-\frac{1}{K}},\quad |W_2|^2=|w_{21}|^2+\cdots+|w_{2N}|^2.
$$

由此核函数再对 W_1 应用膨胀原理，可得 $HE_{\mathrm{II}}(M,N,p;K)$ 的 Bergman 核函数为：

$$
\sqrt{2}^{p-p^2}\pi^{-(N+M+n)}K[\det(I-Z\overline{Z})]^{-\left(p+1+M+\frac{N}{K}\right)}\frac{\partial^{M+N-2}F(X_1,X_2)}{\partial X_1^{M-1}\partial X_2^{N-1}}.
$$

其中 X_2 同上，而

$$
X_1=|W_1|^2[\det(I-Z\overline{Z})]^{-1},\quad |W_1|^2=|w_{11}|^2+\cdots+|w_{1M}|^2.
$$

这里 $n=\dfrac{p(p+1)}{2}$，

$$\frac{\Gamma(h+p+1)\prod_{\beta=2}^{p}\Gamma(2h+p+\beta)}{\prod_{\alpha=2}^{p}\Gamma(2h+2\alpha-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= [2h+2p-(p-1)][2h+2p-p]\cdots \\
&\cdot [2h+2p-(2p-3)][2h+2p-(p-2)] \\
&\cdot [2h+2p-(p-1)]\cdots[2h+2p-(2p-5)] \\
&\cdots[(2h+2p-3)(2h+2p-2)][2h+2p-1] \\
&\cdot (h+p)(h+p-1)\cdots(h+1)\Gamma(h+1) \\
&:= P_{21}(h)\Gamma(h+1)
\end{aligned}$$

则 $P_{21}(h)$ 是 h 的 $\frac{p^2+p}{2}$ 次多项式，常数 $b_j\left(j=0,1,\cdots\cdots,\frac{p^2+p}{2}\right)$ 中，$b_0=0$，其余的 b_j 可由以下递推公式得到：

$$b_j=\left[P_{21}(-j-1)-\sum_{k=0}^{j-1}b_k(-1)^k\Gamma(j+1)/\right.$$

$$\left.\cdot\Gamma(j-k+1)\right]/[(-1)^j\Gamma(j+1)].$$

令 $P_{22}=\dfrac{\Gamma\left(\frac{j_2+1}{K}+k+2\right)}{\Gamma\left(\frac{j_2+1}{K}\right)}$，它是 j_2 的 $k+2$ 次多项式．常数 $d_r(k)$，$r=0,1,2,\cdots,k+2$ 中，$d_0(k)=0$，其余的 $d_j(k)$ 由以下递推公式决定：

$$d_j(k)=\left[P_{22}(-j-1)-\sum_{l=0}^{j-1}d_l(k)(-1)^l\Gamma(j+1)/\right.$$

$$\left.\cdot\Gamma(j-l+1)\right]/[(-1)^j\Gamma(j+1)].$$

V.2.2　第三类 Cartan Egg 域的 Bergman 核函数的显表达式

下面的变换为域 $CE_{\mathrm{III}}(1,1,q;K)$ 的全纯自同构：

$$\begin{cases}
W_1^*=e^{i\theta_1}W_1\det(I-Z_0\overline{Z_0}^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}}\det(I-Z\overline{Z_0}^{\mathrm{T}})^{-1}\\
W_2^*=e^{i\theta_2}W_2\det(I-Z_0\overline{Z_0}^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2K}}\det(I-Z\overline{Z_0}^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{K}}\\
Z^*=A(Z-Z_0)(I-\overline{Z_0}^{\mathrm{T}}Z)^{-1}\overline{A}^{-1}
\end{cases}$$

其中 $\theta_j\in[0,2\pi)$，$j=1,2$；$A^{\mathrm{T}}\overline{A}=(I-Z_0\overline{Z_0}^{\mathrm{T}})^{-1}$，$Z_0\in R_{\mathrm{III}}(q)$，$i=\sqrt{-1}$．

此变换把 $CE_{\mathrm{III}}(1,1,p;K)$ 的任意一点 (W_1,W_2,Z_0) 映为 $(W_1^*,W_2^*,0)$．

证：可由直接的验算证明．

所有上述变换组成一个群，是否为域 $CE_{\mathrm{III}}(1,1,;K)$ 的全纯自同构最大群尚待证明．但我们现在并不要求它是最大群．

有了以上结果以及利用本章第Ⅲ节定理1，就可以求得第三类 Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数的显表达式为：

$$
\begin{aligned}
K_{\mathrm{III}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) &= [\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-(q+1/K)} \\
&\cdot K\pi^{-(n+2)}\sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{r=0}^{k+2} d_r(k)(1-X_1)^{-(k+2-r/K)} \\
&\cdot \Gamma(r+1)[(1-X_1)^{1/K}-X_2]^{-(r+1)}.
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
F(X_1,X_2) := \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{r=0}^{k+2} d_r(k)(1-X_1)^{-(k+2-r/K)} \\
\cdot \Gamma(r+1)[(1-X_1)^{1/K}-X_2]^{-(r+1)}.
\end{aligned}
$$

其中 $X_1=|W_1|^2[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-1}$，$X_2=|W_2|^2[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-\frac{1}{K}}$，则

$$
K_{\mathrm{III}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = [\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-\left(q+\frac{1}{K}\right)}K\pi^{-(n+2)}F(X_1,X_2).
$$

最后，由上式对 W_2 应用膨胀原理，可得 $CE_{\mathrm{III}}(1,N,q;K)$ 的 Bergman 核函数为：

$$
\pi^{-(N+n+1)}K[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-\left(q+\frac{N}{K}\right)}\frac{\partial^{N-1}F(X_1,X_2)}{\partial X_2^{N-1}}.
$$

其中

$$
X_2=|W_2|^2[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-\frac{1}{K}},\quad |W_2|^2=|w_{21}|^2+\cdots+|w_{2N}|^2.
$$

由此核函数再对 W_1 应用膨胀原理，可得 $CE_{\mathrm{III}}(M,N,q;K)$ 的 Bergman 核函数为：

$$
\pi^{-(N+M+n)}K[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-\left(q+M-1+\frac{N}{K}\right)}\frac{\partial^{M+N-2}F(X_1,X_2)}{\partial X_1^{M-1}\partial X_2^{N-1}}.
$$

$$
X_1=|W_1|^2[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-1},\quad |W_1|^2=|w_{11}|^2+\cdots+|w_{1M}|^2.
$$

注意：这里的 $n=\dfrac{q(q-1)}{2}$．令 $P_{31}(h)=\dfrac{\prod_{l=0}^{q-2}\Gamma(2h+q+l)}{\prod_{j=1}^{q-1}\Gamma(2h+2j-1)}$，易见，$P_{31}(h)$ 为 h 的 n 次多项式．常数 b_j，$j=0,1,\cdots,n$ 中，$b_0=0$，其余的 b_j 由以下的递推公式决定：

$$
\begin{aligned}
b_j = \Big[P_{31}(-j-1) - \sum_{k=0}^{j-1} b_k(-1)^k\Gamma(j+1)/ \\
\cdot \Gamma(j-k+1)\Big]/[(-1)^j\Gamma(j+1)].
\end{aligned}
$$

令 $P_{32}(j_2)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{j_2+1}{K}+k+2\right)}{\Gamma\left(\frac{j_2+1}{K}\right)}$，它是 j_2 的 $k+2$ 次多项式. 常数 $d_r(k)$，$r=0,1,2,\cdots,k+2$，中 $d_0(k)=0$，其余的 $d_j(k)$ 由以下递推公式决定：

$$d_j(k)=\left[P_{32}(-j-1)-\sum_{l=0}^{j-1}d_l(k)(-1)^l\Gamma(j+1)/\right.$$

$$\left.\cdot\,\Gamma(j-l+1)\right]/[(-1)^j\Gamma(j+1)].$$

V.2.3 第四类 Cartan Egg 域的 Bergman 核函数的显表达式

以下变换组成 $CE_{\mathrm{IV}}(M,N,n;k)$ 的全纯自同构群，记之为 $\mathrm{Aut}(CE_{\mathrm{IV}})$：

$$\begin{cases} W_1^*=e^{i\theta_1}W_1\left\{\left[\left(\dfrac{1+ZZ'}{2},\dfrac{1-ZZ'}{2i}\right)-ZX_0'\right]A(1,i)'\right\}^{-1}, \\ W_2^*=e^{i\theta_2}W_2\left\{\left[\left(\dfrac{1+ZZ'}{2},\dfrac{1-ZZ'}{2i}\right)-ZX_0'\right]A(1,i)'\right\}^{-\frac{1}{k}}, \\ Z^*=\left\{\left[\left(\dfrac{1+ZZ'}{2},\dfrac{1-ZZ'}{2i}\right)-ZX_0'\right]A(1,i)'\right\}^{-1} \\ \qquad\cdot\left[Z-\left(\dfrac{1+ZZ'}{2},\dfrac{1-ZZ'}{2i}\right)X_0\right]D, \end{cases}$$

其中 $AA'=(I-X_0X_0')^{-1}$，$DD'=(I-X_0'X_0)^{-1}$，$Z_0\in R_{\mathrm{IV}}(n)$，$i=\sqrt{-1}$，

$$X_0=\frac{1}{1-|Z_0Z_0'|^2}\begin{bmatrix}(\overline{Z_0Z_0'}-1)Z_0+(Z_0Z_0'-1)\overline{Z_0} \\ i(Z_0Z_0'+1)\overline{Z_0}-i(\overline{Z_0Z_0'}+1)Z_0\end{bmatrix}.$$

此变换将 $(W_1,W_2,Z_0)\in CE_{\mathrm{IV}}$ 映成 $(W_1^*,W_2^*,0)$.

有了以上结果以及本章第Ⅳ节定理1，就可以求得第四类 Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数的显表达式为：

$$K_{\mathrm{IV}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z})$$

$$=\frac{K2^{n-1}}{\pi^{n+2}}\sum_{r=0}^{n+2}b_r\Gamma(r+1)[(1-X_1)^{1/K}-X_2]^{-(r+1)}(1-X_1)^{-n-2+r/K}$$

$$(1+|ZZ'|^2-2Z\overline{Z}')^{-(n+1+1/K)},$$

令

$$F(X_1,X_2)=2^{n-1}\sum_{r=0}^{n+2}b_r\Gamma(r+1)[(1-X_1)^{1/K}$$

$$-X_2|^{-(r+1)}(1-X_1)^{-n-2+r/K},$$

则

$$K_{\mathrm{IV}}(W,Z;\overline{W},\overline{Z}) = K\pi^{-(n+2)}F(X_1,X_2)$$
$$\cdot(1+|ZZ'|^2-2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-(n+1+1/K)}$$

利用膨胀原理，可得 $CE_{\mathrm{IV}}(M,N,n;K)$的 Bergman 核函数

$$K_{\mathrm{IV}}^{(M,N,n;K)}(W,Z;\overline{W},\overline{Z})$$
$$=\frac{K}{\pi^{n+M+N}}\frac{\partial^{M+N-2}}{\partial X_1^{M-1}\partial X_2^{N-1}}F(X_1,X_2)(1+|ZZ'|^2-2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-(n+M+N/K)}.$$

其中

$X_1=|W_1|^2[1+|ZZ'|^2-2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}]^{-1}$, $|W_1|^2=|w_{11}|^2+\cdots+|w_{1M}|^2$,

$X_2=|W_2|^2[1+|ZZ'|^2-2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}}]^{-\frac{1}{k}}$, $|W_2|^2=|w_{21}|^2+\cdots+|w_{2N}|^2$.

令 $P_4(j_2)=\Gamma\left(2+\frac{j_2+1}{K}+n\right)/\Gamma\left(\frac{j_2+1}{K}\right)$，它是 j_2 的 $n+2$ 次多项式，在常数 $b_j, j=0,1,\cdots,n+2$ 中，$b_0=0$，其余的 b_j 由以下递推公式决定：

$$b_j=\left[P_4(-j-1)-\sum_{k=0}^{j-1}b_k(-1)^k\Gamma(j+1)/\right.$$
$$\left.\cdot\Gamma(j-k+1)\right]/[(-1)^j\Gamma(j+1)].$$

本节内容取自文献[YWZ,YZg1,YW8,YW9,YWZG,YWR].

Ⅵ. 华罗庚域的 Bergman 核函数的显表达式

最近，殷慰萍又引进了更一般的域，称为华罗庚域：

$HE_{\mathrm{I}}(N_1,\cdots,N_r,m,n;p_1,\cdots,p_r):=\{w_{(j)}\in\mathbf{C}^{N_j}$,

$Z\in R_{\mathrm{I}}(m,n):\sum_{j=1}^r\|w_{(j)}\|^{2p_j}<\det(I-Z\overline{Z}')\}$,

$HE_{\mathrm{II}}(N_1,\cdots,N_r,p;p_1,\cdots,p_r):=\{w_{(j)}\in\mathbf{C}^{N_j}$,

$Z\in R_{\mathrm{II}}(p):\sum_{j=1}^r\|w_{(j)}\|^{2p_j}<\det(I-Z\overline{Z}')\}$,

$HE_{\mathrm{III}}(N_1,\cdots,N_r,q;p_1,\cdots,p_r):=\{w_{(j)}\in\mathbf{C}^{N_j}$,

$Z\in R_{\mathrm{III}}(q):\sum_{j=1}^r\|w_{(j)}\|^{2p_j}<\det(I-Z\overline{Z}')\}$,

$HE_{\mathrm{IV}}(N_1,\cdots,N_r,n;p_1,\cdots,p_r):=\{w_{(j)}\in\mathbf{C}^{N_j}$,

$Z\in R_{\mathrm{IV}}(n):\sum_{j=1}^r\|w_{(j)}\|^{2p_j}<1-2Z\overline{Z}'+|ZZ'|^2,K>0\}$.

这里，$\| w_{(j)} \|^2 = |w_{j1}|^2 + \cdots + |w_{jN_j}|^2$.

从华罗庚域的表达式，我们可以看出，当 $r=1, p_1 = K$ 时，华罗庚域就变成超 Cartan 域(或称为 Cartan-Hartogs 域). 当 $r=2, p_1=1, p_r = K$ 时，华罗庚域就是 Cartan-Egg 域. 由此可见，超 Cartan 域和 Cartan-Egg 域都是华罗庚域的特殊情况.

上面已经讲过，求 Bergman 核函数的华罗庚方法只对齐性域适用；而级数法只对 Reinhardt 域适用. 由于域 $HE_A(A = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV})$不是齐性域，因而利用全纯自同构群来求 Bergman 核函数的华罗庚方法行不通. 同时，由于这些域也不是 Reinhardt 域，因而不能像对 Reinhardt 域那样用无穷级数求和的方法来其得到 Bergman 核函数的显表达式. 现在的方法是在这两种方法基础上的创新. 关键之处有两点：一是给出华罗庚域的全纯自同构群，使得其中每一元素 $f(w,z)$将形为(w,z)的内点映为$(w^*, 0)$，这样，Bergman 核函数 $K((w,z);\overline{(w,z)}) = |\det(J_f)|^2 K((w^*,0);\overline{(w^*,0)})$，这里$(J_f)$表示变换 f 的雅可比矩阵 $\det(J_f)$表示(J_f)的行列式，它是完全可以求出来的. 由此可知，问题就归结为当 $z^*=0$ 时求出 $K((w^*,0);\overline{(w^*,0)})$；其二是引进 Semi-Reinhardt 域的概念，求出 Semi-Reinhardt 域的完备标准正交函数系，而华罗庚域是 Semi-Reinhardt 域，利用这个完备标准正交函数系就可以知道 $K((w^*,0);\overline{(w^*,0)})$恰巧是一个关于$(|w_1^*|, \cdots, |w_r^*|)$的多重的无穷级数，然后通过无穷级数求和的方法来确定. 严格而言，由于多变量的超几何函数本质上是一个无穷级数，因而当 $p_1, \cdots, p_r$ 为正整数时，虽然其 Bergman 核函数能用超几何函数表达. 还不能认为得到了 Bergman 核函数的显表达式. 但由于超几何函数是一个特殊函数，有一些较好的性质，因而用超几何函数来表达 Bergman 核函数也是有意义的.

下面主要是给出第三类华罗庚域在以下三种情况下的 Bergman 核函数的显表达式. 这三种情况我们猜想已经包含了能显式求出 Bergman 核函数的第三类华罗庚域的所有可能的情况. 第三类华罗庚域由下式定义，并简记为 HE_{III}：

$$HE_{\mathrm{III}}(N_1, \cdots, N_r, q; p_1, \cdots, p_r) := \{ w_{(j)} \in \mathbf{C}^{N_j},$$

$$Z \in R_{\mathrm{III}}(q) : \sum_{j=1}^{r} \| w_{(j)} \|^{2p_j} < \det(I + Z\bar{Z}) \},$$

其中 $w_{(j)} = (w_{j1}, \cdots, w_{jN_j})$, $\| w_{(j)} \|^2 = |w_{j1}|^2 + \cdots + |w_{jN_j}|^2$, $(j = 1, \cdots, r)$. $N_1, \cdots, N_r, q$ 为自然数，$p_1, \cdots, p_r$ 为正数；$R_{\mathrm{III}}(q)$是第三类典型域. 该域在以下三种情况时能求得其 Bergman 核函数的显表达式：

(1) 当 $p_1, \cdots, p_r$ 为正整数；

(2) 当$\dfrac{1}{p_1}, \cdots, \dfrac{1}{p_{r-1}}$为正整数，$p_r$ 为正实数；

(3) 当$\dfrac{1}{p_1}, \cdots, \dfrac{1}{p_r}$为正整数.

情况(3)是情况(2)的特殊情况，因此真正能求出 Bergman 核函数的显表达式的就是情况(2)，但此时包含了能显式求出 Bergman 核函数的第三类华罗庚域的所有可能的情况(这是我们的猜想).

在计算域 HE_{III} 的 Bergman 核函数之前，我们先来了解一下域 HE_{III}，从它的表达式，可以看出，当 $r=1$，$p_1=K$ 时，域 HE_{III} 就变成第三类超 Cartan 域. 当 $r=2$，$p_1=1$，$p_2=K$，时，域 HE_{III} 就是第三类 Cartan-Egg 域.

Ⅵ. 1. 预 备 定 理

Ⅵ.1.1　定理 1. 以下变换属于 HE_{III} 的全纯自同构群，记之为 $\mathrm{Aut}(HE_{\mathrm{III}})$：

$$\begin{cases} w_{(1)}^* = w_{(1)}\det(I+Z_0\overline{Z}_0)^{1/2p_1}\det(I+Z\overline{Z}_0)^{-1/p_1} \\ w_{(2)}^* = w_{(2)}\det(I+Z_0\overline{Z}_0)^{1/2p_2}\det(I+Z\overline{Z}_0)^{-1/p_2} \\ \cdots\cdots \\ w_{(r)}^* = w_{(r)}\det(I+Z_0\overline{Z}_0)^{1/2p_r}\det(I+ZZ_0)^{-1/p_r} \\ Z^* = A(Z-Z_0)(I+\overline{Z}_0Z)\overline{A}^{-1}. \end{cases} \tag{4.6.1}$$

其中 $Z_0 \in R_{\mathrm{III}}(q)$，$A$ 是 $q\times q$ 阶矩阵，且满足 $\overline{A}'A=(I+Z_0\overline{Z}_0)^{-1}$，$w_{(1)}^*, w_{(2)}^*, \cdots, w_{(r)}^*$ 分别是 $N_1, N_2, \cdots, N_r$ 维向量.

证: 很显然，(4.6.1)式中的任一变换是全纯变换. 下面我们证明(4.6.1)中的任一变换是 HE_{III} 的自同构. 经过计算可知

$$I+Z^*\overline{Z}^* = (\overline{A}')^{-1}(I+Z\overline{Z}_0)^{-1}(I+Z\overline{Z})(I+Z_0\overline{Z})^{-1}A^{-1},$$

所以

$$\det(I+Z^*\overline{Z}^*) = \det(I+Z_0\overline{Z}_0)\,|\det(I+Z_0\overline{Z}_0)|^{-2}\det(I+Z\overline{Z}).$$

则

$$\sum_{j=1}^{r}\|w_{(j)}^*\|^{2p_j} - \det(I+Z^*\overline{Z}^*)$$

$$=\Big(\sum_{j=1}^{r}\|w_{(j)}\|^{2p_j} - \det(I+Z\overline{Z})\Big)\det(I+Z_0\overline{Z}_0)\,|\det(I+Z\overline{Z}_0)|^{-2}.$$

这说明(4.6.1)中的任一变换把 HE_{III} 变为其自己. 注意：$\mathrm{Aut}(HE_{\mathrm{III}})$ 中的

任意变换把形为(w, z_0)的内点变为形为$(w^*, 0)$的点，而下边就用到了这个事实．并不要求 $\mathrm{Aut}(HE_{\mathrm{III}})$是一个群．

Ⅵ.1.2　引理 1．［FH］假如 $f(z)=\sum_{\alpha} C_\alpha z^\alpha$ 是一个在原点的邻域内解析的函数，则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\geqslant 0} C_{\alpha_1 q_1\cdots\alpha_m q_m} z_1^{\alpha_1 q_1}\cdots z_m^{\alpha_m q_m}\\
&=\frac{1}{\prod_{l=1}^m q_l}\sum_{j_1=1}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_m=1}^{q_m-1} f(\omega_1^{j_1} z_1,\cdots,\omega_m^{j_m} z_m).
\end{aligned}
\tag{4.6.2}
$$

其中，$\omega_j=\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}/q_j}$，$(j=1,2,\cdots,m)$，$q_1,q_2,\cdots,q_m$ 是正整数．

Ⅵ.1.3　引理 2．对于任意 $s>0$，

$$
\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\geqslant 0}\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i+s\right)}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\cdots y_m^{\alpha_m}=\frac{\Gamma(s)}{\left(1-\sum_{l=1}^m y_l\right)^s}.
$$

其中，$y\in\mathbf{C}^m$，且满足$\left|\sum_{l=1}^m y_l\right|<1$．

引理 3．　令 $R>0$，$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{rN_r}$ 是非负实数，则

$$
\begin{aligned}
&\int_{|w_{(1)}|^{2p_1}+|w_{(2)}|^{2p_2}+\cdots+|w_{(r)}|^{2p_r}<R}|w_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}|w_{(2)}|^{2\alpha_{(2)}}\cdots\\
&\cdot|w_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}\mathrm{d}w\\
&=\frac{\pi^n}{\prod_{j=1}^r p_j}R^{\sum_{j=1}^r\sum_{i=1}^{N_j}\frac{\alpha_{ji}}{p_j}+\sum_{j=1}^r\frac{N_j}{p_j}}\\
&\cdot\frac{\prod_{j=1}^r\Gamma((|\alpha_{(j)}|+N_j)/p_j)\alpha_{(j)}!}{\Gamma\left(1+\sum_{j=1}^r(|\alpha_{(j)}|+N_j)/p_j\right)}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^r\Gamma(|\alpha_{(j)}|+N_j)}.
\end{aligned}
\tag{4.6.3}
$$

其中，

$$
\begin{cases}
w_{(1)}=(w_{11},w_{12},\cdots,w_{1N_1}), & \alpha_{(1)}=(\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1N_1}),\\
w_{(2)}=(w_{21},w_{22},\cdots,w_{2N_2}), & \alpha_{(2)}=(\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2N_2}),\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
w_{(r)}=(w_{r1},w_{r2},\cdots,w_{rN_r}), & \alpha_{(r)}=(\alpha_{r1},\alpha_{r2},\cdots,\alpha_{rN_r}),
\end{cases}
$$

$$
|w_{(j)}|^{2\alpha_{(j)}}=|w_{j1}|^{2\alpha_{j1}}\cdots|w_{jN_j}|^{2\alpha_{jN_j}},\ |\alpha_{(j)}|=\alpha_{j1}+\alpha_{j2}+\cdots+\alpha_{jN_j},
$$

$$
\alpha_{(j)}!=\alpha_{j1}!\alpha_{j2}!\cdots\alpha_{jN_j}!(j=1,\cdots,r),N_1+\cdots+N_r=n.
$$

证：作变换：

$$\begin{cases} w_{(1)} = z_{(1)} R^{\frac{1}{2p_1}}, \\ w_{(2)} = z_{(2)} R^{\frac{1}{2p_2}}, \\ \cdots\cdots \\ w_{(r)} = z_{(r)} R^{\frac{1}{2p_r}}, \end{cases}$$

(4.6.3)式左边可变为

$$R^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=1}^{N_i}\frac{\alpha_{il}}{p_i}+\sum_{i=1}^{r}\frac{N_i}{p_i}}\int_{\|z_{(1)}\|^{2p_1}+\cdots+\|z_{(r)}\|^{2p_r}<1}|z_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}|z_{(2)}|^{2\alpha_{(2)}}\cdots |z_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}dz.$$

下面只需计算

$$\int_{\|z_{(1)}\|^{2p_1}+\cdots+\|z_{(r)}\|^{2p_r}<1}|z_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}|z_{(2)}|^{2\alpha_{(2)}}\cdots|z_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}dz.$$

令 $z_{(j)}=t_{(j)}e^{i\theta}$，则

$$\int_{\|z_{(1)}\|^{2p_1}+\cdots+\|z_{(r)}\|^{2p_r}<1}|z_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}|z_{(2)}|^{2\alpha_{(2)}}\cdots|z_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}dz$$

$$=(2\pi)^n\int_{\|t_{(1)}\|^{2p_1}+\cdots+\|t_{(r)}\|^{2p_r}<1}t_{(1)}^{2\alpha_{(1)}+1}t_{(2)}^{2\alpha_{(2)}+1}\cdots t_{(r)}^{2\alpha_{(r)}+1}dt.$$

其中 $t_{(j)}=(t_{j1},\cdots,t_{jN_j})$, $j=1,\cdots,r$. 再作变换：

$$\begin{cases} t_{r1}=\rho_r w_{r1}, \\ t_{r2}=\rho_r w_{r2}, \\ \cdots\cdots \\ t_{rN_r}=\rho_r w_{rN_r}. \end{cases}$$

$$\int_{\|z_{(1)}\|^{2p_1}+\cdots+\|z_{(r)}\|^{2p_r}<1}|z_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}|z_{(2)}|^{2\alpha_{(2)}}\cdots|z_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}dz$$

$$=(2\pi)^n\int_{\|t_{(1)}\|^{2p_1}+\cdots+\|t_{(r-1)}\|^{2p_{r-1}}+\rho^{2p_r}<1}t_{(1)}^{2\alpha_{(1)}+1}\cdots t_{(r-1)}^{2\alpha_{(r-1)}+1}\rho_r^{2|\alpha_{(r)}|+2N_r-1}$$

$$\cdot dt_{(1)}\cdots dt_{(r-1)}d\rho_r\int_{S^+_{N_r-1}}w^{2\alpha_{(r)}+1}d\sigma(w)$$

$$=(2\pi)^n\frac{\beta(\alpha_{(r)}+1)}{2^{(N_r-1)}}\int_{\|t_{(1)}\|^{2p_1}+\cdots+\|t_{(r-1)}\|^{2p_{r-1}}+\rho^{2p_r}<1}t_{(1)}^{2\alpha_{(1)}+1}\cdots t_{(r-1)}^{2\alpha_{(r-1)}+1}$$

$$\cdot\rho_r^{2|\alpha_{(r)}|+2N_r-1}dt_{(1)}\cdots dt_{(r-1)}d\rho_r.$$

由[DA1]知，

$$\beta(\alpha)=\frac{\prod\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(|\alpha_i|)}.$$

如此这样做下去，我们就可以得到：

$$\int_{|z_{(1)}|^{2p_1}+\cdots+|z_{(r)}|^{2p_r}<1} |z_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}} |z_{(2)}|^{2\alpha_{(2)}} \cdots |z_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}} dz$$

$$= \frac{\beta(\alpha_{(1)}+1)}{2^{N_1-1}} \cdots \frac{\beta(\alpha_{(r)}+1)}{2^{N_r-1}} (2\pi)^n \int \rho_1^{2|\alpha_{(1)}|+2N_1-1} \cdots$$

$$\cdot \rho_r^{2|\alpha_{(r)}|+2N_r-1} d\rho_1 \cdots d\rho_r$$

$$= \frac{(2\pi)^n}{\prod_{j=1}^r p_j} \frac{\beta(\alpha_{(1)}+1)}{2^{N_1-1}} \cdots \frac{\beta(\alpha_{(r)}+1)}{2^{N_r-1}}$$

$$\cdot \int_{x_1^2+\cdots+x_r^2<1} x_1^{\frac{2|\alpha_{(1)}|+2N_1}{p_1}-1} \cdots x_r^{\frac{2|\alpha_{(r)}|+2N_r}{p_r}-1} dx.$$

进一步可得：

$$\int_{|z_{(1)}|^{2p_1}+\cdots+|z_{(r)}|^{2p_r}<1} |z_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}} \cdots |z_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}} dz$$

$$= \frac{\pi^n}{\prod_{j=1}^r p_j} \cdot \frac{\prod_{j=1}^r \Gamma\left(\frac{|\alpha_{(j)}|+N_j}{p_j}\right)\alpha_{(j)}!}{\Gamma\left(1+\sum_{j=1}^r \frac{|\alpha_{(j)}|+N_j}{p_j}\right)\prod_{j=1}^r \Gamma(|\alpha_{(j)}|+N_j)}.$$

这样就证明了引理 3.

Ⅵ. 2. Bergman 核函数的计算

现在，我们来计算 HE_{III} 的 Bergman 核函数的显式表达式. 令 $K(w, Z; \overline{w}, \overline{Z})$ 为 HE_{III} 的 Bergman 核函数($w=(w_{(1)}, w_{(2)}, \cdots, w_{(r)})$). 由于对于每一个任意固定的点$(w_0, Z_0) \in HE_{\mathrm{III}}$，存在$(w^*, Z^*)=f(w, Z) \in \mathrm{Aut}(HE_{\mathrm{III}})$使得 $f(w_0, Z_0)=(w_0^*, 0)$. 由 Bergman 核函数性质可知：

$$K(w_0, Z_0; \overline{w}_0, \overline{Z}_0) = K(w_0^*, 0; \overline{w}_0^*, 0) |\det(J_f)|^2_{z=z_0}.$$

其中 J_f 是变换 f 的雅可比(Jacobi)矩阵.

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_{(1)}^*}{\partial w_{(1)}} & * & \cdots & * & * \\ 0 & \frac{\partial w_{(2)}^*}{\partial w_{(2)}} & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial w_{(r)}^*}{\partial w_{(r)}} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial Z^*}{\partial Z} \end{pmatrix}_{Z=Z_0}. \tag{4.6.4}$$

由本节Ⅵ.1的定理1可知：

$$\frac{\partial w_{(l)}^*}{\partial w_{(l)}}\Big|_{Z=Z_0} = \det(I+Z_0\overline{Z}_0)^{\frac{N_l}{2p_l}},\ (l=1,2,\cdots,r),$$
$$\frac{\partial Z^*}{\partial Z}\Big|_{Z=Z_0} = [A'\times A']_{sk}. \tag{4.6.5}$$

于是

$$|\det(J_f)|^2_{z=z_0} = \det(I+Z_0\overline{Z}_0)^{-(\sum_{l=1}^r \frac{N_l}{p_l}+q-1)},$$

因而

$$K(w_0,Z_0;\overline{w_0},\overline{Z}_0) = K(w_0^*,0;\overline{w_0^*},0)\det(I+Z_0\overline{Z}_0)^{-(\sum_{l=1}^r\frac{N_l}{p_l}+q-1)}. \tag{4.6.6}$$

由于(w_0,z_0)是域$HE_{Ⅲ}$的任意一点，将它改为(w,z)，则域$HE_{Ⅲ}$的Bergman核函数为：

$$K(w,Z;\overline{w},\overline{Z}) = K(w^*,0;\overline{w^*},0)\det(I+Z\overline{Z})^{-(\sum_{l=1}^r\frac{N_l}{p_l}+q-1)}. \tag{4.6.7}$$

只要求出$K(w^*,0;\overline{w}^*,0)$，则$HE_{Ⅲ}$的Bergman核函数的显表达式就完全确定了. 为方便起见，将w^*书为w. 由第4章第Ⅰ节中的定理1可知$\{w_{(1)}^{a_{(1)}},\cdots,w_{(r)}^{a_{(r)}}P_{ki}^{(a)}(Z)\}$是域$HE_{Ⅲ}$的标准正交系，$P_{ki}^{(a)}(Z)$是关于$z_{ij}$的$k$阶多项式. $a=(a_{(1)},a_{(2)},\cdots,a_{(r)})$，$(1\leqslant i<j\leqslant q)$.

由Bergman核函数的定义，有

$$K(w,0;\overline{w},0) = \sum_{a\geqslant 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}|w_{(1)}|^{2a_{(1)}}\cdots|w_{(r)}|^{2a_{(r)}}|P_{ki}^{(a)}(0)|^2, \tag{4.6.8}$$

$$\int_{HE_{Ⅲ}}|w_{(1)}^{a_{(1)}}|^2\cdots|w_{(r)}^{a_{(r)}}|^2|P_{01}^{(a)}(0)|^2\mathrm{d}V_{HE_{Ⅲ}} = 1. \tag{4.6.9}$$

因此，有

$$\int_{HE_{Ⅲ}}|w^a|^2|P_{01}^{(a)}(0)|^2\mathrm{d}V_{HE_{Ⅲ}} = 1. \tag{4.6.10}$$

于是

$$|P_{01}^{(a)}(0)|^2 = \frac{1}{\int_{HE_{Ⅲ}}|w^a|^2\mathrm{d}V_{HE_{Ⅲ}}}. \tag{4.6.11}$$

令

$$a_{a_{(1)},a_{(2)},\cdots,a_{(r)}} = |P_{01}^{(a)}(0)|^2.$$

下面将计算$\int_{HE_{\mathrm{III}}}|w^{\alpha}|^{2}\mathrm{d}V_{HE_{\mathrm{III}}}$.

$$\int_{HE_{\mathrm{III}}}|w^{\alpha}|^{2}\mathrm{d}V_{HE_{\mathrm{III}}}$$

$$=\int_{Z\in R_{\mathrm{III}}(q)}\left(\int_{\|w_{(1)}\|^{2p_1}+\cdots+|w_{(r)}|^{2p_r}<\det(I+Z\bar{Z})}|w_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdot|w_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}Z. \tag{4.6.12}$$

由本节Ⅵ.1的引理3上式可得

$$\frac{\pi^{n}}{\prod_{j=1}^{r}p_j}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{|\alpha_{(j)}|+N_j}{p_j}\right)\alpha_{(j)}!}{\Gamma\left(1+\sum_{j=1}^{r}\frac{|\alpha_{(j)}|+N_j}{p_j}\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(|\alpha_{(j)}|+N_j)}$$

$$\cdot\int_{Z\in R_{\mathrm{III}}(q)}\det(I+Z\bar{Z})^{\sum_{j=1}^{r}\frac{|\alpha_{(j)}|+N_j}{p_j}}\mathrm{d}Z. \tag{4.6.13}$$

再由本章第Ⅲ节的定理1,可以进一步化简上式为:

$$\frac{\pi^{n}}{\prod_{j=1}^{r}p_j}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{|\alpha_{(j)}|+N_j}{p_j}\right)\alpha_{(j)}!}{\Gamma(1+\lambda)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(|\alpha_{(j)}|+N_j)}$$
$$\cdot\pi^{q(q-1)/2}\frac{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+2l-3)}{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+q+l-2)}, \tag{4.6.14}$$

其中$\lambda=\sum_{j=1}^{r}\frac{|\alpha_{(j)}|+N_j}{p_j}$,令$C=\frac{\prod_{j=1}^{r}p_j}{\pi^{n+q(q-1)/2}}$,则

$$a_{\alpha_{(1)},\alpha_{(2)},\cdots,\alpha_{(r)}}=C\frac{\Gamma(1+\lambda)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(|\alpha_{(j)}|+N_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{|\alpha_{(j)}|+N_j}{p_j}\right)\alpha_{(j)}!}$$
$$\cdot\frac{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+q+l-2)}{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+2l-3)}. \tag{4.6.15}$$

令

$$f(\lambda)=\frac{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+q+l-2)}{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+2l-3)}$$

$$= \prod_{l=2}^{q}[(2\lambda + q + l - 3)\cdots(2\lambda + 2l - 3)]$$

$$= b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{q(q-1)}{2}} b_k(\lambda + 1)(\lambda + 2)\cdots(\lambda + k)$$

$$= b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{q(q-1)}{2}} b_k \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{\Gamma(\lambda + 1)}, \tag{4.6.16}$$

通过计算,有

$$b_0 = f(-1) = 0, b_j = \left[f(-j-1) - \sum_{k=0}^{j-1} b_k(-1)^k \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-k+1)}\right] /$$

$$\cdot [(-1)^j\Gamma(j+1)], j = 1,\cdots,\frac{q(q-1)}{2}. \tag{4.6.17}$$

重新把 $a_{\alpha_{(1)},\alpha_{(2)},\cdots,\alpha_{(r)}}$ 改写一下:

$$a_{\alpha_{(1)},\alpha_{(2)},\cdots,\alpha_{(r)}} = C\frac{\Gamma(1+\lambda)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(|\alpha_{(j)}| + N_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{|\alpha_{(j)}| + N_j}{p_j}\right)\alpha_{(j)}!}\sum_{k=1}^{\frac{q(q-1)}{2}} b_k \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{\Gamma(\lambda + 1)}$$

$$= C\sum_{k=1}^{\frac{q(q-1)}{2}} \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{|\alpha_{(j)}| + N_j}{p_j} + k + 1\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(|\alpha_{(j)}| + N_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{|\alpha_{(j)}| + N_j}{p_j}\right)\alpha_{(j)}!}, \tag{4.6.18}$$

所以有

$$K(w,0;\overline{w},0)$$

$$= C\sum_{k=1}^{q(q-1)/2} b_k \sum_{\alpha\geqslant 0} \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{|\alpha_{(j)}| + N_j}{p_j} + k + 1\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(|\alpha_{(j)}| + N_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{|\alpha_{(j)}| + N_j}{p_j}\right)\alpha_{(j)}!}$$

$$\cdot |w_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}\cdots|w_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}. \tag{4.6.19}$$

下面对此表达式进行简单的变形,令

$$K_1(w,0;\overline{w},0)$$

$$= \sum_{\alpha\geqslant 0} \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{|\alpha_{(j)}| + N_j}{p_j} + k + 1\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(|\alpha_{(j)}| + N_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{|\alpha_{(j)}| + N_j}{p_j}\right)\alpha_{(j)}!}$$

$$\cdot |w_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}\cdots|w_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}.$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}\sum_{|\alpha_{(1)}|=k_1,\cdots,|\alpha_{(r)}|=k_r}$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{k_j+N_j}{p_j}+k+1\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(k_j+N_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{k_j+N_j}{p_j}\right)\alpha_{(j)}!}|w_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}\cdots|w_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{k_j+N_j}{p_j}+k+1\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(k_j+N_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{k_j+N_j}{p_j}\right)}$$

$$\cdot \sum_{|\alpha_{(1)}|=k_1,\cdots,|\alpha_{(r)}|=k_r}\frac{|w_{(1)}|^{2\alpha_{(1)}}\cdots|w_{(r)}|^{2\alpha_{(r)}}}{\alpha_{(1)}!\cdots\alpha_{(r)}!}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{k_j+N_j}{p_j}+k+1\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(k_j+N_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{k_j+N_j}{p_j}\right)}$$

$$\cdot \frac{\left(\sum_{j=1}^{N_1}|w_{1j}|^2\right)^{k_1}}{k_1!}\cdots\frac{\left(\sum_{j=1}^{N_r}|w_{rj}|^2\right)^{k_r}}{k_r!}$$

(4.6.20)

令

$$h_k(y) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{k_j+N_j}{p_j}+k+1\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(k_j+N_j)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{k_j+N_j}{p_j}\right)k_1!\cdots k_r!}y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}.$$

(4.6.21)

$$g(y) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{k_j+N_j}{p_j}+k+1\right)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{k_j+N_j}{p_j}\right)}y_1^{k_1+N_1-1}\cdots y_r^{k_r+N_r-1}. \quad (4.6.22)$$

显然有

$$h_k(y) = \frac{\partial^{n-r}}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}}g(y),$$

其中 $n=N_1+\cdots+N_r$.

令 $k_j+N_j-1=k_j'$, $j=1,2,\cdots,r$,则

$$g(y) = \sum_{k_1'=N_1-1}^{\infty}\cdots\sum_{k_r'=N_r-1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{k_j'+1}{p_j}+k+1\right)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{k_j'+1}{p_j}\right)}y_1^{k_1'}\cdots y_r^{k_r'}.$$

(4.6.23)

令

$$g^*(y)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1+k+\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{k_j'+1}{p_j}\right)\right)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{k_j'+1}{p_j}\right)}y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r},$$

(4.6.24)

则有：

$$h_k(y)=\frac{\partial^{n-r}g(y)}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}}-\frac{\partial^{n-r}g^*(y)}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}}.\qquad(4.6.25)$$

这样，

$$K(w,0;\overline{w},0)=C\sum_{k=1}^{q(q-1)/2}b_k\frac{\partial^{n-r}g^*(y)}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}}.$$

将 w 恢复为 w^*，则

$$\begin{aligned}K(w,z;\overline{w},\overline{z})&=C\det(I+Z\overline{Z})^{(\sum_{i=1}^{r}\frac{N_i}{p_i}+q-1)}K(w^*,0;\overline{w}^*,0)\\&=C\det(I+Z\overline{Z})^{(\sum_{i=1}^{r}\frac{N_i}{p_i}+q-1)}\sum_{k=1}^{q(q-1)/2}b_k\\&\quad\cdot\frac{\partial^{N_1+\cdots+N_r-r}}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1+k+\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{k_j'+1}{p_j}\right)\right)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{k_j+1}{p_j}\right)}y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}\right]\end{aligned}$$

(4.6.26)

注意，这里的 $C=\frac{\prod_{j=1}^{r}p_j}{\pi^{N_1+\cdots+N_r+q(q-1)/2}}$，$b_k$ 如(4.6.17)所示，而

$$y_j=|w_{(j)}^*|^2=\frac{|w_{(j)}|^2}{\det(I+Z\overline{Z})^{1/p_j}},$$

$$w_{(j)}=(w_{j1},w_{j2},\cdots,w_{jN_j}),j=(1,2,\cdots,r).$$

这(4.6.26)式就是 HE_{III} 在最一般情况下的 Bergman 核函数. 当(4.6.26)中的无穷级数能求出其和函数时，Bergman 核函数就得到了显表达式. 下面，我们就能得出域 HE_{III} 的 Bergman 核函数在以前所说的三种情况下的显表达式. 第一种情况只能用多变数的超几何函数表达.

Ⅵ. 3. 最后结果

在给出结果之前，我们先回忆一下多变量超几何函数的定义[FH]，首先明确几个记号，$(a)_m=\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}$，如果 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $m=(m_1,\cdots,m_n)$ 是多重指标，则 $(a)_m=\prod_{j=1}^{n}(a_j)_{m_j}$. 那么多变量超几何函数

F_A 被定义为

$$F_A(\alpha,\beta,\gamma,x)=F_A^{(n)}(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{m=0}\frac{(\alpha)_{|m|}(\beta)_m}{(\gamma)_m m!}x^m,$$

其中 $x\in\mathbf{C}^n$, α, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, $\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$都是参数，$n$ 表示变量的个数，如果 $n=1$，则 $F_A^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma,x)$和古典的 Euler－Guass 超几何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$一样．当 $|x_1|+\cdots+|x_n|<1$ 时，$F_A(\alpha,\beta,\gamma,x)$是收敛的，而当 $|x_1|+\cdots+|x_n|>1$ 时，$F_A(\alpha,\beta,\gamma,x)$是发散的．

Ⅵ.3.1 首先我们计算当 $p_1,\cdots,p_r$ 为正整数时，域 HE_{III} 的 Bergman 核函数．将(4.6.24)中的 k'_j 改写成 $k'_j=p_jk_j^*+q_j$, k_j^*, q_j 为正整数且 $0\leqslant q_j\leqslant p_j-1$, $j=1,\cdots,r$．则(4.6.24)中的 $g^*(y)$变为．

$$g^*(y)=\sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_r=0}^{p_r-1}\sum_{k_1^*=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r^*=0}^{\infty}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(1+k+\sum_{j=1}^r k_j^*+\sum_{j=1}^r\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\prod_{j=1}^r\Gamma\left(k_j^*+\frac{q_j+1}{p_j}\right)}y_1^{p_1k_1^*+q_1}\cdots y_r^{p_rk_r^*+q_r}$$

$$=\sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_r=0}^{p_r-1}y^q\sum_{k_1^*=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r^*=0}^{\infty}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(1+k+\sum_{j=1}^r k_j^*+\sum_{j=1}^r\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\prod_{j=1}^r\Gamma\left(k_j^*+\frac{q_j+1}{p_j}\right)}y_1^{p_1k_1^*}\cdots y_r^{p_rk_r^*}$$

$$=\sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_r=0}^{p_r-1}y^q\frac{\Gamma\left(k+1+\sum_{j=1}^r\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\prod_{j=1}^r\Gamma\left(\frac{q_j+1}{p_j}\right)}$$

$$\cdot\sum_{k_1^*=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r^*=0}^{\infty}\frac{\dfrac{\Gamma\left(1+k+\sum_{j=1}^r k_j^*+\sum_{j=1}^r\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\Gamma\left(1+k+\sum_{j=1}^r\frac{q_j+1}{p_j}\right)}}{\cdot\prod_{j=1}^r\dfrac{\Gamma\left(k_j^*+\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_j+1}{p_j}\right)}\cdot k_j^*!}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^r\frac{\Gamma(k_j^*)}{\Gamma(1)}(y_1^{p_1})^{k_1^*}\cdots(y_r^{p_r})^{k_r^*}$$

$$= \sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_r=0}^{p_r-1} y^{q} \frac{\Gamma\left(k+1+\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{q_j+1}{p_j}\right)} \cdot F_A^{(r)}\left(1+k+\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j+1}{p_j}, \mathbf{1}, \frac{\mathbf{q}+\mathbf{1}}{\mathbf{p}}, \mathbf{y}^{\mathbf{p}}\right). \tag{4.6.27}$$

其中 $\mathbf{1}=(1,\cdots,1)$，$\frac{\mathbf{q}+\mathbf{1}}{\mathbf{p}}=\left(\frac{q_1+1}{p_1},\cdots,\frac{q_r+1}{p_r}\right)$，$\mathbf{y}^{\mathbf{p}}=y_1^{p_1}\cdots y_r^{p_r}$，$n=N_1+\cdots+N_r$. 因为

$$\frac{\partial^{n-r} g^*(y)}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}} = h_k(y),$$

所以

$$h_k(y) = \frac{\partial^{n-r}}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}} \sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_r=0}^{p_r-1} y^{q} \frac{\Gamma\left(k+1+\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{q_j+1}{p_j}\right)} \cdot F_A^{(r)}\left(1+k+\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j+1}{p_j}, \mathbf{1}, \frac{\mathbf{q}+\mathbf{1}}{\mathbf{p}}, \mathbf{y}^{\mathbf{p}}\right). \tag{4.6.28}$$

于是我们就可以得到：

$$K(w,0;\overline{w},0) = C\sum_{k=1}^{q(q-1)/2} b_k h_k(y).$$

将 w 回复到 w^*，这时 $h_k(y)$ 变成 $h_k(|w^*_{(1)}|^2,\cdots,|w^*_{(r)}|^2)$. 并注意到 (4.6.7) 式，我们得到当 $p_1,\cdots,p_r$ 为正整数时，域 HE_{III} 的 Bergman 核函数为：

$$C\det(I+Z\overline{Z})^{-\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{N_j}{p_j}+q-1\right)}\sum_{k=1}^{q(q-1)/2} b_k h_k(|w^*_{(1)}|^2,\cdots,|w^*_{(r)}|^2)$$

$$= C\det(I+Z\overline{Z})^{-\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{N_j}{p_j}+q-1\right)}\sum_{k=1}^{q(q-1)/2} b_k \frac{\partial^{N_1+\cdots+N_r-r}}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}} \sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_r=0}^{p_r-1} y^{q}$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(k+1+\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{q_j+1}{p_j}\right)} F_A^{(r)}\left(1+k+\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j+1}{p_j}, \mathbf{1}, \frac{\mathbf{q}+\mathbf{1}}{\mathbf{p}}, \mathbf{y}^{\mathbf{p}}\right). \tag{4.6.29}$$

其中，$C=\frac{\prod_{j=1}^{r}p_j}{\pi^{N_1+\cdots+N_r+q(q-1)/2}}$，$b_k$ 如 (4.6.17) 所示.

$$F_{A}^{(r)}\left(1+k+\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j+1}{p_j},\mathbf{1},\frac{\boldsymbol{q}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{p}}\right)$$

$$=\sum_{k_1^*=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r^*=0}^{\infty}\frac{\dfrac{\Gamma\left(1+k+\sum_{j=1}^{r}k_j^*+\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\Gamma\left(1+k+\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j+1}{p_j}\right)}}{\prod_{j=1}^{r}\dfrac{\Gamma\left(k_j^*+\frac{q_j+1}{p_j}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_j+1}{p_j}\right)}k_j^*!}$$

$$\cdot\left[\prod_{j=1}^{r}\frac{\Gamma(k_j^*+1)}{\Gamma(1)}\right](y_1^{p_1})^{k_1^*}\cdots(y_r^{p_r})^{k_r^*}.$$

而此处的 y_j 为：

$$y_j=|w_{(j)}^*|^2=|w_{(j)}|^2\det(I+Z\bar{Z})^{-1/p_j},j=1,2,\cdots,r.$$

$$w_{(j)}=(w_{j1},w_{j2},\cdots,w_{jN_j}),j=(1,2,\cdots,r).$$

Ⅵ.3.2 接下来计算当 $\frac{1}{p_j}(j=1,\cdots,r-1)$ 为正整数，p_r 为正实数情况下的 Bergman 核函数. 由于 $\frac{1}{p_j}(j=1,\cdots,r-1)$ 为正整数，所以令 $\frac{1}{p_j}=q_j,j=1,\cdots,r-1,p_r=q_r$. 则

$$g^*(y)=\sum_{k_1\geqslant 0,\cdots,k_r\geqslant 0}\frac{\Gamma\left(1+k+\sum_{j=1}^{r-1}q_j(k_j+1)+\frac{k_r+1}{q_r}\right)}{\prod_{j=1}^{r-1}\Gamma(q_j(k_j+1))\Gamma\left(\frac{k_r+1}{q_r}\right)}y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}.$$

(4.6.30)

令

$$s=1+k+\frac{k_r+1}{q_r},$$

$$g_s(y)=\sum_{k_1,\cdots,k_{r-1}\geqslant 0}\frac{\Gamma(s+\sum_{j=1}^{r-1}q_j(k_j+1))}{\prod_{j=1}^{r-1}\Gamma(q_j(k_j+1))}y_1^{k_1}\cdots y_{r-1}^{k_{r-1}},$$

(4.6.31)

令 $y_j=x_j^{q_j}(j=1,2,\cdots,r-1)$，则

$$g_s(x^q)=\sum_{k_1,\cdots,k_{r-1}\geqslant 0}\frac{\Gamma(s+\sum_{j=1}^{r-1}q_j(k_j+1))}{\prod_{j=1}^{r-1}\Gamma(q_j(k_j+1))}x_1^{q_1k_1}\cdots x_{r-1}^{q_{r-1}k_{r-1}}.$$

(4.6.32)

将式子的两边同乘以 $x^{q-1}=x_1^{q_1-1}\cdots x_{r-1}^{q_{r-1}-1}$，则

$$x^{q-1}g_s(x^q)=\sum_{k_1\geqslant 0,\cdots,k_{r-1}\geqslant 0}\frac{\Gamma(s+\sum_{j=1}^{r-1}q_j(k_j+1))}{\prod_{j=1}^{r-1}\Gamma(q_j(k_j+1))}\cdot x_1^{q_1k_1+q_1-1}\cdots x_{r-1}^{q_{r-1}k_{r-1}+q_{r-1}-1}$$

$$=\sum_{k_1\geqslant 0,\cdots,k_{r-1}\geqslant 0}\frac{\Gamma(s+\sum_{j=1}^{r-1}q_j(k_j+1))}{\prod_{j=1}^{r-1}\Gamma(q_j(k_j+1))}\cdot\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1\cdots\partial x_{r-1}}\left\{\frac{x^{(k_{(1)}+1)q}}{\prod_{j=1}^{r}q_j(k_j+1)}\right\}. \tag{4.6.33}$$

其中 $k_{(1)}=(k_1\cdots k_{r-1})$. 也就是

$$x^{q-1}g_s(x^q)=\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1\cdots\partial x_{r-1}}\left(\sum_{k_1>0,\cdots,k_{r-1}>0}\frac{\Gamma(|k_{(1)}q|+s)}{(k_{(1)}q)!}x^{k_{(1)}q}\right).$$

$$=\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1\cdots\partial x_{r-1}}\left(\sum_{k_1\geqslant 0,\cdots,k_{r-1}\geqslant 0}\frac{\Gamma(|k_{(1)}q|+s)}{(k_{(1)}q)!}x^{k_{(1)}q}\right).$$

由本节Ⅵ.1 的引理 1 与引理 2 可知，

$$x^{q-1}g_s(x^q)=\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1\cdots\partial x_{r-1}}\left\{\frac{1}{\prod_{l=1}^{r-1}q_l}\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\frac{\Gamma(s)}{(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}x_l)^s}\right\}, \tag{4.6.34}$$

其中，$\omega_j=e^{2\pi\sqrt{-1}/q_j}$，$(j=1,2,\cdots,r-1)$，$q_1,\cdots,q_{r-1}$是正整数. 所以

$$g_s(y_1,\cdots,y_{r-1})=\frac{\partial^{r-1}}{\partial y_1\cdots\partial y_{r-1}}\left\{\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\frac{\Gamma(s)}{(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^s}\right\}. \tag{4.6.35}$$

则

$$g^*(y)=\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{y_r^{k_r}}{\Gamma\left(\frac{k_r+1}{q_r}\right)}g_s(y_1,\cdots,y_{r-1})$$

$$=\frac{\partial^{r-1}}{\partial y_1\cdots\partial y_{r-1}}\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{k_r=0}^{\infty}\cdot\frac{\Gamma\left(1+k+\frac{k_r+1}{q_r}\right)}{(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^{1+k+\frac{k_r+1}{q_r}}}\cdot\frac{y_r^{k_r}}{\Gamma\left(\frac{k_r+1}{q_r}\right)}. \tag{4.6.36}$$

下面化简 $\sum_{k_r=0}^{\infty} \dfrac{\Gamma\left(1+k+\dfrac{k_r+1}{q_r}\right)}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{\frac{k_r}{q_r}}\Gamma\left(\dfrac{k_r+1}{q_r}\right)} y_r^{k_r}$.

令 $t=\dfrac{y_r}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{\frac{1}{q_r}}}$,只需计算

$$\sum_{k_r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+k+\dfrac{k_r+1}{q_r}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_r+1}{q_r}\right)} t^{k_r}.$$

令 $g_k(\lambda)=\prod_{j=0}^{k}\left(\dfrac{\lambda+1}{q_r}+j\right)$,显然 $g_k(\lambda)$是关于 λ 的 $k+1$ 阶的多项式,因此存在 $k+2$ 个常数 $C_j(k)$ $(j=0,1,\cdots,k+1)$,使得

$$g_k(\lambda)=C_0(k)+\sum_{j=1}^{k+1}[C_j(k)(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+j)].$$

其中

$$C_0(k)=0,\ C_j(k)=\left[g_k(-j-1)-\sum_{i=0}^{j-1}C_i(k)(-1)^i \cdot \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-i+1)}\right] \Big/ [(-1)^j\Gamma(j+1)],\ j=1,\cdots,k+1. \tag{4.6.37}$$

因此有

$$\begin{aligned}\sum_{k_r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+k+\dfrac{k_r+1}{q_r}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_r+1}{q_r}\right)} t^{k_r}-\sum_{k_r=0}^{\infty} g_k(k_r)t^{k_r} &= \sum_{j=1}^{k+1}C_j(k)\sum_{k_r=0}^{\infty}(k_r+1)(k_r+2)\cdots(k_r+j)t^{k_r} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}C_j(k)j!(1-t)^{-(j+1)}.\end{aligned} \tag{4.6.38}$$

从而

$$g^*(y)=\frac{\partial^{r-1}}{\partial y_1\cdots\partial y_{r-1}}\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{j=1}^{k+1}C_j(k)j!\frac{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{\frac{1}{q_r}(1+k)}}{\left[\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{\frac{1}{q_r}}-y_r\right]^{j+1}} \tag{4.6.39}$$

又

$$h_k(y)=\frac{\partial^{n-r}}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}}g^*(y)$$

$$=\frac{\partial^{n-1}}{\partial y_1^{N_1}\cdots\partial y_{r-1}^{N_{r-1}}\partial y_r^{N_r-1}}\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{j=1}^{k+1}C_j(k)$$

$$\cdot j!\frac{(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^{\frac{j}{q_r}(1+k)}}{[(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^{\frac{1}{q_r}}-y_r]^{j+1}}.$$

(4.6.40)

因此

$$K(w,0;\bar{w},0)=C\sum_{k=0}^{\frac{q(q-1)}{2}}b_kh_k(y).$$

将 w 回复到 w^*，并注意到(4.6.7)式，我们得到当 $1/p_1,\cdots,1/p_{r-1}$ 为正整数，p_r 为正数时，域 HE_{III} 的 Bergman 核函数为：

$$C\det(I+Z\bar{Z})^{-(\sum_{l=1}^{r}\frac{N_l}{p_l}+q-1)}\sum_{k=0}^{\frac{q(q-1)}{2}}b_kh_k\Big(\sum_{j=1}^{N_1}|w_{1j}^*|^2,\cdots,\sum_{j=1}^{N_r}|w_{rj}^*|^2\Big).$$

$$=C\det(I+Z\bar{Z})^{-(\sum_{l=1}^{r}\frac{N_l}{p_l}+q-1)}\sum_{k=0}^{\frac{q(q-1)}{2}}b_k\frac{\partial^{N_1+\cdots+N_r-1}}{\partial y_1^{N_1}\cdots\partial y_{r-1}^{N_{r-1}}\partial y_r^{N_r-1}}$$

$$\cdot\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{j=1}^{k+1}C_j(k)j!\frac{(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^{\frac{j}{q_r}(1+k)}}{[(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^{\frac{1}{q_r}}-y_r]^{j+1}}.$$

(4.6.41)

这里，$C=\dfrac{\prod_{j=1}^{r}p_j}{\pi^{N_1+\cdots+N_r+q(q-1)/2}}$，$b_k$ 如(4.6.17)所示，$C_j(k)$ 如(4.6.37)所示，而

$$y_j=|w_{(j)}^*|^2=|w_{(j)}|^2\det(I+Z\bar{Z})^{\frac{1}{p_j}},$$
$$w(j)=(w_{j1},w_{j2},\cdots,w_{jN_j}),j=(1,2,\cdots,r).$$

Ⅵ.3.3 当 $\frac{1}{p_1},\cdots,\frac{1}{p_r}$ 为正整数，这时，HE_{III} 的 Bergman 核函数为Ⅵ.3.2 情况的特例. 令 $\frac{1}{p_l}=q_l,(l=1,\cdots,r)$，则

$$g^*(y)=\sum_{k_1,\cdots,k_r\geq 0}\frac{\Gamma(k+1+\sum_{j=1}^{r}q_j(k_j+1))}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(q_j(k_j+1))}y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}.$$

设 $s=k+1$,则

$$g_s^*(y)=\sum_{k_1,\cdots,k_r\geqslant 0}\frac{\Gamma(s+\sum_{j=1}^r q_j(k_j+1))}{\prod_{j=1}^r\Gamma(q_j(k_j+1))}y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}.$$

此式形式上与(4.6.31)完全相同,无非是多了一个变量 y_r.仿照上述(4.6.31)到(4.6.35)的推断过程,我们得到

$$g_s^*(y_1,\cdots,y_r)=\frac{\partial^r}{\partial_{y_1},\cdots,\partial_{y_r}}\left[\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_r=0}^{q_r-1}\frac{\Gamma(s)}{(1-\sum_{l=1}^r\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^s}\right],$$

则

$$g^*(y_1,\cdots,y_r)=\frac{\partial^r}{\partial_{y_1},\cdots,\partial_{y_r}}\left[\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_r=0}^{q_r-1}\frac{\Gamma(k+1)}{(1-\sum_{l=1}^r\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^{k+1}}\right].$$

于是我们就知道:

$$h_k(y)=\frac{\partial^{N_1+\cdots+N_r-r}g^*(y)}{\partial y_1^{N_1-1}\cdots\partial y_r^{N_r-1}}=\frac{\partial^{N_1+\cdots+N_r}}{\partial y_1^{N_1}\cdots\partial y_r^{N_r}}\cdot\left[\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_r=0}^{q_r-1}\frac{\Gamma(k+1)}{(1-\sum_{l=1}^r\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^{k+1}}\right].\tag{4.6.42}$$

因此

$$K(w,0;\overline{w},0)=C\sum_{k=0}^{\frac{q(q-1)}{2}}b_kh_k(y).$$

将 w 回复为 w^*,并注意到(4.6.7)式,我们得到当 $1/p_1,\cdots,1/p_r$ 为正整数时,域 HE_{III} 的 Bergman 核函数为:

$$C\det(I+Z\overline{Z})^{(\sum_{l=1}^r\frac{N_l}{p_l}+q-1)}\sum_{k=0}^{\frac{q(q-1)}{2}}b_k\frac{\partial^{N_1+\cdots+N_r}}{\partial y_1^{N_1}\cdots\partial y_r^{N_r}}\cdot\left[\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_r=0}^{q_r-1}\frac{\Gamma(k+1)}{(1-\sum_{l=1}^r\omega_l^{j_l}y_l^{\frac{1}{q_l}})^{k+1}}\right].\tag{4.6.43}$$

这里,$C=\dfrac{\prod_{j=1}^r p_j}{\pi^{N_1+\cdots+N_r+q(q-1)/2}}$,$b_k$ 如(4.6.17)所示,$\omega_j=\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}/q_j}$,$(j=1,2,\cdots,r)$,$q_1,q_2,\cdots,q_r$ 是正整数.而

$$y_j=|w_{(j)}^*|^2=|w_{(j)}|^2\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{p_j}},$$

$$w(j)=(w_{j1},w_{j2},\cdots,w_{jN_j}),j=1,2,\cdots,r.$$

到此为止，我们所说的三种情况下的 HE_{III} 的 Bergman 核函数的表达式都已求出.

Ⅵ.3.4 例 1 如果令 HE_{III} 中的 $r=1, p_1=K, N_1=N$，这时的 $HE(\mathrm{III})$ 就是我们前面所提到的第三类超 Cartan 域 Y_{III} 即 $HE_{\mathrm{III}}=Y_{\mathrm{III}}$. 此时 Y_{III} 的 Bergman 核函数根据[YW7]3.5 的结果有：

$$K_{Y_{\mathrm{III}}}=K\pi^{-(q(q-1)/2+N)}\det(I+Z\overline{Z})^{-(q-1+N/K)}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{h}b_i\Gamma(N+i)(1-y)^{-(N+i)},$$

其中 $y=|W|^2\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}, |W|^2=\sum_{j=1}^{N}|w_j|^2, h=[q(q-1)/2+1]$. 而 d_i 由下式决定：

$$p(\lambda)=\lambda\frac{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+q+l-2)}{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+2l-3)}=\sum_{i=1}^{h}d_i\frac{\Gamma(\lambda+i+1)}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

根据(4.6.41)，此时的 HE_{III} 的 Bergman 核函数为：

$$K_{HE_{\mathrm{III}}}=K\pi^{-(N+q(q-1)/2)}\det(I+Z\overline{Z})^{-(N/K+q-1)}$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\frac{q(q-1)}{2}}b_k\sum_{j=1}^{k+1}C_j(k)\Gamma(N+j)(1-y)^{-(j+N)}.$$

这里 $y=|W|^2\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}, |W|^2=\sum_{j=1}^{N}|W_j|^2$. 而 b_k 根据(4.6.17)所示，由下式决定：

$$f(\lambda)=\frac{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+q+l-2)}{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2\lambda+2l-3)}=\sum_{k=1}^{q(q-1)/2}b_k\frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

而 $C_j(k)$ 根据(4.6.37)所示，由下式决定：

$$g_k(\lambda)=\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{\lambda+1}{q_r}+j\right)=\left(\frac{\lambda+1}{K}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{K}+l+1\right)}{\Gamma(\lambda+1)}$$

$$=\sum_{j=1}^{k+1}C_j(k)\frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

下面我们证明 $K_{HE_{\mathrm{III}}}=K_{Y_{\mathrm{III}}}$. 从它们的表达式可知，只要证明：

$$d_j=\sum_{k=0}^{\frac{q(q-1)}{2}}b_k\sum_{j=1}^{k+1}C_j(k)=\sum_{k=j-1}^{q(q-1)/2}b_kC_j(k), j=1,2,\cdots,1+q(q-1)/2.$$

事实上

$$\sum_{j=1}^{1+q(q-1)/2}d_j\frac{\Gamma(\lambda+j+1)}{\Gamma(\lambda+1)}=p(\lambda)-\lambda f(\lambda)=\lambda\sum_{k=1}^{q(q-1)/2}b_k\frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{q(q-1)/2} b_k \lambda \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+1)} = \sum_{k=1}^{q(q-1)/2} b_k \sum_{j=1}^{k+1} C_j(k) \frac{\Gamma(\lambda+j+1)}{\Gamma(\lambda+1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{(1+q(q-1)/2)} \left[\sum_{k=j-1}^{q(q-1)/2} b_k C_j(k) \right] \frac{\Gamma(\lambda+j+1)}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

由此可见：

$$d_j = \sum_{k=j-1}^{q(q-1)/2} b_k C_j(k),\ j = 1,2,\cdots,1+q(q-1)/2.$$

这说明，当 $r=1, p_1=K, N_1=N$ 时，本文的结果与[YW7]中结果一样.

Ⅵ.3.5 例 2 如果令 HE_{III} 中的 $r=2, p_1=1, p_2=K, N_1=M, N_2=N$，这就是我们前面所提到的第三类 Cartan-Egg 域. 将 $p_1=1, p_2=K, N_1=M, N_2=N$ 代入(4.6.35)式，则(4.6.35)就变成下面的式子：

$$g_s(y_1) = \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\Gamma(s)}{(1-y_1)^s} = \Gamma(s+1)(1-y_1)^{-(s+1)}.$$

于是

$$g^*(y) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{y_2^{k_2}}{\Gamma\left(\frac{k_2+1}{K}\right)} g_s = \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2+k+\frac{k_2+1}{K}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_2+1}{K}\right)} \cdot \left[\frac{y_2}{(1-y_1)^{1/K}}\right]^{k_2} (1-y_1)^{-(2+k+1/K)}.$$

令 $t = \frac{y_2}{(1-y_1)^{1/K}}$，只须计算

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2+k+\frac{k_2+1}{K}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_2+1}{K}\right)} t^{k_2}.$$

令 $g_k(\lambda) = \prod_{j=0}^{k+1}\left(\frac{\lambda+1}{K}+j\right)$. 显然 $g_k(\lambda)$ 是关于 λ 的 $k+2$ 阶的多项式，因此存在 $k+3$ 个常数 $C_j(k)$ $(j=0,1,\cdots,k+2)$，使得

$$g_k(\lambda) = C_0(k) + \sum_{j=1}^{k+2} [C_j(k)(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+j)].$$

其中

$$C_0(k) = 0, C_j(k) = \left[g_k(-j-1) - \sum_{i=0}^{j-1} C_i(k)(-1)^i \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-i+1)}\right] / [(-1)^j \Gamma(j+1)],\ j = 1,\cdots,k+2. \quad (4.6.44)$$

因此有

$$g^*(y) = \sum_{j=1}^{k+2} C_j(k)\Gamma(j+1)\frac{(1-y_1)^{\frac{1}{K}(k+2)}}{((1-y_1)^{1/K}-y_2)^{j+1}},$$

$$h_k(y) = \frac{\partial^{M+N-2}}{\partial y_1^{M-1}\partial y_2^{N-1}}\sum_{j=1}^{k+2} C_j(k)\Gamma(j+1)\frac{(1-y_1)^{\frac{1}{K}(k+2)}}{((1-y_1)^{1/K}-y_2)^{j+1}}.$$

则

$$K(w^*,0;\overline{w}^*,0) = K\pi^{-\left(\frac{q(q-1)}{2}+M+N\right)}\sum_{k=0}^{\frac{q(q-1)}{2}} b_k h_k(|w_1^*|^2,|w_2^*|^2).$$

则此时的 Bergman 核函数为：

$$K(w,Z;\overline{w},\overline{Z}) = K\pi^{-\left(\frac{q(q-1)}{2}+M+N\right)}\sum_{k=0}^{\frac{q(q-1)}{2}} b_k\det(I+Z\overline{Z})^{-\left(q-1+M+\frac{N}{K}\right)}$$

$$\cdot\frac{\partial^{M+N-2}}{\partial y_1^{M-1}\partial y_2^{N-1}}\sum_{j=1}^{k+2} C_j(k)\Gamma(j+1)\frac{(1-y_1)^{\frac{1}{K}(k+2)}}{((1-y_1)^{\frac{1}{K}}-y_2)^{j+1}}.$$

这里

$$y_1 = |w_1^*|^2 = |w_1|^2\det(I+Z\overline{Z})^{-1},$$
$$y_2 = |w_2^*|^2 = |w_2|^2\det(I+Z\overline{Z})^{-1/K},$$
$$|w_1|^2 = \sum_{j=1}^{M}|w_{1j}|^2,\ |w_2|^2 = \sum_{j=1}^{N}|w_{2j}|^2,$$

这里的 b_j 是上文提到的(4.6.17)，而 $C_j(k)$ 由(4.6.44)所示. 这与文[YWZ]中的结果相同.

Ⅵ.4. 第一，第二和第四类华罗庚域的 Bergman 核函数

下面我们给出第一，第二和第四类华罗庚域的 Bergman 核函数的显表达式. 其方法相同于上面的求第三类华罗庚域 Bergman 核函数的方法，也可以先求出 $M_1=1,\cdots,M_r=1$ 时的 Bergman 核函数，然后用膨胀原理求出一般情况下的 Bergman 核函数.

Ⅵ.4.1 第一类华罗庚域的 Bergman 核函数

设第一类华罗庚域为 $HE_{\mathrm{I}}(M_1,\cdots,M_N,m,n;p_1,\cdots,p_N)$，当 $1/p_1,\cdots,1/p_{N-1}$ 都是正整数而 p_N 为正实数时，则其 Bergman 核函数的显表达式为：

$$\frac{\prod_{i=1}^{N} p_i}{\pi^{mn+\sum_{i=1}^{N}M_i}}F_1(x)\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-\left(m+n+\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i}{p_i}\right)}.$$

这里，

$$F_1(x) = \frac{\partial^{M_1+M_2+\cdots+M_{N-1}+M_N-1}}{\partial x_1^{M_1}\partial x_2^{M_2}\cdots\partial x_N^{M_N-1}}\sum_{k_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{k_{N-1}=0}^{q_{N-1}-1}\sum_{k=0}^{mn}\sum_{j=1}^{k+1}b_k$$

$$\cdot c_j(k)\Gamma(j+1)\frac{(1-t)^{-(j+1)}}{\left(1-\sum_{l=1}^{N-1}\omega_l^{k_l}x_l^{p_l}\right)^{1+k+\frac{1}{p_N}}},$$

$$t = \frac{x_N}{\left(1-\sum_{l=1}^{N-1}\omega_l^{k_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{\frac{1}{p_N}}}$$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，而 $x_l = |w_l|^2\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{p_l}}$，$|w_l|^2 = |w_{l1}|^2+\cdots+|w_{lM_l}|^2(l=1,2,\cdots,N)$，$\omega_l = e^{2\pi i/q_l}$，$1\leqslant l\leqslant N-1$，以及 $q_l = 1/p_l(l=1,2,\cdots,N-1)$，令

$$\begin{aligned}P_{11}(\lambda) = &[(\lambda+n)(\lambda+n-1)\cdots(\lambda+1)]\\ &\cdot[(\lambda+n+1)(\lambda+n)\cdots(\lambda+2)]\\ &\cdots[(\lambda+n+m-1)(\lambda+n+m-2)\cdots(\lambda+m)],\end{aligned}$$

这是 λ 的 mn 次多项式，$b_0=0$ 而其余的 $b_j(j=1,2,\cdots,mn)$ 由下列递推公式决定：

$$b_j = \frac{P_{11}(-j-1)-\sum_{k=0}^{j-1}b_k(-1)^k\Gamma(j+1)/\Gamma(j-k+1)}{(-1)^j\Gamma(j+1)};$$

令 $P_{12}(\lambda)=\left(\frac{\lambda+1}{p_N}+k\right)\left(\frac{\lambda+1}{p_N}+k-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda+1}{p_N}+1\right)\left(\frac{\lambda+1}{p_N}\right)$，这是 λ 的 $k+1$ 次多项式，$c_0(k)=0$ 而其余的 $c_j(k)(j=1,2,\cdots,k+1)$ 由下列递推公式决定：

$$c_j(k) = \frac{P_{12}(-j-1)-\sum_{l=0}^{j-1}c_l(k)(-1)^l\Gamma(j+1)/\Gamma(j-l+1)}{(-1)^j\Gamma(j+1)}.$$

Ⅵ.4.2 第二类华罗庚域的 Bergman 核函数的显表达式

设第二类华罗庚域为 $HE_{\mathrm{II}}(N_1,\cdots,N_n,p;p_1,\cdots,p_n)$，则其 Bergman 核函数的显表达式为

$$\frac{\prod_{l=1}^{n}p_l}{\pi^{N_1+\cdots+N_n+[p(p+1)/2]}}\frac{1}{\sqrt{2}^{(p^2-p)}}\frac{\partial^{N_1+N_2+\cdots+N_n-n}}{\partial x_1^{N_1-1}\partial x_2^{N_2-1}\cdots\partial x_m^{N_n-1}}F_2(x)$$

$$\cdot\det(I-Z\overline{Z})^{-\left(p+1+\frac{N_1}{p_1}+\cdots+\frac{N_n}{p_n}\right)},$$

这里，$Z=\left(\frac{z_{jk}}{\sqrt{2}p_{jk}}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant p}$，若 $j=k$ 则 $p_{jk}=1/\sqrt{2}$；若 $j\neq k$ 则 $p_{jk}=1$；$F_2(x)=\sum_{k=1}^{p(p+1)/2}b_kf_k(x)$。若令 $x_j=|w_j^*|^2(j=1,\cdots,n)$，$x=(x_1,\cdots,$

x_n)，则 $f_k(|w_1^*|^2,\cdots,|w_n^*|^2)=f_k(x)$，而

$$f_k(x)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_{n-1}}\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{n-1}=0}^{q_{n-1}-1}\sum_{j=1}^{k+1}c_j(k)j!$$

$$\cdot\frac{\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^{j/q-(k+1)}}{\left[\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^{1/q}-x_n\right]^{j+1}}.$$

而且 $1/p_1-q_1,\cdots,1/p_{n-1}-q_{n-1}$ 都是正整数，$p_n=q>0$. 而且 $w_l^*=w_l\det(I-Z\bar{Z})^{-\frac{q_l}{2}}(l=1,2,\cdots,n-1)$，$w_n^*=w_n\det(I-Z\bar{Z})^{\frac{-1}{2q}}$，同时 $|w_j|^2=\sum_{k=1}^{N_j}|w_{jk}|^2(j=1,2,\cdots,n)$. 令 $P_{21}(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+p)\prod_{l=2}^{p}[(2\lambda+p+l-1)\cdots(2\lambda+1l-1)]$，这是 λ 的 $p(p+1)/2$ 次多项式，$b_0=0$ 而其余的 $b_j(j=1,2,\cdots,p(p+1)/2)$ 由下列递推公式决定：

$$b_j=\frac{P_{21}(-j-1)-\sum_{k=0}^{j-1}b_k(-1)^k\Gamma(j+1)/\Gamma(j-k+1)}{(-1)^j\Gamma(j+1)};$$

令 $P_{22}(\lambda)=\left(\frac{\lambda+1}{q}\right)\left(\frac{\lambda+1}{q}+1\right)\cdots\left(\frac{\lambda+1}{q}+k\right)$，这是 λ 的 $k-1$ 次多项式，$c_0(k)=0$ 而其余的 $c_j(k)(j=1,2,\cdots,p(p+1)/2)$ 由下列递推公式决定：

$$c_j(k)=\frac{P_{22}(-j-1)-\sum_{l=0}^{j-1}c_l(k)(-1)^l\Gamma(j+1)/\Gamma(j-l+1)}{(-1)^j\Gamma(j+1)}.$$

Ⅵ.4.3 第四类华罗庚域的 Bergman 核函数

设第四类华罗庚域为 $HE_{\mathrm{IV}}(N_1,N_2,\cdots,N_r,n;p_1,p_2,\cdots,p_r)$，则其 Bergman 核函数的显表达式为：

$$\frac{\prod_{l=1}^{r}p_l}{\pi^{n+\sum_{l=1}^{r}N_l}}\cdot\frac{\partial^{N_1+N_2+\cdots+N_{r-1}+N_r-1}}{\partial x_1^{N_1}\partial x_2^{N_2}\cdots\partial x_{r-1}^{N_{r-1}}\partial x_r^{N_r-1}}\cdot\sum_{v_1=0}^{q_1-1}\cdots$$

$$\cdot\sum_{v_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{v=0}^{n}\sum_{j=1}^{v+1}\frac{\Gamma(j+1)}{(1-t)^{j+1}}$$

$$\cdot\frac{b_v c_j(v)(1+|ZZ'|^2-2Z\bar{Z}^{\mathrm{T}})^{-(n+\sum_{l=1}^{r}\frac{N_l}{p_l})}}{(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}})^{h+1+\frac{1}{p_r}}},$$

这里

$|w_l|^2=|w_{l1}|^2+\cdots+|w_{lN_l}|^2, x_l=|w_l|^2(1+|ZZ'|^2-2ZZ^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{p_l}},$

$l=1,\cdots,r.$

$q_l=\dfrac{1}{p_l}, \omega_l=\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{q_l}\sqrt{-1}}, 1\leqslant l\leqslant r-1,$

$t=x_r\left(1-\sum\limits_{l=1}^{r-1}\omega_l^{x_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{-\frac{1}{p_r}}.$

令

$$P_{41}(\lambda):=\frac{2^{n-1}(2\lambda+n)\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+1)},$$

这是 λ 的 n 次多项式，则 $b_0=P_{41}(-1)$，而其余的 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$ 由下列递推公式决定：

$$b_j=\frac{P_{41}(-j-1)-\sum_{v=0}^{j-1}\dfrac{(-1)^v\Gamma(j+1)b_v}{\Gamma(j-v+1)}}{(-1)^j\Gamma(j+1)}.$$

令

$$P_{42}(\lambda)=\frac{\Gamma\left(1+v+\dfrac{\lambda+1}{p_r}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+1}{p_r}\right)}-\left(\frac{\lambda+1}{p_r}+v\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\lambda+1}{p_r}+v-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda+1}{p_r}+1\right)\left(\frac{\lambda+1}{p_r}\right),$$

这是 λ 的 $v+1$ 次多项式，则 $c_j(0)=0$ 而其余的 $c_j(v)(j=1,2,\cdots,v+1)$ 由下列递推公式决定：

$$c_j(v)=\frac{P_{42}(-j-1)-\sum_{l=0}^{j-1}\dfrac{(-1)^l\Gamma(j+1)c_l(v)}{\Gamma(j-l+1)}}{(-1)^j\Gamma(j+1)}.$$

本节内容取自文献[YN，YZg2，YWZZG，YWZZG1，YWZZG2，YWG].

Ⅶ. 广义华罗庚域的 Bergman 核函数

我们考虑如下形式的四类广义华罗庚域，这是作者最近引进的：

$GHE_{\mathrm{I}}(N_1,\cdots,N_r;m,n;p_1,\cdots,p_r;k)$

$$=\left\{w_j\in\mathbf{C}^{N_j}, Z\in\Re_{\mathrm{I}}(m,n):\sum_{j=1}^{r}\|w_j\|^{2p_j}<\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^k,\right.$$

$$\left.j=1,\cdots,r\right\},$$

$$GHE_{\mathrm{II}}(N_1,\cdots,N_r;p;p_1,\cdots,p_r;k)$$
$$=\left\{w_j\in \mathbf{C}^{N_j},Z\in \mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(p):\sum_{j=1}^{r}\|w_j\|^{2p_j}<\det(I-Z\overline{Z})^k,\right.$$
$$\left.j=1,\cdots,r\right\},$$
$$GHE_{\mathrm{III}}(N_1,\cdots,N_r;q;p_1,\cdots,p_r;k)$$
$$=\left\{w_j\in \mathbf{C}^{N_j},Z\in \mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(q):\sum_{j=1}^{r}\|w_j\|^{2p_j}<\det(I+Z\overline{Z})^k,\right.$$
$$\left.j=1,\cdots,r\right\},$$
$$GHE_{\mathrm{IV}}(N_1,\cdots,N_r;n;p_1,\cdots,p_r;k)$$
$$=\left\{w_j\in \mathbf{C}^{N_j},Z\in \mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(n):\sum_{j=1}^{r}\|w_j\|^{2p_j}<(1+|ZZ'|^2-2Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^k,\right.$$
$$\left.j=1,\cdots,r\right\},$$

其中 $w_j=(w_{j1},\cdots,w_{jN_j}),j=1,\cdots,r$. $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(p)$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(q)$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(n)$分别为四类 Cartan 域. $\overline{Z}^{\mathrm{T}}$ 表示 Z 的共轭转置. $N_1,\cdots,N_r$ 为正整数,$p_1,\cdots,p_r,k$ 为正实数.

以下都令 $p_1^{-1},\cdots,p_{r-1}^{-1}$为正整数 p_r,k 为正实数,下面将显式给出这时的广义华罗庚域的 Bergman 核函数.

由于此时四类广义华罗庚域的 Bergman 核函数的求法类似,我们只给出第一类广义华罗庚域的 Bergman 核函数的计算过程,而对另外三类广义华罗庚域,只给出相应的结果.

只要先算出 $N_1=N_2=\cdots=N_r=1$ 时的结果,就可以利用膨胀原理,求出一般的广义华罗庚域的 Bergman 核函数. 记 $N_1=N_2=\cdots=N_r=1$ 时的广义华罗庚域分别为:GHE_{I}, GHE_{II}, GHE_{III}, GHE_{IV}.

Ⅶ. 1.

Ⅶ.1.1 定理 1.

(1)下列变换属于 GHE_{I} 的全纯自同构群,且记为 Aut(GHE_{I}):

$$\begin{cases} w_j^*=w_j\det(I-Z_0\overline{Z}_0^{\mathrm{T}})^{\frac{k}{2p_j}}\det(I-Z\overline{Z}_0^{\mathrm{T}})^{-\frac{k}{p_j}}; \quad 1\leqslant j\leqslant r\\ Z^*=A(Z-Z_0)(I-\overline{Z}_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}D^{-1}, \end{cases} \tag{4.7.1}$$

其中 $\overline{A}^{\mathrm{T}}A=(I-Z_0\overline{Z}_0^{\mathrm{T}})^{-1}$, $\overline{D}^{\mathrm{T}}D=(I-\overline{Z}_0^{\mathrm{T}}Z_0)^{-1}$, $Z_0\in\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$,

$Z\in\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$. 此变换把 GHE_{I} 中的点(w,Z)映为$(w^*,0)$.

(2)下列变换属于 CHE_{II} 的全纯自同构群,且记为 $\mathrm{Aut}(GHE_{\mathrm{II}})$:

$$\begin{cases} w_j^* = w_j\det(I-Z_0\overline{Z_0})^{\frac{k}{2p_j}}\det(I-Z\overline{Z_0})^{-\frac{k}{p_j}}; \quad 1\leqslant j\leqslant r \\ Z^* = A(Z-Z_0)(I-\overline{Z_0}Z)^{-1}\overline{A}^{-1}, \end{cases} \tag{4.7.2}$$

其中 $A^{\mathrm{T}}A=(I-Z_0\overline{Z_0})^{-1}$, $Z_0\in\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(p)$, $Z\in\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(p)$. 此变换把 GHE_{II} 中的点(w,Z)映为$(w^*,0)$.

(3)下列变换属于 CHE_{III} 的全纯自同构群,且记为 $\mathrm{Aut}(GHE_{\mathrm{III}})$:

$$\begin{cases} w_j^* = w_j\det(I+Z_0\overline{Z_0})^{\frac{k}{2p_j}}\det(I+Z\overline{Z_0})^{-\frac{k}{p_j}}; \quad 1\leqslant j\leqslant r \\ Z^* = A(Z-Z_0)(I+\overline{Z_0}Z)^{-1}\overline{A}^{-1}, \end{cases} \tag{4.7.3}$$

其中 $A^{\mathrm{T}}A=(I+Z_0\overline{Z_0})^{-1}$, $Z_0\in\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(q)$, $Z\in\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(q)$. 此变换把 GHE_{III} 中的点(w,Z)映为$(w^*,0)$.

(4)下列变换属于 CHE_{IV} 的全纯自同构群,且记为 $\mathrm{Aut}(GHE_{\mathrm{IV}})$:

$$\begin{cases} w_j^* = w_j e^{\sqrt{-1}\theta_j}B^{-\frac{k}{p_j}}; \qquad 1\leqslant j\leqslant r \\ Z^* = B^{-1}\left[Z-\left(\frac{1+ZZ'}{2},\frac{1-ZZ'}{2\sqrt{-1}}\right)X_0\right]D. \end{cases} \tag{4.7.4}$$

其中

$$AA'=(I-X_0X_0')^{-1},\ DD'=(I-X_0'X_0)^{-1},\ Z_0\in\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(n),\ Z\in\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(n)$$

$$X_0=\frac{-1}{1-|Z_0Z_0'|^2}\begin{pmatrix}(\overline{Z_0Z_0'}-1)Z_0+(Z_0Z_0'-1)\overline{Z}_0 \\ \sqrt{-1}(Z_0Z_0'+1)\overline{Z}_0-\sqrt{-1}(\overline{Z_0Z_0'}+1)Z_0\end{pmatrix},$$

$$B=\left[\left(\frac{1+ZZ'}{2},\frac{1-ZZ'}{2\sqrt{-1}}\right)-ZX_0'\right]A\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{-1}\end{pmatrix}.$$

此变换把 GHE_{IV} 中的点(w,Z)映为$(w^*,0)$.

证:这都可以直接验证而得.

Ⅵ.1.2 定理 2.

(1)令 $x_j=x_j(w,Z)=|w_j|^2[\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})]^{-\frac{k}{p_j}}$, $j=1,2,\cdots,r$, 则 x_j 在 $\mathrm{Aut}(GHE_{\mathrm{I}})$下不变. 即 $x_j(w^*,Z^*)=x_j(w,Z)$, $j=1,2,\cdots,r$.

(2)令 $x_j=x_j(w,Z)=|w_j|^2[\det(I-Z\overline{Z})]^{-\frac{k}{p_j}}$, $j=1,2,\cdots,r$, 则 x_j 在 $\mathrm{Aut}(GHE_{\mathrm{II}})$下不变, $j=1,2,\cdots,r$.

(3)令 $x_j = x_j(w, Z) = |w_j|^2[\det(I + Z\bar{Z})]^{-\frac{k}{p_j}}, j = 1, 2, \cdots, r$，则 x_j 在 $\mathrm{Aut}(GHE_{\mathrm{III}})$ 下不变. $j = 1, 2, \cdots, r$.

(4)令 $x_j = x_j(w, Z) = |w_j|^2[\beta(Z, Z)]^{-\frac{k}{p_j}}, j = 1, 2, \cdots, r$，则 x_j 在 $\mathrm{Aut}(GHE_{\mathrm{IV}})$ 下不变. $j = 1, 2, \cdots, r$. 其中 $\beta(Z, Z) = 1 + |ZZ'|^2 - 2Z\bar{Z}^{\mathrm{T}}$.

证：直接验证.

Ⅵ.1.3　定理 3.（见文献[FH]）. 设

$$h_s(x_1, \cdots, x_{N-1}) = \sum_{(j_1, \cdots, j_{N-1})} \frac{\Gamma\left(s + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{j_l + 1}{p_l}\right)}{\prod_{l=1}^{N-1} \Gamma\left(\frac{j_l + 1}{p_l}\right)} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_{N-1}^{j_{N-1}}. \tag{4.7.5}$$

其中 $s > 0$，$\frac{1}{p_l}$ 为正整数，$1 \leqslant l \leqslant N-1$，$\sum_{l=1}^{N-1} |x_l|^{p_l} < 1$，则

$$h_s(x_1, \cdots, x_{N-1}) = \frac{\partial^{N-1}}{\partial_{x_1} \cdots \partial x_{N-1}} \cdot \left[\sum_{v_1=0}^{q_1-1} \cdots \sum_{v_{N-1}=0}^{q_{N-1}-1} \frac{\Gamma(s)}{\left(1 - \sum_{l=1}^{N-1} \omega_l^{v_l} x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^s}\right]. \tag{4.7.6}$$

其中

$$q_l = \frac{1}{p_l}, \omega_l = e^{\frac{2\pi}{q_l}\sqrt{-1}}, x_l^{\frac{1}{q_l}} = |x_l|^{\frac{1}{q_l}} e^{\frac{\phi_l}{q_l}\sqrt{-1}},$$

$$-\pi < \phi_l = \arg x_l < \pi, 1 \leqslant l \leqslant N-1.$$

Ⅵ.1.4　定理 4. 令 $R > 0$，$j_1, j_2, \cdots, j_N$ 为任何非负实数，则：

$$\int_{|w_1|^{2p_1} + |w_2|^{2p_2} + \cdots + |w_N|^{2p_N} < R} |w_1|^{2j_1} |w_2|^{2j_2} \cdots |w_N|^{2j_N} \mathrm{d}w$$

$$= R^{\sum_{l=1}^{N} \frac{j_l + 1}{p_l}} \cdot \frac{\pi^N \prod_{l=1}^{N} \Gamma\left(\frac{j_l + 1}{p_l}\right)}{\prod_{l=1}^{N} p_l \cdot \Gamma\left(1 + \sum_{l=1}^{N} \frac{j_l + 1}{p_l}\right)}. \tag{4.7.7}$$

证：由球极坐标变换易证.

Ⅵ. 2. Bergman 核函数

设 $(w^*, Z^*) = f(w, Z) \in \mathrm{Aut}(GHE_{\mathrm{I}})$ 为定理 1 所给的全纯自同构，且把点 (w, Z_0) 映为点 $(w^*, 0)$，$K_{\mathrm{I}}(w, Z; \bar{w}, \bar{Z})$ 为 GHE_{I} 的

Bergman 核函数. 由 Bergman 核函数的变换公式有

$$K_{\mathrm{I}}(w,Z;\overline{w},\overline{Z}) = K_{\mathrm{I}}(w^*,0;\overline{w}^*,0)\left|\det\left(\frac{\partial(w^*,Z^*)}{\partial(w,Z)}\right)\right|^2_{Z_0=Z} \tag{4.7.8}$$

因

$$\left(\frac{\partial(w^*,Z^*)}{\partial(w,Z)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w^*}{\partial w} & 0 \\ * & \frac{\partial Z^*}{\partial Z} \end{pmatrix}_{Z_0=Z}.$$

故

$$\left|\det\left(\frac{\partial(w^*,Z^*)}{\partial(w,Z)}\right)\right|^2_{Z_0=Z} = \left|\det\left(\frac{\partial w^*}{\partial w}\right)\det\left(\frac{\partial Z^*}{\partial Z}\right)\right|^2_{Z_0=Z}$$

$$= \prod_{i=1}^{r}\left|\det(I-Z_0\overline{Z}_0^{\mathrm{T}})^{\frac{k}{2p_i}}\det(I-Z\overline{Z}_0^{\mathrm{T}})^{-\frac{k}{p_i}}\right|^2\det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-(m+n)}\Big|_{Z_0=Z}$$

$$= \det(I-Z\overline{Z}^{\mathrm{T}})^{-(m+n+\frac{k}{p_1}+\cdots+\frac{k}{p_r})}.$$

为求 $K_{\mathrm{I}}(w,Z;\overline{w},\overline{Z})$, 只需求 $K_{\mathrm{I}}(w^*,0,\overline{w}^*,0)$ 即可. 为书写方便, 下面计算中, 先以 w 代表 w^*.

因 GHE_{I} 是 semi-Reinhardt 域, 因此 GHE_{I} 的标准完备正交函数系是 $\{w^jP_{vl}^{(j)}(Z)\}$, 其中

$$j=(j_1,\cdots,j_r),\ j_1,j_2,\cdots,j_r=0,1,\cdots;$$

$$v=0,1,\cdots;\ l=1,2,\cdots,m_v;$$

$$m_v=(mn+v-1)![v!(mn-1)!]^{-1}.$$

所以

$$K_{\mathrm{I}}(w,0;\overline{w},0)=\sum_{j_i\geq 0,\ v\geq 0,\ l=1,2,\cdots,m_v}|w^jP_{vl}^{(j)}(0)|^2.$$

因 $v\geq 1$ 时, $P_{vl}^{(j)}(0)=0$, 而 $v=0$ 时, $m_v=1$, 故

$$K_{\mathrm{I}}(w,0;\overline{w},0)=\sum_{j_i\geq 0}|w^jP_{01}^{(j)}(0)|^2.$$

又 $P_{01}^{(j)}(Z)$ 为零次齐次多项式, 所以 $P_{01}^{(j)}(Z)=P_{01}^{(j)}(0)$. 因而 $w^jP_{01}^{(j)}(0)$ 是 GHE_{I} 的标准完备正交函数系中的元素, 故

$$\int_{GHE_{\mathrm{I}}}|w|^{2j}|P_{01}^{(j)}(0)|^2\mathrm{d}w\mathrm{d}Z=1,$$

即

$$|P_{01}^{(j)}(0)|^{-2}=\int_{GHE_{\mathrm{I}}}|w|^{2j}\mathrm{d}w\mathrm{d}Z.$$

利用(4.7.7)和本章第1节的(4.1.2)得：

$$|P_{01}^{(j)}(0)|^2=\frac{\pi^r}{\prod_{l=1}^r p_l}\cdot\frac{\prod_{l=1}^r\Gamma\left(\frac{j_l+1}{p_l}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{l=1}^r\frac{j_l+1}{p_l}\right)}\cdot\int_{\mathfrak{R}_I(m,n)}\det(I-ZZ^T)^{k\sum_{l=1}^r\frac{j_l+1}{p_l}}\,\mathrm{d}Z$$

$$=\frac{\pi^{mn+r}}{\prod_{l=1}^r p_l}\cdot\frac{\prod_{l=1}^r\Gamma\left(\frac{j_l+1}{p_l}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{l=1}^r\frac{j_l+1}{p_l}\right)}\cdot\frac{\prod_{v=1}^m\Gamma\left(k\sum_{l=1}^r\frac{j_l+1}{p_l}+v\right)\prod_{v=1}^n\Gamma\left(k\sum_{l=1}^r\frac{j_l+1}{p_l}+v\right)}{\prod_{v=1}^{m+n}\Gamma\left(k\sum_{l=1}^r\frac{j_l+1}{p_l}+v\right)}.$$

所以

$$|P_{01}^{(j)}(0)|^2=C\frac{\Gamma(1+\lambda)}{\prod_{l=1}^r\Gamma\left(\frac{j_l+1}{p_l}\right)}\cdot\frac{\prod_{v=1}^{m+n}\Gamma(k\lambda+v)}{\prod_{v=1}^n\Gamma(k\lambda+v)\prod_{v=1}^m\Gamma(k\lambda+v)}.$$

其中

$$C=\frac{\prod_{l=1}^r p_l}{\pi^{mn+r}};\lambda=\sum_{l=1}^r\frac{j_l+1}{p_l}.$$

因

$$\frac{\prod_{v=1}^{m+n}\Gamma(k\lambda+v)}{\prod_{v=1}^n\Gamma(\lambda+v)\prod_{v=1}^m\Gamma(k\lambda+v)}=[(k\lambda+n)(k\lambda+n-1)\cdots$$

$$\cdot(k\lambda+1)][(k\lambda+n+1)(k\lambda+n)\cdots(k\lambda+2)]\cdots$$

$$\cdot[(k\lambda+n+m-1)(k\lambda+n+m-2)\cdots(k\lambda+m)]$$

为 λ 的 mn 次多项式. 由本章第1节的定理6知存在 $mn+1$ 个常数 $b_r(k)$, $r=0,1,\cdots,mn$ 使得

$$f_{1k}(\lambda):=\frac{\prod_{v=1}^{m+n}\Gamma(k\lambda+v)}{\prod_{v=1}^{n}\Gamma(k\lambda+v)\prod_{v=1}^{m}\Gamma(k\lambda+v)} \tag{4.7.9}$$
$$=\sum_{v=0}^{mn}b_v(k)\frac{\Gamma(\lambda+v+1)}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

其中 $b_0(k)=f_{1k}(-1)$,其余的 $b_r(k)$ 由下列递推公式决定:

$$b_r(k)=\frac{f_{1k}(-r-1)-\sum_{v=0}^{r-1}\frac{b_v(k)(-1)^v\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-v+1)}}{(-1)^r\Gamma(r+1)}.$$
$$r=1,2,\cdots,mn.$$

所以

$$|P_{01}^{(j)}(0)|^2=C\cdot\frac{\sum_{v=0}^{mn}b_v(k)\Gamma\left(\sum_{l=1}^{r}\frac{j_l+1}{p_l}+v+1\right)}{\prod_{l=1}^{r}\Gamma\left(\frac{j_l+1}{p_l}\right)},$$

由此得到

$$K_{\mathrm{I}}(w,0;\overline{w},0)=\sum_{j_l\geqslant 0}\sum_{v=0}^{mn}C\frac{b_v(k)\Gamma\left(\sum_{l=1}^{r}\frac{j_l+1}{p_l}+v+1\right)}{\prod_{l=1}^{r}\Gamma\left(\frac{j_l+1}{p_l}\right)}$$
$$\cdot|w_1|^{2j_1}\cdots|w_r|^{2j_r}$$
$$=C\sum_{v=0}^{mn}b_v(k)\sum_{j_r=0}^{\infty}\frac{|w_r|^{2j_r}}{\Gamma\left(\frac{j_r+1}{p_r}\right)}\sum_{(j_1\cdots j_{r-1})}\frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^{r-1}\frac{j_l+1}{p_l}+\frac{j_r+1}{p_r}+v+1\right)}{\prod_{l=1}^{r-1}\Gamma\left(\frac{j_l+1}{p_l}\right)}.$$
$$\cdot|w_1|^{2j_1}\cdots|w_{r-1}|^{2j_{r-1}}.$$

应用定理 3,取 $s=v+1+\frac{j_r+1}{p_r}$, $x_l=|w_l|^2$, $1\leqslant l\leqslant r$,在 $z=0$ 时,满足 $\sum_{l=1}^{r-1}|x_l|^{p_l}<1$,所以

$$K_{\mathrm{I}}(w,0;\overline{w},0)=C\sum_{v=0}^{mn}b_v(k)\sum_{j_r=0}^{\infty}h_s(x_1,x_2,\cdots,x_{r-1})\frac{x_r^{j_r}}{\Gamma\left(\frac{j_r+1}{p_r}\right)}$$
$$=C\sum_{v=0}^{mn}b_v(k)\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_{r-1}}$$

$$\cdot \sum_{v_1=0}^{q_1-1} \cdots \sum_{v_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1} \sum_{j_r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+v+\frac{j_r+1}{p_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{j_r+1}{p_r}\right)} \cdot \frac{x_r^{j_r}}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1} \omega_l^{v_l} x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{1+v+\frac{j_r+1}{p_r}}},$$

(4.7.10)

其中 $q_l = \frac{1}{p_l}, \omega_l = e^{\frac{2\pi}{q_l}\sqrt{-1}}, 1 \leqslant l \leqslant r-1$.

因

$$\frac{\Gamma\left(1+v+\frac{j_r+1}{p_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{j_r+1}{p_r}\right)} = \left(\frac{j_r+1}{p_r}+v\right)$$

$$\cdot \left(\frac{j_r+1}{p_r}+v-1\right) \cdots \left(\frac{j_r+1}{p_r}+1\right)\left(\frac{j_r+1}{p_r}\right)$$

$$= \frac{1}{p_r^{v+1}}(j_r+1+p_r v)(j_r+1+p_r(v-1)) \cdots$$

$$\cdot (j_r+1+p_r)(j_r+1) \tag{4.7.11}$$

为 j_r 的 $v+1$ 次多项式. 由本章第Ⅰ节的定量 6 知存在 $v+2$ 个常数 $c_j(v), j=0,1,\cdots,v+1$ 使得

$$g_{1v}(j_r) := \frac{\Gamma\left(1+v+\frac{j_r+1}{p_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{j_r+1}{p_r}\right)} = \sum_{j=0}^{v+1} c_j(v) \frac{\Gamma(j_r+j+1)}{\Gamma(j_r+1)}.$$

其中 $c_0(v)=0$, 而其余的 $c_j(v)$ 由下列递推公式决定:

$$c_j(v) = \frac{g_{1v}(-j-1) - \sum_{l=0}^{j-1} \frac{c_l(v)(-1)^l \Gamma(j+1)}{\Gamma(j-l+1)}}{(-1)^j \Gamma(j+1)},$$

$$j = 1,2,\cdots,v+1. \tag{4.7.12}$$

所以, 若令

$$t = \frac{x_r}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1} \omega_l^{v_l} x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{\frac{1}{p_r}}}, \tag{4.7.13}$$

则有

$$\sum_{j_r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+v+\frac{j_r+1}{p_r}\right)}{\Gamma\left(\frac{j_r+1}{p_r}\right)} \cdot \frac{x_r^{j_r}}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1} \omega_l^{v_l} x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{1+v+\frac{j_r+1}{p_r}}}$$

$$= \sum_{j_r=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{v+1} c_j(v)\frac{\Gamma(j_r+j+1)}{\Gamma(j_r+1)}\cdot\frac{t^{j_r}}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{(v+1+\frac{1}{p_r})}}$$

$$=\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{-(v+1+\frac{1}{p_r})}\sum_{j=1}^{v+1}c_j(v)\sum_{j_r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j_r+j+1)}{\Gamma(j_r+1)}t^{j_r}$$

$$=\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{-(v+1+\frac{1}{p_r})}\sum_{j=1}^{v+1}c_j(v)\sum_{j_r=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}(t^{j_r+j})$$

$$=\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{-(v+1+\frac{1}{p_r})}\sum_{j=1}^{v+1}c_j(v)\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left(\frac{t^j}{1-t}\right)$$

$$=\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{-(v+1+\frac{1}{p_r})}\sum_{j=1}^{v+1}c_j(v)\frac{\Gamma(j+1)}{(1-t)^{j+1}}.$$

下面将 w 仍改回 w^* 则有

$$K_1(w^*,0;\overline{w}^*,0)$$

$$= C\sum_{v=0}^{mn} b_v(k)\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_{r-1}}\sum_{v_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{v_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{v+1}c_j(v)\frac{\Gamma(j+1)(1-t)^{-(j+1)}}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{1+v+\frac{1}{p_r}}}$$

$$= C\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_{r-1}}\sum_{v_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{v_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{v=0}^{mn}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{v+1}b_v(k)c_j(v)\frac{\Gamma(j+1)(1-t)^{-(j+1)}}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{1+v+\frac{1}{p_r}}}$$

这里 $x_l=|w_l^*|^2=|w_l|^2\det(I-ZZ^{T})^{-\frac{k}{p_l}}$, $1\leqslant l\leqslant r$.
$q_l=\frac{1}{p_l}$, $\omega_l=e^{\frac{2\pi}{q_l}\sqrt{-1}}$, $1\leqslant l\leqslant r-1$, t 由(4.7.13)决定.

所以

$$K_1(w,Z;\overline{w},\overline{Z})=K_1(w^*,0;\overline{w}^*,0)\det(I-ZZ^{T})^{-(m+n+\sum_{l=1}^{r}\frac{k}{p_l})}$$

$$=C\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_{r-1}}\sum_{v_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{v_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{v=0}^{mn}\sum_{j=1}^{v+1}\Gamma(j+1)(1-t)^{-(j+1)}$$

$$\cdot\frac{b_v(k)c_j(v)}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{1+v+\frac{1}{p_r}}}\det(I-ZZ^{T})^{-(m+n+\sum_{l=1}^{r}\frac{k}{p_l})}.$$

若将 GHE_{I} 中的 w_j 看为向量 $w_j=(w_{j1},\cdots,w_{jN_j})$, $j=1,2,\cdots,r$, 应用膨胀原理得到 $GHE_{\mathrm{I}}(N_1,N_2,\cdots,N_r;m,n;p_1,p_2,\cdots,p_r;k)$ 的 Bergman 核函数为:

$$
\begin{aligned}
&K_{G\mathrm{I}}(w,Z;\bar{w},\bar{Z})\\
&=\frac{\prod_{l=1}^{r}p_l}{\pi^{mn+\sum_{l=1}^{r}N_l}}\cdot\frac{\partial^{N_1+N_2+\cdots+N_{r-1}+N_r-1}}{\partial x_1^{N_1}\partial x_2^{N_2}\cdots\partial x_{r-1}^{N_{r-1}}\partial x_r^{N_r-1}}\\
&\quad\cdot\sum_{v_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{v_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{v=0}^{mn}\sum_{j=1}^{v+1}\frac{\Gamma(j+1)}{(1-t)^{j+1}}\\
&\quad\cdot\frac{b_v(k)c_j(v)}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{v+1+\frac{1}{p_r}}}\det(I-Z\bar{Z}^{\mathrm{T}})^{-(m+n+\sum_{l=1}^{r}\frac{kN_l}{p_l})}
\end{aligned}
$$

其中 $|w_l|^2=|w_{l1}|^2+\cdots+|w_{lN_l}|^2$, $l=1,\cdots,r$. x_l, t 等同前.

Ⅷ.3. 其余几类广义华罗庚域的 Bergman 核函数

Ⅷ.3.1 类似可以得到 $GHE_{\mathrm{II}}(N_1,N_2,\cdots,N_r;p;p_1,p_2,\cdots,p_r;k)$ 的 Bergman 核为:

$$
\begin{aligned}
&K_{G\mathrm{II}}(w,Z;\bar{w},\bar{Z})\\
&=\frac{\prod_{l=1}^{r}p_l}{\pi^{\frac{p(p+1)}{2}+\sum_{l=1}^{r}N_l}}\cdot\frac{\partial^{N_1+N_2+\cdots+N_{r-1}+N_r-1}}{\partial x_1^{N_1}\partial x_2^{N_2}\cdots\partial x_{r-1}^{N_{r-1}}\partial x_r^{N_r-1}}\\
&\quad\cdot\sum_{v_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{v_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{v=0}^{\frac{p(p+1)}{2}}\sum_{j=1}^{v+1}\frac{\Gamma(j+1)}{(1-t)^{j+1}}\\
&\quad\cdot\frac{b_v(k)c_j(v)}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{1+v+\frac{1}{p_r}}}\det(I-Z\bar{Z})^{-(p+1+\sum_{l=1}^{r}\frac{kN_l}{p_l})},
\end{aligned}
$$

其中 $|w_l|^2=|w_{l1}|^2+\cdots+|w_{lN_l}|^2$, $x_l=|w_l|^2\det(I-Z\bar{Z})^{-\frac{k}{p_l}}$, $1\leqslant l\leqslant r$. $q_l=\frac{1}{p_l}$, $\omega_l=e^{\frac{2\pi}{q_l}\sqrt{-1}}$, $1\leqslant l\leqslant r-1$, t 由(4.7.13)决定.

令
$$
f_{2k}(\lambda):=\frac{\prod_{v=1}^{p}(k\lambda+v)\prod_{l=2}^{p}\Gamma(2k\lambda+l+p)}{\prod_{j=2}^{p}\Gamma(2k\lambda+2j-1)},
$$

则 $b_0(k)=f_{2k}(-1)$.

$$b_j(k)=\frac{f_{2k}(-j-1)-\sum_{v=0}^{j-1}\frac{b_v(k)(-1)^v\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-v+1)}}{(-1)^j\Gamma(j+1)}$$

$$j=1,2,\cdots,\frac{p(p+1)}{2} \tag{4.7.14}$$

$c_j(v),0\leqslant v\leqslant\frac{p(p+1)}{2},1\leqslant j\leqslant v+1$. 仍由(4.7.12)确定.

Ⅵ.3.2 $GHE_{\text{Ⅲ}}(N_1,N_2,\cdots,N_r;q;p_1,p_2,\cdots,p_r;k)$的 Bergman 核为:

$$K_{G\text{Ⅲ}}(w,Z;w,\overline{Z})$$

$$=\frac{\prod_{l=1}^r p_l}{\pi^{\frac{q(q-1)}{2}+\sum_{l=1}^r N_l}}\cdot\frac{\partial^{N_1+N_2+\cdots+N_{r-1}+N_r-1}}{\partial x_1^{N_1}\partial x_2^{N_2}\cdots\partial x_{r-1}^{N_{r-1}}\partial x_r^{N_r-1}}$$

$$\cdot\sum_{v_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{v_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{v=0}^{\frac{q(q-1)}{2}}\sum_{j=1}^{v+1}\frac{\Gamma(j+1)}{(1-t)^{j+1}}$$

$$\cdot\frac{b_j(k)c_j(v)}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{v+1+\frac{1}{p_r}}}\det(I+Z\overline{Z})^{(q-1+\sum_{l=1}^r\frac{kN_l}{p_l})},$$

其中$|w_l|^2=|w_{l1}|^2+\cdots+|w_{lN_l}|^2,x_l=|w_l|^2\det(I+Z\overline{Z})^{\frac{k}{p_l}},1\leqslant l\leqslant r.q_l=\frac{1}{p_l},\omega_l=e^{\frac{2\pi}{q_l}\sqrt{-1}},1\leqslant l\leqslant r-1,t$ 由(4.7.13)决定

$$令\ f_{3k}(\lambda):=\frac{\prod_{l=2}^{q}\Gamma(2k\lambda+l+q-2)}{\prod_{j=2}^{p}\Gamma(2k\lambda+2j-3)},$$

则 $b_0(k)=f_{3k}(-1)$.

$$b_j(k)=\frac{f_{3k}(-j-1)-\sum_{v=0}^{j-1}\frac{b_v(k)(-1)^v\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-v+1)}}{(-1)^j\Gamma(j+1)}$$

$$j=1,2,\cdots,\frac{q(q-1)}{2} \tag{4.7.15}$$

$c_j(v),0\leqslant v\leqslant\frac{q(q-1)}{2},1\leqslant j\leqslant v+1$. 仍由(4.7.12)确定.

Ⅵ.3.3 $GHE_{\text{Ⅳ}}(N_1,N_2,\cdots,N_r;n;p_1,p_2,\cdots,p_r;k)$的 Bergman 核为:

$$K_{G\text{Ⅳ}}(w,Z;w,\overline{Z})$$

$$
= \frac{\prod_{l=1}^{r} p_l}{\pi^{n+\sum_{l=1}^{r} N_l}} \cdot \frac{\partial^{N_1+N_2+\cdots+N_{r-1}+N_r-1}}{\partial x_1^{N_1}\partial x_2^{N_2}\cdots\partial x_{r-1}^{N_{r-1}}\partial x_r^{N_r-1}}
$$

$$
\cdot \sum_{v_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{v_{r-1}=0}^{q_{r-1}-1}\sum_{v=0}^{n}\sum_{j=1}^{v+1}\frac{\Gamma(j+1)}{(1-t)^{j+1}}
$$

$$
\cdot \frac{b_v(k)c_j(v)}{\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}\omega_l^{v_l}x_l^{\frac{1}{q_l}}\right)^{v+1+\frac{1}{p_r}}}[\beta(Z,Z)]^{-(n+\sum_{l=1}^{r}\frac{kN_l}{p_l})},
$$

其中 $|w_l|^2=|w_{l1}|^2+\cdots+|w_{lN_l}|^2, x_l=|w_l|^2[\beta(Z,Z)]^{-\frac{k}{p_l}}, 1\leqslant l\leqslant r$.
$q_l=\frac{1}{p_l}, \omega_l=e^{\frac{2\pi}{q_l}\sqrt{-1}}, 1\leqslant l\leqslant r-1, t$ 由形式(4.7.13)决定.

令 $f_{4k}(\lambda):=\frac{2^{n-1}(2k\lambda+n)\Gamma(k\lambda+n)}{\Gamma(k\lambda+1)}$,
则 $b_0(k)=f_{4k}(-1)$.

$$
b_j(k)=\frac{f_{4k}(-j-1)-\sum_{v=0}^{j-1}\frac{b_v(k)(-1)^v\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-v+1)}}{(-1)^j\Gamma(j+1)}
$$

$$
j=1,2,\cdots,n. \tag{4.7.16}
$$

$c_j(v), 0\leqslant v\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant v+1$. 仍由(4.7.12)确定.

注: 当 $k=1$ 时就是华罗庚域,这里的结果与文[YW3, YW5]的结果一致. 本文内容取自文献[YWS, YWS1, YWS2].

Ⅷ. 广义例外华罗庚域的 Bergman 核函数

上面我们已经求出了超 Cartan 域, Cartan-Egg 域, 华罗庚域和广义华罗庚域的 Bergman 核函数的显表达式, 而且后一种域都包含前一种域. 众所周知, 还有第五类和第六类典型域, 它们的维数分别为 16 和 27, 称为例外典型域或例外 Cartan 域. 那末相应于这两类例外域的广义华罗庚域的 Bergman 核函数的显表达式能否求出呢? 这就是本节要研究的主要问题之一. 这要用到研究对称典型域的一种常用理论, 所谓 Jordan Triple System(JTS)理论[FKK]. 在 JTS 理论中, 称上述不等式的右端为相应的典型域的一数模(generic norm), 常用记号 $N(*,*)$ 表示. 下面的(4.8.11), (4.8.12)两式所定义的域, 就是我们所要研究的相应于两类例外典型域的华罗庚域, 我们称其为广义例外华罗庚域. 当此两式右端的幂次 $N=1$ 时, 称为例外华罗庚域. 我们首先介绍合成代数(composition algebra)与 JTS 理论中的例外典型域(也称例外 Cartan 域, 简称为例外域)的

概念.

用 κ 表示域 **R** 或域 **C**. κ 上的合成代数的概念如下(见[Jac]):κ 上的合成代数就是一个对(A,n),其中 A 是具有单位元$e\neq 0$ 的 κ-代数,n 是 A 上的非奇异的二次形式.满足如下的乘法关系

$$n(ab)=n(a)n(b)(a,b\in A) \tag{4.8.1}$$

称二次形式 n 为合成代数的范数,$n(a)$为 a 的范数.我们用$(:)$表示和 n 相关的双线性形式

$$(a:b)=n(a+b)-n(a)-n(b)(a,b\in A), \tag{4.8.2}$$

A 中的元素 a 的 Cayley 共轭被定义为

$$\bar{a}=(a:e)e-a. \tag{4.8.3}$$

合成代数的维数为 1,2,4,8.用 $\mathscr{C}_C$ 表示 **C** 上的 8 维的合成代数.用 $\mathscr{C}_\mathbf{R}$ 表示 **R** 上的 8 维的具有正定范数的合成代数.称 $\mathscr{C}_C$ 为复的 Cayley 代数,称 $\mathscr{C}_\mathbf{R}$ 为 Cayley 实可除代数.令 $\mathscr{C}$ 表示 $\mathscr{C}_C$ 或 $\mathscr{C}_\mathbf{R}$.空间 $H_3(\mathscr{C})$是由表值属于 $\mathscr{C}$ 的 3×3 矩阵所组成的 κ-向量空间,就 $\mathscr{C}$ 中的 Cayley 共轭而言,这些矩阵是 Hermitian 的.$H_3(\mathscr{C})$中的元素 a 被写为

$$a=\begin{pmatrix}\alpha_1 & a_3 & \bar{a}_2\\ \bar{a}_3 & \alpha_2 & a_1\\ a_2 & \bar{a}_1 & \alpha_3\end{pmatrix}, \tag{4.8.4}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\kappa$,$a_1,a_2,a_3\in\mathscr{C}$.我们重写(4.8.4)为如下形式:

$$a=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j e_j+\sum_{j=1}^{3}F_j(a_j), \tag{4.8.5}$$

e_j 与 $F_j(a_j)$的定义是显然的.很显然 $\dim_\kappa(H_3(\mathscr{C}))=27$.在 $H_3(\mathscr{C})$上,定义双线性形式

$$(a:b)=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\beta_j+\sum_{j=1}^{3}(a_j:b_j) \tag{4.8.6}$$

对 $a=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j e_j+\sum_{j=1}^{3}F_j(a_j)$,$b=\sum_{j=1}^{3}\beta_j e_j+\sum_{j=1}^{3}F_j(b_j)$.定义 $a=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j e_j+\sum_{j=1}^{3}F_j(a_j)\in H_3(\mathscr{C})$ 的伴随 $a^\#$ 为

$$a^\#=\sum_i(\alpha_j\alpha_k-n(a_i))e_i+\sum_i\bar{F}_i(a_ja_k-\alpha_i\bar{a}_i), \tag{4.8.7}$$

其中 $\sum_i$ 指 $\sum_{i=1}^{3}$ 且 j,k 满足(i,j,k)是$(1,2,3)$的偶置换,$\bar{F}_i(c)$表示 $F_i(\bar{c})$.

定义 $a\times b:=(a+b)^\#-a^\#-b^\#$.

定义 $\det a:=\frac{1}{3!}(a\times a:a)=\frac{1}{3}(a^\#:a)$.

我们认为复合成代数 $\mathcal{O}_C$ 是 $\mathcal{O}_c$ 的复化：$\mathcal{O}_C = C\otimes_R \mathcal{O}_c$；$\mathcal{O}_C$ 上的乘积、Cayley 共轭与范数的定义是 $\mathcal{O}_c$ 上相应定义的扩展：$(\alpha\otimes a)(\beta\otimes b) = \alpha\beta\otimes ab$，$(\widetilde{\alpha\otimes a}) = \alpha\otimes\tilde{a}$ 和 $n(\alpha\otimes a) = \alpha^2 n(a)(\alpha,\beta\in\mathbf{C};a,b\in\mathcal{O}_c)$. 此外，定义代数 $\mathcal{O}_c$ 上的复共轭为 $\overline{(\alpha\otimes a)} = \bar{\alpha}\otimes a\ (\alpha\in\mathbf{C}, a\in\mathcal{O}_c)$. 对任何 $a = \sum_{j=1}^3 a_j e_j + \sum_{j=1}^3 F_j(a_j)\in H_3(\mathcal{O}_c)$，定义它的复共轭为 $\bar{a} = \sum_{j=1}^3 \bar{a}_j e_j + \sum_{j=1}^3 F_j(\bar{a}_j)\in H_3(\mathcal{O}_C)$. Hermition 内积被定义为 $(a\mid b) = (a:b)$. 现在，我们可以通过下面的不等式来定义 27 维的例外 Cartan 域：

$$D_{27} = \left\{x\in H_3(\mathcal{O}_C)\left|\begin{array}{ll}1-(x\mid x)+(x^\#\mid x^\#)-|\det x|^2 & >0,\\ 3-2(x\mid x)+(x^\#\mid x^\#) & >0,\\ 3-(x\mid x) & >0.\end{array}\right.\right\},$$

(4.8.8)

D_{27}是有界的，对称的，圆型域. D_{27}的 Bergman 核函数为：

$$K_{D_{27}}(x,y) = \frac{1}{V(D_{27})[1-(x\mid y)+(x\#\mid y\#)-\det x\det\bar{y}]^{18}},$$

其中 $V(D_{27})$是域 D_{27}的体积. 定义 16 维的例外 Cartan 域如下：

$$D_{16} = \left\{x = F_2(x_2)+F_3(x_3)\left|\begin{array}{ll}1-(x\mid x)+(x^\#\mid x^\#) & >0,\\ 2-(x\mid x) & >0.\end{array}\right.\right\},$$

(4.8.9)

D_{16}是有界的，对称的，圆型域. D_{16}的 Bergman 核函数为：

$$K_{D_{16}}(x,y) = \frac{1}{V(D_{16})[1-(x\mid y)+(x^\#\mid y^\#)]^{12}}, \quad (4.8.10)$$

其中 $V(D_{16})$是域 D_{16}的体积. 定义 $N_{16}(x,y) = 1-(x\mid y)+(x^\#\mid y^\#)$，$N_{27}(x,y) = 1-(x\mid y)+(x^\#\mid y^\#)-\det x\det\bar{y}$.

注：如果想知道 $N(x,y)$ 的确切含义，请看 [FKK]. $V(D_{16})$ 与 $V(D_{27})$由下面的引理 4 给出.

现在，我们将研究如下的被称为广义例外华罗庚域的域：

$$\begin{aligned}&HE_{\mathrm{I}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,N)\\ &= \{z\in\mathbf{C}^n, x\in D_{16}\mid |z_1|^{2p_1}+\cdots+|z_n|^{2p_n}\\ &< [1-(x\mid x)+(x^\#\mid x^\#)]^N\},\end{aligned} \quad (4.8.11)$$

$$\begin{aligned}&HE_{\mathrm{II}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;27,N)\\ &= \{z\in\mathbf{C}^n, x\in D_{27}\mid |z_1|^{2p_1}+\cdots+|z_n|^{2p_n}\\ &< [1-(x\mid x)+(x^\#\mid x^\#)-\det x\det\bar{x}]^N\},\end{aligned} \quad (4.8.12)$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是正实数，$N>0$. 当 $1/p_1, 1/p_2, \cdots, 1/p_{n-1}$ 是正整数且 $p_n>0$, $N>0$ 时，我们将给出上面两类域的 Bergman 核函数的显式表达式. 如果 $N=1$，则相应的域称为例外华罗庚域. 如果 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是正整数且 $N=1$，我们将利用多变量的超几何函数研究例外华罗庚域的 Bergman 核函数在边界点附近的渐进性质.

Ⅷ. 1. Bergman 核函数(Ⅰ)

我们计算 Bergman 核函数的主要方法是把华罗庚方法与无穷级数结合起来. 我们首先给出一些定理与引理.

定义 1. 设 D 是 $\mathbf{C}^{m+n}$ 中包含原点的有界域，如果它的全纯自同构群包括下面的映射

$$\begin{cases} w_j^* = e^{\sqrt{-1}\theta_j} w_j, & j=1,2,\cdots,m \\ Z_l^* = e^{\sqrt{-1}\theta} Z_l, & l=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{4.8.13}$$

则称 D 为 semi-Reinhardt 域[YW4, YW7].

定理 1. 设 D 是 $\mathbf{C}^{m+n}$ 中的 semi-Reinhardt 域，则

$$\{w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \cdots w_m^{\alpha_m} p_{ki}^{(\alpha)}(z)\}$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, k=0,1,2,\cdots; i=1,2,\cdots,m_k; m_k=(n+k-1)!/[k!(n-1)!])$ 是 $L^2H(D)$ 的完备规范正交系，其中 $p_{ki}^{(\alpha)}(z)$ 是关于 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的 k 次多项式. 对任何固定的 k, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$, $p_{k1}^{(\alpha)}(z)$, $p_{k2}^{(\alpha)}(z), \cdots, p_{km_k}^{(\alpha)}(z)$ 是线性无关的[YW4, YW7].

假设 $x_0 \in D_{16}$. 则存在一全纯映射 $\varphi_{x_0} \in \mathrm{Aut}(D_{16})$，使得 $\varphi_{x_0}(x_0)=0$. 因此，我们有 $K_{D_{16}}(x_0, x_0)=K_{D_{16}}(0,0)|\det(\varphi'_{x_0}(x_0))|^2$, $K_{D_{16}}(x, x_0)=K_{D_{16}}(\varphi_{x_0}(x), 0)\det(\varphi'_{x_0}(x))\cdot\overline{\det(\varphi'_{x_0}(x_0))}$. 易得

$$\det(\varphi'_{x_0}(x_0)) = \frac{1}{\overline{\det(\varphi'_{x_0}(x_0))}[1-(x|x_0)+(x^{\#}|x_0^{\#})]^{12}} \tag{4.8.14}$$

$$|\det(\varphi'_{x_0}(x_0))|^2 = \frac{1}{N_{16}(x_0, x_0)^{12}} \tag{4.8.15}$$

$$K_{D_{16}}(x, x) = K_{D_{16}}(\varphi_{x_0}(x), \varphi_{x_0}(x))|\det(\varphi'_{x_0}(x))|^2$$

$$N_{16}(\varphi_{x_0}(x), \varphi_{x_0}(x)) = N_{16}(x, x)\frac{N_{16}(x_0, x_0)}{|N_{16}(x, x_0)|^2}. \tag{4.8.16}$$

定理 2. 假设 $x_0 \in D_{16}$, $\varphi_{x_0} \in \mathrm{Aut}(D_{16})$，满足 $\varphi_{x_0}(x_0)=0$，则下面

的映射是 $H_{\mathrm{V}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,N)$的全纯自同构：

$$\begin{cases} z_j^* = z_j \dfrac{[N_{16}(x_0,x_0)]^{N/(2p_j)}}{[N_{16}(x,x_0)]^{N/p_j}]}(j=1,2,\cdots,n) \\ x^* = \varphi_{x_0}(x) \end{cases}, \quad (4.8.17)$$

其中 $x\in D_{16}$.

定理 3. 假设 $x_0\in D_{27}$, $\varphi_{x_0}\in \mathrm{Aut}(D_{27})$，满足 $\varphi_{x_0}(x_0)=0$，则下面的映射是 $HE_{\mathrm{VI}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;27,N)$的全纯自同构：

$$\begin{cases} z_j^* = z_j \dfrac{[N_{27}(x_0,x_0)]^{N/(2p_j)}}{[N_{27}(x,x_0)]^{N/p_j}]}(j=1,2,\cdots,n) \\ x^* = \varphi_{x_0}(x) \end{cases}, \quad (4.8.18)$$

其中 $x\in D_{27}$.

引理 1. 假设 $f(z)=\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ 是 $0\in \mathbf{C}^m$ 某邻域内的全纯函数，则

$$\sum_{\alpha\geq 0} c_{\alpha_1 q_1,\cdots,\alpha_m q_m} z_1^{\alpha_1 q_1}\cdots z_m^{\alpha_m q_m} = \frac{1}{\prod_{l=1}^m q_l}\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_m=0}^{q_m-1} f(\omega_1^{j_1}z_1,\cdots,\omega_m^{j_m}z_m),$$

$$(4.8.19)$$

其中 $\omega_j=\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}/q_j}(j=1,2,\cdots,m)$, $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 是正整数[FH].

引理 2. 对任何 $s>0$，

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\geq 0} \frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^m \alpha_l + s\right)}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_m!} y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\cdots y_m^{\alpha_m} = \frac{\Gamma(s)}{\left(1-\sum_{l=1}^m y_l\right)^s},$$

$$(4.8.20)$$

其中 $y\in \mathbf{C}^m$ 满足 $\left|\sum_{l=1}^m y_l\right|<1$.

引理 3. 设 $R>0$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是非负实数，则

$$\int_{|w_1|^{2p_1}+|w_2|^{2p_2}+\cdots+|w_n|^{2p_n}<R} |w_1|^{2\alpha_1}|w_2|^{2\alpha_2}\cdots|w_n|^{2\alpha_n}\mathrm{d}w$$

$$= R^{\sum_{l=1}^n \frac{\alpha_l+1}{p_l}} \frac{\pi^n}{\prod_{l=1}^n p_l} \frac{\prod_{l=1}^n \Gamma\left(\frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{l=1}^n \frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)}. \quad (4.8.21)$$

证：设 $w_j=z_jR^{1/(2p_j)}(j=1,2,\cdots,n)$. 在此变换下，(4.8.21)式的左边等于

$$R^{\sum_{l=1}^n(\alpha_l+1)/p_l}\int_{|z_1|^{2p_1}+|z_2|^{2p_2}+\cdots+|z_n|^{2p_n}<1} |z_1|^{2\alpha_1}|z_2|^{2\alpha_2}\cdots|z_n|^{2\alpha_n}\mathrm{d}z.$$

在[DA]中，D'Angelo 已得出

$$\int_{|z_1|^{2p_1}+|z_2|^{2p_2}+\cdots+|z_n|^{2p_n}<1} |z_1|^{2\alpha_1}|z_2|^{2\alpha_2}\cdots|z_n|^{2\alpha_n}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi^n}{\prod_{l=1}^n p_l}\frac{\prod_{l=1}^n\Gamma\left(\frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{l=1}^n\frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)}.$$

引理 4. 设 $V(D_{16})$是 D_{16}的体积，$V(D_{27})$是 D_{27}的体积. 则

$$V(D)=\pi^n\frac{\Gamma(1)\Gamma(1+a/2)\cdots\Gamma(1+(l-1)a/2)}{\Gamma(p)\Gamma(p-a/2)\cdots\Gamma(p-(l-1)a/2)},$$

如果 $D=D_{16}$，则 $n=16, a=6, l=2, p=12$；如果 $D=D_{27}$，则 $n=27, a=8, l=3, p=18$[Kor].

引理 5. 对任何 $s\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Re}s>-1$,

$$\int_{D_{16}}[1-(x|x)+(x^{\#}|x^{\#})]^s\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8!\prod_{j=4}^{11}j}{\prod_{j=1}^{8}(s+j))\prod_{j=4}^{11}(s+j)}V(D_{16})\text{[Ros]}\qquad(4.8.22)$$

引理 6.[Ros] 对任何 $s\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Re}s>-1$,

$$\int_{D_{27}}[1-(x|x)+(x^{\#}|x^{\#})-\det x\det\bar{x}]^s\mathrm{d}x$$

$$=\frac{9!\prod_{j=5}^{13}j\prod_{j=9}^{17}j}{\prod_{j=1}^{9}(s+j))\prod_{j=5}^{13}(s+j)\prod_{j=9}^{17}(s+j)}V(D_{27}).$$

$$(4.8.23)$$

设 $z_0=(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_n^0)$，假定 $K_{16}((z,x);(z,x))$是 $HE_N(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,N)$的 Bergman 核函数. 我们把全纯自同构(4.8.17)写成如下的形式：$(z^*,x^*)=f(z,x)$. 对任何固定的点$(z_0,x_0)\in HE_N(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,N)$，我们有 $f(z_0,x_0)=(z_0^*,0)$，其中 $z_0^*=(z_1^{0*},z_2^{0*},\cdots,z_n^{0*})$，$z_l^{0*}=z_l^0[N_{16}(x_0,x_0)]^{N/(2p_l)}$ $(l=1,2,\cdots,n)$.

我们易得

$$K_{16}((z_0,x_0);(z_0,x_0))=K((z_0^*,0);(z_0^*,0))|\det J_f|^2_{z=z_0,x=x_0},$$

$$(4.8.24)$$

其中 J_f 是变换$(z^*,x^*)=f(z,x)$的 Jacobi 矩阵. 它具有如下的形式：

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial z^*}{\partial z} & 0 \\ * & \frac{\partial x^*}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{4.8.25}$$

其中$\frac{\partial x^*}{\partial x}$是一个 16×16 矩阵.显然

$$\frac{\partial z_l^*}{\partial z_l}\Big|_{\substack{z=z_0\\x=x_0}} = [N_{16}(x_0,x_0)]^{-N/2p_l}(l = 1,2,\cdots,n), \tag{4.8.26}$$

根据(4.8.15)式,得

$$\left|\det\frac{\partial x^*}{\partial x}\right|^2_{x=x_0} = [N_{16}(x_0,x_0)]^{-12}.$$

因此,易得

$$K_{16}((z_0,x_0);(z_0,x_0)) = [N_{16}(x_0,x_0)]^{(12+\sum_{l=1}^{n}N/p_l)} \cdot K_{16}((z_0^*,0);(z_0^*,0)). \tag{4.8.27}$$

$$K_{16}((z,x);(z,x)) = [N_{16}(x,x)]^{(12+\sum_{l=1}^{n}N/p_l)} \cdot K((z^*,0);(z^*,0)), \tag{4.8.28}$$

其中 $z^*=(z_1^*,z_2^*,\cdots,z_n^*)$, $z_l^* = z_l[N_{16}(x,x)]^{N/2p_l}(l=1,2\cdots n)$,对任何$(z,x)\in HE_{\mathrm{V}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,k)$.

由定理 1 得$\{z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}p_{ki}^{(\alpha)}(x)\}$是 $L^2H(HE_{\mathrm{V}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,N))$的完备规范正交系.注意到 $p_{ki}^{(\alpha)}(x)$是 k 次多项式.根据 Bergman 核函数的定义,得

$$\begin{aligned}K_{16}((z,0);(z,0)) &= \sum_{\alpha\geqslant 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_k}|z_1|^{2\alpha_1}|z_2|^{2\alpha_2}\cdots|z_n|^{2\alpha_n}|p_{ki}^{(\alpha)}(0)|^2 \\ &= \sum_{\alpha\geqslant 0}|z_1|^{2\alpha_1}|z_2|^{2\alpha_2}\cdots|z_n|^{2\alpha_n}|p_{01}^{(\alpha)}(0)|^2,\end{aligned} \tag{4.8.29}$$

显然

$$\int_{HE_{\mathrm{V}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,N)}|z^\alpha|^2|p_{01}^{(\alpha)}(0)|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 1.$$

于是,

$$|p_{01}^{(\alpha)}(0)|^2 = \frac{1}{\int_{HE_{\mathrm{V}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,N)}|z^\alpha|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x}. \tag{4.8.30}$$

设 $a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = |p_{01}^{(\alpha)}(0)|^2$. 下面,我们将计算 $\int_{HE_{\mathrm{V}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,N)}|$

$z^{\alpha}|^2 dz dx$.

$$\int_{HE_V(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,k)} |z^{\alpha}|^2 dz dx$$
$$= \int_{x\in D_{16}} \left(\int_{|z_1|^{2p_1}+|z_2|^{2p_2}+\cdots+|z_n|^{2p_n}<[N_{16}(x,x)]^N} |z_1|^{2\alpha_1}|z_2|^{2\alpha_2}\cdots|z_n|^{2\alpha_n} dz \right) dx, \tag{4.8.31}$$

根据(4.8.21)式,(4.8.31)式的右边等于

$$\frac{\pi^n}{\prod_{l=1}^n p_l} \frac{\prod_{l=1}^n \Gamma\left(\frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{l=1}^n \frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)} \int_{x\in D_{16}} [N_{16}(x,x)]^{N\sum_{l=1}^n(\alpha_l+1)/p_l} dx. \tag{4.8.32}$$

根据(4.8.22)式,(4.8.32)式等于

$$\frac{V(D_{16})\pi^n 8! \prod_{j=4}^{11} j}{\prod_{l=1}^n p_l} \cdot \frac{\prod_{l=1}^n \Gamma\left(\frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)}{\Gamma(1+\lambda)\prod_{j=1}^8 (N\lambda+j)\prod_{j=4}^{11}(N\lambda+j)}, \tag{4.8.33}$$

其中 $\lambda=\sum_{l=1}^n(\alpha_l+1)/p_l$. 设

$$\frac{1}{M} = \frac{V(D_{16})\pi^n 8! \prod_{j=4}^{11} j}{\prod_{l=1}^n p_l}, \tag{4.8.34}$$

则

$$a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = M \frac{\Gamma(1+\lambda)\prod_{j=1}^8(N\lambda+j)\prod_{j=4}^{11}(N\lambda+j)}{\prod_{l=1}^n \Gamma\left(\frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)}. \tag{4.8.35}$$

假设 $f(\lambda)=\prod_{j=1}^8(N\lambda+j)\prod_{j=4}^{11}(N\lambda+j)$. $f(\lambda)$是关于 λ 的 16 次多项式.因此,存在常数 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_{16}$,使得

$$f(\lambda) = b_0 + \sum_{k=1}^{16} b_k(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+k)$$
$$= \sum_{k=0}^{16} b_k \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+1)}, \tag{4.8.36}$$

通过简单的计算得 $b_0=f(-1)$,我们能够从等式 $f(-(k+1)) = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j(\lambda+1)\cdots(\lambda+j)(k\geqslant 1)$ 得到所有的 b_j.

注:如果 $N=1$,则 $b_1=0, b_2=0,\cdots,b_{10}=0$.

现在，我们能重写 $a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ 为如下形式：

$$a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}=M\frac{\Gamma(1+\lambda)}{\prod_{l=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)}\sum_{k=0}^{16}b_k\frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+1)}$$

$$=M\frac{1}{\prod_{l=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\alpha_l+1}{p_l}\right)}\sum_{k=0}^{16}b_k\Gamma(\lambda+k+1).$$

(4.8.37)

假设 $1/p_j=q_j(j=1,2,\cdots,n-1)$ 是正整数，$p_n=q>0,N>0$. 我们重写(4.8.29)为如下形式：

$$K_{16}((z,0);(z,0))=\sum_{\alpha\geqslant 0}a_\alpha|z_\alpha|^2=M\sum_{k=0}^{16}b_k$$

$$\cdot\sum_{\alpha\geqslant 0}\frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^{n-1}q_l(\alpha_l+1)+\frac{\alpha_n+1}{q}+k+1\right)}{\prod_{l=1}^{n-1}\Gamma(q_l(\alpha_l+1))\Gamma\left(\frac{\alpha_n+1}{q}\right)}|z_1|^{2\alpha_1}\cdots|z_n|^{2\alpha_n}.$$

(4.8.38)

因此，我们必须计算级数

$$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\sum_{\alpha\geqslant 0}\frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^{n-1}q_l(\alpha_l+1)+\frac{\alpha_n+1}{q}+k+1\right)}{\prod_{l=1}^{n-1}\Gamma(q_l(\alpha_l+1))\Gamma\left(\frac{\alpha_n+1}{q}\right)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

(4.8.39)

首先，我们计算函数

$$h_s(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$$

$$=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}\geqslant 0}\frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^{n-1}q_l(\alpha_l+1)+s\right)}{\prod_{l=1}^{n-1}\Gamma(q_l(\alpha_l+1))}$$

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

(4.8.40)

其中 $s=(\alpha_n+1)/q+k+1$. 根据(4.8.19)式，(4.8.20)式，我们有

$$h_s(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$$

$$=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_{n-1}}\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{n-1}=0}^{q_{n-1}-1}\frac{\Gamma(s)}{\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^s}.\quad(4.8.41)$$

(如果想了解细节，请见[FH]，p.503～504)根据(4.8.41)，我们有

$$
\begin{aligned}
f_k(x) &= \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{x_n^{\alpha_n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_n-1}{q}\right)} \\
&\quad \times \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}=0} \frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^{n-1} q_l(\alpha_l+1)+\frac{\alpha_n-1}{q}+k+1\right)}{\prod_{l=1}^{n-1}\Gamma(q_l(\alpha_l+1))} x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \\
&= \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{x_n^{\alpha_n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_n+1}{q}\right)} h_{(\alpha_n+1)/q+k+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}) \qquad (4.8.42) \\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1\cdots\partial x_{n-1}} \sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{n-1}=0}^{q_{n-1}-1}\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_n+1}{q}+k+1\right)}{\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^{\frac{\alpha_n+1}{q}+k+1}} \frac{x_n^{\alpha_n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_n+1}{q}\right)}.
\end{aligned}
$$

下面,计算 $\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}\frac{\Gamma((\alpha_n+1)/q+k+1)}{\Gamma((\alpha_n+1)/q)}\cdot\frac{x_n^{\alpha_n}}{\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^{\alpha_n/q}}$.
假设 $t=x_n\left[\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^{1/q}\right]^{-1}$, 则我们必须计算 $\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}\frac{\Gamma((\alpha_n+1)/q+k+1)}{\Gamma((\alpha_n+1)/q)}t^{\alpha_n}$. 设 $g_k(\lambda)=\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{\lambda+1}{q}+j\right)$. 显然 $g_k(\lambda)$ 是一 $(k+1)$ 次多项式. 因此,存在常数 $c_{jk}(j=0,1,\cdots,k+1)$, 使得 $g_k(\lambda)=c_{0k}+\sum_{j=1}^{k+1}c_{jk}(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+j)$, 其中 $c_{0k}=0$. 于是,我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}\frac{\Gamma((\alpha_n+1)/q+k+1)}{\Gamma((\alpha_n+1)/q)}t^{\alpha_n} &= \sum_{\alpha_n=0}^{\infty}g_k(\alpha_n)t^{\alpha_n} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}c_{jk}\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}(\alpha_n+1)\cdots(\alpha_n+j)t^{\alpha_n} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}c_{jk}j!(1-t)^{(j+1)}
\end{aligned}
$$

因此,得

$$
\begin{aligned}
f_k(x) &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_{n-1}}\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{n-1}=0}^{q_{n-1}-1} \\
&\quad \cdot\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^{(1/q+k+1)}\sum_{j=1}^{k+1}c_{jk}j!\left[1-\frac{x_n}{\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^{1/q}}\right]^{(j+1)}.
\end{aligned}
$$

最后，得

$$f_k(x)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_{n-1}}\sum_{j_1=0}^{q_1-1}\cdots\sum_{j_{n-1}=0}^{q_{n-1}-1}\sum_{j=1}^{k+1}$$

$$\cdot\, c_{jkJ}\,j!\frac{\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^{j/q-(k+1)}}{\left[\left(1-\sum_{l=1}^{n-1}\omega_l^{j_l}x_l^{1/q_l}\right)^{1/q}-x_n\right]^{j+1}}. \quad (4.8.43)$$

根据(4.8.38)式，(4.8.39)式，(4.8.43)式，得

$$K((z,0);(z,0)) = M\sum_{k=0}^{16}b_kf_k(|z_1|^2,|z_2|^2,\cdots,|z_n|^2). \tag{4.8.44}$$

定理 4. 如果 $1/p_1=q_1,1/p_2=q_2,\cdots,1/p_{n-1}=q_{n-1}$ 是正整数，$p_n=q>0,N>0$，则 $HE_{\mathrm{V}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;16,N)$ 的 Bergman 核函数是：

$$K_{16}((z,x);(z,x)) = [N_{16}(x,x)]^{-(12+N\sum_{l=1}^{n-1}q_l+N\frac{1}{q})}$$

$$\cdot\, M\sum_{k=0}^{16}b_kf_k(|z_1^*|^2,\cdots,|z_n^*|^2), \tag{4.8.45}$$

其中 $z_l^*=z_l[N_{16}(x,x)]^{\frac{Nq_l}{2}}(l=1,2,\cdots,n-1)$，$z_n^*=z_n[N_{16}(x,x)]^{\frac{N}{2q}}$，$b_{16}=N^{16}$.

定理 5. 如果 $1/p_1=q_1,1/p_2=q_2,\cdots,1/p_{n-1}=q_{n-1}$ 是正整数，$p_n=q>0,N>0$，则 $HE_{\mathrm{VI}}(p_1,p_2,\cdots,p_n;27,N)$ 的 Bergman 核函数是：

$$K_{27}((z,x);(z,x)) = [N_{27}(x,x)]^{-(18+N\sum_{l=1}^{n-1}q_l+N\frac{1}{q})}$$

$$\cdot\,\frac{\prod_{l=1}^{n}p_l}{\pi^n 9!\prod_{j=5}^{13}j\prod_{j=9}^{17}j}\sum_{k=0}^{27}a_kf_k(|z_1^*|^2,\cdots,|z_n^*|^2), \quad (4.8.46)$$

其中 $z_l^*=z_l[N_{27}(x,x)]^{\frac{Nq_l}{2}}(l=1,2,\cdots,n-1)$，$z_n^*=z_n[N_{27}(x,x)]^{\frac{N}{2q}}$，$f_k(x)$ 与(4.8.43)式具有相同的形式；$a_k(0\leqslant k\leqslant 27)$ 满足如下的等式：

$$\prod_{j=1}^{9}(N\lambda+j)\prod_{j=5}^{13}(N\lambda+j)\prod_{j=9}^{17}(N\lambda+j)$$

$$= a_0+\sum_{k=1}^{27}a_k(\lambda+1)\cdots(\lambda+k),$$

于是 $a_0=f(-1)$. 我们可从等式 $f(-(k+1))=a_0+\sum_{j=1}^{k}b_j[(-k+$

$1)+1]\cdots[(-k+1)+j]$ 得到所有的 a_j.

Ⅶ. 2. Bergman 核函数(Ⅱ)

我们首先给出一些记号:对 $m=1,2,\cdots$ 我们定义 $(\alpha)_m=\Gamma(\alpha+m)/\Gamma(\alpha)$,即 $(\alpha)_0=1,(\alpha)_m=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$,如果 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 是多重指标,则 $(\alpha)_m=\prod_{j=1}^n(\alpha_j)_{m_j}$. 定义多变量的超几何函数如下(见[AKF]):

$$F_A^{(n)}(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{m\geqslant 0}\frac{(\alpha)_{|m|}(\beta)_m}{(\gamma)_m m!}x^m, \tag{4.8.47}$$

其中 $x\in\mathbf{C}^n,\alpha,\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n),\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ 是参数,上标 n 表示变量的个数,$|m|=\sum_{j=1}^n m_j$.

引理 7. 当 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|<1$ 时,多变量的超几何函数 $F_A^{(n)}(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 是收敛的.

证:设 $i_1,i_2,\cdots,i_l$ 是属于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的正整数,使得 $\beta_{i_j}>\gamma_{i_j},j=1,2,\cdots,l$.

$$F_A^{(n)}(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|m|=k}\frac{(\alpha)_k(\beta)_m}{(\gamma)_m m!}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}.$$

$$\cdot\sum_{|m|=k}\frac{(\alpha)_k(\beta)_m}{(\gamma)_m m!}|x_1|^{m_1}\cdots|x_n|^{m_n}$$

$$=\sum_{|m|=k}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)}\prod_{j=1}^n\frac{\beta_j\cdots(\beta_j+m_j-1)}{\gamma_j\cdots(\gamma_j+m_j-1)}\frac{k!}{m!}|x_1|^{m_1}\cdots|x_n|^{m_n}$$

$$\leqslant\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)}\prod_{j=1}^l\frac{\beta_{i_j}\cdots(\beta_{i_j}+k-1)}{\gamma_{i_j}\cdots(\gamma_{i_j}+k-1)}\sum_{|m|=k}\frac{k!}{m!}|x_1|^{m_1}\cdots|x_n|^{m_n}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)}\prod_{j=1}^l\frac{\beta_{i_j}\cdots(\beta_{i_j}+k-1)}{\gamma_{i_j}\cdots(\gamma_{i_j}+k-1)}(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^k.$$

显然,当 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|<1$ 时,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)}\prod_{j=1}^l\frac{\beta_{i_j}\cdots(\beta_{i_j}+k-1)}{\gamma_{i_j}\cdots(\gamma_{i_j}+k-1)}(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^k$$

是收敛的. 因此,当 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|<1$ 时,$F_A^{(n)}(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 是收敛的. 如果不存在 j 属于 $\{1,2,\cdots,n\}$,使得 $\beta_j>\gamma_j$,则引理显然成立.

引理 8.

$$F(a,b,c,z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c,z), \tag{4.8.48}$$

$z\in\mathbf{C}$,对任何 a,b,c,满足 $c\neq 0,-1,\cdots$

引理 9.

$$\lim_{z\to 1^{-1}}F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\qquad(4.8.49)$$

假定 $c\neq 0,-1,\cdots$,且 $c>a+b$.

注:引理 8 和引理 9 是关于超几何函数的经典事实.

引理 10. 对任何多重指标 m,

$$\partial_x^m F_A^{(n)}(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{(\alpha)_{|m|}(\beta)_m}{(\gamma)_m}F_A^{(n)}(\alpha+|m|,\beta+m,\gamma+m,x).$$

$$(4.8.50)$$

证:通过简单计算易得.

引理 11. 设 p,q 是整数,$p\geqslant 1,0\leqslant q<p$,假设 f 是一单变量的光滑函数.

(i)则对任何整数 $n\geqslant 0$,存在与 f 无关的常数 $c_{n,k}=c_{n,k}(p),k=0,\cdots,n$,使得

$$\partial_x^n(f(x^p))=\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}f^{(k)}(x^p)x^{kp-n},\qquad(4.8.51)$$

如果 $k<n/p$,常数 $c_{n,k}$是零. $c_{n+1,n+1}=pc_{n,n},c_{0,0}=1$.

(ii)

$$\text{对任何 } m\geqslant 0,\partial_x^m(x^q f(x_p))(0)=\delta_{q_1,q}\frac{m!}{m_1!}f^{(m_1)}(0)$$

$$(4.8.52)$$

其中 m_1,q_1 是惟一的非负整数,$0\leqslant q_1<p$,使得 $m=m_1p+q_1$,$\delta_{q_1,q}$是 Kronecker delta 符号[FH].

定理 6. (膨胀原理)见第四章第 I 节.此处不赘.

定理 7. 假设 $p_1,\cdots,p_n$ 是正整数,则 $HE_{\mathrm{V}}(p_1,\cdots,p_n;16,1)$的 Bergman 核函数为:

$$K_{16}((z,x);(z,x))=M[N_{16}(x,x)]^{(12+\sum_{l=1}^n 1/p_l)}$$

$$\cdot\sum_{k=11}^{16}b_k\sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_n=0}^{p_n-1}|z_1^*|^{2q_1}\cdots|z_n^*|^{2q_n}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^n\frac{q_l+1}{p_l}+k+1\right)}{\prod_{l=1}^n\Gamma\left(\frac{q_l+1}{p_l}\right)}F_A^{(n)}\left(\sum_{l=1}^n\frac{q_l+1}{p_l}+k+1,\right.$$

$$\cdot 1, \frac{\boldsymbol{q}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}; |z_1^*|^{2p_1} \cdots |z_n^*|^{2p_n}\Big).$$

其中 $z_l^* = z_l[N_{16}(x, x)]^{-1/(2p_l)}$ $(l = 1, 2, \cdots, n)$, $\frac{\boldsymbol{q}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{q_1+1}{p_1}, \cdots, \frac{q_n+1}{p_n}\right)$, $(z, x) \in HE_{\text{V}}(p_1, p_2, \cdots, p_n; 16)$.

证:根据(4.8.29),(4.8.37),

$K_{16}((z,0),(z,0))$

$$= M\sum_{k=11}^{16} b_k \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^n(\alpha_l+1)/p_l + k + 1\right)}{\prod_{l=1}^n \Gamma((\alpha_l+1)/p_l)} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n}.$$

对任何 α_l,存在 m_l 与 q_l,使得 $\alpha_l = m_l p_l + q_l$,其中 m_l, q_l 是正整数,$0 \leqslant q_l \leqslant p_l - 1$. 因此,

$K_{16}((z,0),(z,0)) =$

$$M\sum_{k=11}^{16} b_k \sum_{q_1=0}^{p_1-1} \cdots \sum_{q_n=0}^{p_n-1} \sum_{m \geqslant 0} \frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^n \frac{m_l p_l + q_l + 1}{p_l} + k + 1\right)}{\prod_{l=1}^n \Gamma\left(\frac{m_l p_l + q_l + 1}{p_l}\right)} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n}.$$

(4.8.53)

等式(4.8.53)的右边等于

$$M\sum_{k=11}^{16} b_k \sum_{q_1=0}^{p_1-1} \cdots \sum_{q_n=0}^{p_n-1} |z_1|^{2q_1} \cdots |z_n|^{2q_n} \frac{\Gamma\left(\sum_{l=1}^n \frac{q_l+1}{p_l} + k + 1\right)}{\prod_{l=1}^n \Gamma\left(\frac{q_l+1}{p_l}\right)}$$

$$F_4^{(n)}\left(\sum_{l=1}^n \frac{q_l+1}{p_l} + k + 1, \mathbf{1}, \frac{\boldsymbol{q}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}; |z_1|^{2p_1}, \cdots, |z_n|^{2p_n}\right),$$

利用(4.8.28),易得结论.

定理 8. 如果 $p_1, \cdots, p_l$ 是正整数,则 $HE_{\text{V}}(m_1, m_2, \cdots, m_l; p_1, p_2, \cdots, p_l; 16) = \{z_{(1)} \in \mathbf{C}^{m_1}, \cdots, z_{(l)} \in \mathbf{C}^{m_l}, x \in D_{16} \mid |z_{(1)}|^{2p_1} + \cdots + |z_{(l)}|^{2p_l} < N_{16}(x, x)\}$ 的 Bergman 核函数为:

$$K_{16}^l((z,x);(z,x)) = \frac{M}{\pi^{\sum_{i=1}^l m_i - l}}[N_{16}(x,x)]^{-(12+\sum_{i=1}^l m_i/p_i)}$$

$$\times \sum_{k=11}^{16} b_k h_k(|z_{(1)}|^2[N_{16}(x,x)]^{-1/p_1}, \cdots, |z_{(l)}|^2[N_{16}(x,x)]^{-1/p_l}),$$

(4.8.54)

其中 $h_k(y_1,y_2,\cdots,y_l) = \partial y_1^{m_1-1}\cdots\partial y_l^{m_l-1}\sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_l=0}^{p_l-1}y_1^{q_1}\cdots y_l^{q_l}$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{q_i+1}{p_i}+k+1\right)}{\prod_{i=1}^{l}\Gamma\left(\frac{q_i+1}{p_i}\right)}F_A^{(l)}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{q_i+1}{p_i}+k+1,\mathbf{1},\frac{\boldsymbol{q}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}};y_1^{p_1},\cdots,y_l^{p_l}\right).$$

证:利用定理 6,易得结论.

定理 9. 假设 $x\in D_{16}$.

$$r(z,x) = 1-\left[\left(\frac{|z_{(1)}|^2}{N_{16}(x,x)^{1/p_1}}\right)^{p_1}+\cdots+\left(\frac{|z_{(l)}|^2}{N_{16}(x,x)^{1/p_l}}\right)^{p_l}\right].$$

设 $z^0=(z_{(1)}^0,0,\cdots,0)$, $|z_{(1)}^0|^{2p_1}=N_{16}(x,x)$. 即 $(z^0,x)\in\partial HE_{\mathrm{V}}(m_1,\cdots,m_l;p_1,\cdots,p_l;16)$,则,

$$\lim_{((z_{(1)},0,\cdots,0),x)\to(z^0,x)} r(z,x)^{1+m_1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16}K_{16}^l((z,x);(z,x))$$

$$=\frac{M}{\pi^{\sum_{i=1}^{l}m_i-l}}[N_{16}(x,x)]^{-(12+\sum_{i=1}^{l}m_i/p_i)}p_1^{m_1-1}$$

$$\cdot\frac{\prod_{j=2}^{l}\Gamma(m_j)\Gamma\left(m_1+1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16\right)}{\prod_{j=2}^{l}\Gamma(m_j/p_j)}.$$

证:如果 $z=(z_{(1)},0,\cdots,0)$,(4.8.54)式等于

$$K_{16}^l((z,x);(z,x)) = \frac{M}{\pi^{\sum_{i=1}^{l}m_i-l}}[N_{16}(x,x)]^{-(12+\sum_{i=1}^{l}m_i/p_i)}$$

$$\cdot\sum_{k=11}^{16}b_kh_k(|z_{(1)}|^2[N_{16}(x,x)]^{-1/p_1},0,\cdots,0)$$

$$h_r(y_1,0,\cdots,0)=\partial y_1^{m_1-1}\cdots\partial y_l^{m_l-1}\sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_l=0}^{p_l-1}y_1^{q_1}\cdots y_l^{q_l}\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{q_i+1}{p_i}+r+1\right)}{\prod_{i=1}^{l}\Gamma\left(\frac{q_i+1}{p_i}\right)}$$

$$\times F_A^{(l)}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{q_i+1}{p_i}+r+1,\mathbf{1},\frac{\boldsymbol{q}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}};y_1^{p_1}\cdots y_l^{p_l}\right)\Big|_{(y_1,0,\cdots,0)},$$

我们首先计算

$$\partial y_2^{m_2-1}\cdots\partial y_l^{m_l-1}\prod_{j=2}^{l}y_j^{q_j}F_A^{(l)}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{q_i+1}{p_i}+r+1,\right.$$

$$\left.\mathbf{1},\frac{\boldsymbol{q}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}};y_1^{p_1},\cdots,y_l^{p_l}\right)\Big|_{(y_1,0,\cdots,0)} \tag{4.8.55}$$

设 $m_j-1=n_jp_j+q_j'(j=2,\cdots,l)$. 根据(4.8.51),(4.8.53),我们得到(4.8.55)式等于

$$\prod_{j=2}^{l}\delta_{q_j',q_j}(m_j-1)!\frac{\left(1+\sum_{j=1}^{l}\frac{q_j+1}{p_j}+r\right)_{n_2+\cdots+n_l}}{\prod_{j=2}^{l}\left(\frac{q_j+1}{p_j}\right)_{n_j}}$$

$$\cdot F_A\left(1+\frac{q_1+1}{p_1}+r+\sum_{j=2}^{l}\frac{m_j}{p_j},1,\frac{q_1+1}{p_1},y_1^{p_1}\right). \qquad (4.8.56)$$

下面,我们计算

$$\partial y_1^{m_1-1}\left(y_1^{q_1}F_A\left(1+\frac{q_1+1}{p_1}+r+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j,1,\frac{q_1+1}{p_1},y_1^{p_1}\right)\right)$$

$$(4.8.57)$$

根据(4.8.51)式,我们重写(4.8.57)式如下:

$$\sum_{n=0}^{m_1-1}\binom{m_1-1}{n}\partial y_1^{m_1-1-n}(y_1^q)\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}y_1^{kp_1-n}$$

$$\cdot\frac{\left(r+1+\frac{q_1+1}{p_1}+\sum_{j=2}^{l}\frac{m_j}{p_j}\right)_k(1)_k}{((q_1+1)/p_1)_k}$$

$$\times F\left(1+\frac{q_1+1}{p_1}+\sum_{j=2}^{l}\frac{m_j}{p_j}+k+r,1+k,\frac{q_1+1}{p_1}+k,y_1^{p_1}\right).$$

$$(4.8.58)$$

$$F\left(1+\frac{q_1+1}{p_1}+\sum_{j=2}^{l}\frac{m_j}{p_j}+k+r,1+k,\frac{q_1+1}{p_1}+k,y_1^{p_1}\right)$$

$$=(1-y_1^{p_1})^{-2-\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j-k-r}F\left(-1-\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j-r,\right.$$

$$\left.\frac{q_1+1}{p_1}-1,\frac{q_1+1}{p_1}+k,y_1^{p_1}\right).$$

$$\lim_{y_1\to1}(1-y_1^{p_1})^{1+m_1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16}\left[\partial y^qF_A\left(1+\sum_{j=1}^{l}\frac{q_1+1}{p_j}\right.\right.$$

$$\left.\left.+r,1,\frac{q+1}{p},y^p\right)\right]\Big|(y_1,0,\cdots,0)$$

$$=\lim_{y_1\to1}(1-y_1^{p_1})^{1+m_1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16}\prod_{j=2}^{l}\delta_{q_j',q_j}d_{1,r}$$

$$\times\partial y_1^{m_1-1}y_1^{q_1}F\left(1+\frac{q_1+1}{p_1}+r+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j,1,\frac{q_1+1}{p_1},y_1^{p_1}\right),$$

$$(4.8.59)$$

其中

$$d_{1,r}=\frac{\Gamma\left(1+\frac{q_1+1}{p_1}+r+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{j=1}^{l}\frac{q_j+1}{p_j}+r\right)}\cdot\frac{\prod_{j=2}^{l}\Gamma\left(\frac{q_j+1}{p_j}\Gamma(m_j)\right)}{\prod_{j=2}^{l}\Gamma(m_j/p_j)},$$

(4.8.59)式等于

$$\prod_{j=2}^{l}\delta_{q_j',q_j}\sum_{n=0}^{m_1-1}\binom{m_1-1}{n}\partial y_1^{m_1-1-n}(y_1^q)\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}$$

$$\cdot\frac{\left(r+1+\frac{q_1+1}{p_1}+\sum_{j=2}^{l}\frac{m_j}{p_j}\right)_k(1)_k}{((q_1+1)/p_1)_k}$$

$$\times\lim_{y_1\to1}y_1^{kp_1-n}(1-y_1^{p_1})^{1+m_1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16}(1-y_1^{p_1})^{-2-\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j-k-r}$$

$$\cdot F\left(-1-\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j-r,\frac{q_1+1}{p_1}-1,\frac{q_1+1}{p_1}+k,y_1^{p_1}\right).$$

(4.8.60)

如果 $r\neq16$，则$\lim_{y_1\to1}(1-y_1^{p_1})^{1+m_1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16}h_r(y_1,0,\cdots,0)=0$. 如果$r=16$，则(4.8.60)式等于

$$\prod_{j=2}^{l}\delta_{q_j',q_j}d_{1,r}c_{m_1-1,m_1-1}\frac{\left(r+1+\frac{q_1+1}{p_1}+\sum_{j=2}^{l}\frac{m_j}{p_j}\right)_{m_1-1}(1)_{m_1-1}}{((q_1+1)/p_1)_{m_1-1}}$$

$$\times\lim_{y_1\to1}F\left(-1-\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j-16,\frac{q_1+1}{p_1}-1,\frac{q_1+1}{p_1}+m_1-1,y_1^{p_1}\right)$$

$$=\prod_{j=2}^{l}\delta_{q_j',q_j}c_{m_1-1,m_1-1}\frac{\prod_{j=2}^{l}\Gamma(q_j+1)/p_j\Gamma(m_j)}{\Gamma\left(1+\sum_{j=1}^{l}\frac{q_j+1}{p_j}+16\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{q_1+1}{p_1}\right)\Gamma\left(m_1+1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16\right)}{\prod_{j=2}^{l}\Gamma(m_j/p_j)}.\qquad(4.8.61)$$

因此，

$$\lim_{y_1\to1}(1-y_1^{p_1})^{1+m_1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16}\sum_{r=11}^{16}b_rh_r(y_1,0,\cdots,0)$$

$$=\lim_{y_1\to1}(1-y_1^{p_1})^{1+m_1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16}b_{16}h_{16}(y_1,0,\cdots,0)$$

$$=b_{16}\sum_{q_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{q_l=0}^{p_l-1}\prod_{j=2}^{l}\delta_{q_j',q_j}p_1^{m_1-1}$$

$$\cdot \frac{\prod_{j=2}^{l}\Gamma(m_j)\Gamma\left(m_1+1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16\right)}{\prod_{j=2}^{l}\Gamma\left(\frac{m_j+1}{p_j}\right)}$$

$$= p_1^{m_1+1}\frac{\prod_{j=2}^{l}\Gamma(m_j)\Gamma\left(m_1+1+\sum_{j=2}^{l}m_j/p_j+16\right)}{\prod_{j=2}^{l}\Gamma\left(\frac{m_j+1}{p_j}\right)}.$$

本节内容取自文献[YZg3,YZg4,YZg5].

Ⅸ. 超 Cartan 域的 Bergman 度量的完备性

在 1921 年, S. Bergman 对 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域 D 引进了现在称之为 Bergman 核函数 $K_D(z,w)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(z)\overline{\varphi_m(w)}$, $z,w\in D$, 这里 $\{\varphi_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$是 D 上的所有全纯平方可积函数所形成的 Hilbert 空间的一组完备标准正交函数系. 这样, 我们便可以构造域 D 的 Bergman 度量. 令

$$T_D(z,z)=\left(\frac{\partial^2\ln K(z,z)}{\partial z_j\partial\overline{z_k}}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n},\tag{4.9.1}$$

则

$$\mathrm{d}s=[\mathrm{d}zT_D(z,z)\overline{\mathrm{d}z}']^{1/2}$$

便称为 Bergman 度量. 众所周知, $T(z,z)$是正定的. 令 $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\cdots,\alpha_n(t))$: $[0,1]\rightarrow D$ 是分段的 c^1 曲线, 设 $\dot{\alpha}(t)=\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_1(t)}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}\alpha_n(t)}{\mathrm{d}t}\right)$, 则 $\alpha(t)$的 Bergman 长度定义为

$$|\alpha|_B=\int_0^1[\dot{\alpha}(t)T_D(\alpha(t),\alpha(t))\overline{\dot{\alpha}(t)}']^{1/2}\mathrm{d}t.\tag{4.9.2}$$

若 $z^1,z^2\in D$, 则其 Bergman(测地)距离定义为

$$b_D(z^1,z^2)=\inf\{|\alpha|_B|\alpha(t):[0,1]\rightarrow D\tag{4.9.3}$$

为分段的 c^1 曲线, $\alpha(0)=z^1,\alpha(1)=z^2\}$.

若$\lim_{z\to\partial D}K_D(z,z)=\infty$, 则 D 称为是 Bergman 穷竭的. 所谓 Bergman 完备是指域 D 在其 Bergman 度量(或 Bergman 距离)下是完备的, 即: 存在一个固定的点 $p_0\in D$ 使得$\lim_{p\to\partial D}b_D(p_0,p)=\infty$. 众所周知, D 不永远对其Bergman 度量而言是完备的. 1955 年, Bremermann 证明若域 D 对其 Bergman 度量而言是完备的, 则 D 是拟凸域[Br]. 反之不然. 因此在 1959 年 Kobayashi 提出了一个著名问题[Ko]: 什么样的有界拟凸域

对其 Bergman 度量而言是完备的? 有很多定理在一定的条件下回答了这个问题,这方面的详细文献可见陈伯勇和张锦豪的综合性文章[ChZ].

通常去判断 D 是否对其 Bergman 度量完备是困难的. 因此在[Swk]中,Schwarczynski 引进了度量 ρ_D,它被定义为

$$\rho_D(z,w)=\left[1-\left(\frac{K_D(z,w)K_D(w,z)}{K_D(z,z)K_D(w,w)}\right)^{1/2}\right]^{1/2}. \quad (4.9.4)$$

在[Swk]中证明了若 D 对 ρ_D 是完备的,则 D 对 b_D 也是完备的. 在本文中,我们得到回答 Kobayashi 的问题的几个定理. 作为这些定理的应用,我们证明了超 Cartan 域(Cartan-Hartogs 域)对其 Bergman 度量是完备的.

Ⅸ. 1. 准 备 知 识

首先我们引进几个记号. 若 $z\in\mathbf{C}^n$,则记 $|z|=(|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2)^{1/2}$. 若 $f(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z))$是全纯映照,我们记

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_1}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_n} & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}\end{pmatrix}. \quad (4.9.5)$$

引理 1.(Schwarz-Lu 引理) 令 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域. 设 $f(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z)):D\to\mathbf{C}^n$ 为全纯映照,令 $|f(z)|^2=|f_1(z)|^2+|f_2(z)|^2+\cdots|f_n(z)|^2\leqslant M^2$,这里 M 为一正数,则由[Lu4]可知

$$\frac{\partial f}{\partial z}\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}^T\leqslant M^2T_D(z,z). \quad (4.9.6)$$

定理 1.(陆启铿定理) 若 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界齐性域,则存在一个仅依赖于 D 的正数 k 使得对任何 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域 G,任何全纯映照 $w=f(z):G\to D$,我们总有

$$\frac{\partial w}{\partial z}T_D(w,w)\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}^T\leqslant k^2T_G(z,z). \quad (4.9.7)$$

见[Lu4].

引理 2. 若 $b\in\mathbf{C}^n$ 满足 $1+|bb'|^2-2b\bar{b}'\geqslant0,1-|bb'|\geqslant0.$

若 $a \in R_{\mathrm{IV}}(n)=\{z \in \mathbf{C}^n \mid 1+|zz'|^2-2zz'>0, 1-|zz'|>0\}$,则有 $1+bb'\overline{aa'}-2b\overline{a}'\neq 0$. 见[Lu4].

引理 3. 令 $z, a \in R_{\mathrm{IV}}(n)$,则 $|1+zz'\overline{aa'}-2z\overline{a}'|^2 \geqslant (1+|zz'|^2-2zz')(1+|aa'|^2-2a\overline{a}')$.

证: 将 $R_{\mathrm{IV}}(n)$ 的 Bergman 核函数记为 $K_{\mathrm{IV}}(z,a)$, $z, a \in R_{\mathrm{IV}}(n)$. 熟知

$$K_{\mathrm{IV}}(z,a)=\frac{1}{V(R_{\mathrm{IV}})}\cdot\frac{1}{(1+zz'\overline{aa'}-2z\overline{a}')^n},$$

这里 $V(R_{\mathrm{IV}})$ 为 $R_{\mathrm{IV}}(n)$ 的体积. 由 Cauchy 不等式,我们有 $|K_{\mathrm{IV}}(z,a)|^2 \leqslant K_{\mathrm{IV}}(z,z)K_{\mathrm{IV}}(a,a)$. 这样便容易得到引理 3.

定理 2. 令 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域, $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D$, $p \in D$. 则我们有

(1) 若 $\lim_{m\to\infty}|p_m-p|=0$,则 $\lim_{m\to\infty}\rho_D(p_m,p)=0$. (4.9.8)

(2) 若 $\lim_{m\to\infty}\rho_D(p_m,p)=0$,则 $\lim_{m\to\infty}|p_m-p|=0$. (4.9.9)

见[Swk]中的第 23 页.

定理 3. 令 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域, $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D$, $p \in D$,则我们有

(1) 若 $\lim_{m\to\infty}|p_m-p|=0$,则 $\lim_{m\to\infty}b_D(p_m,p)=0$. (4.9.10)

(2) 若 $\lim_{m\to\infty}b_D(p_m,p)=0$,则 $\lim_{m\to\infty}|p_m-p|=0$. (4.9.11)

这是一个 Riemann 几何的一个经典结果.

定理 4. 存在正数 c,使得 $\rho_D(p,q)\leqslant cb_D(p,q)$ 对每一个 $p, q \in D$ 成立.

见[MaP].

注: 由定理 2,定理 3 知道 ρ_D 的完备性蕴含了 b_D 的完备性.

定理 5. 设对有界域 D 的每一个边界点 p,满足

(i) $\lim_{z\to p}K_D(z,z)=\infty$;

(ii) 在 p 的邻域有界的函数的集合在 $L^2H(D)$ 中是线性稠的.

则 D 是完备的.

见[Swk].

Ⅸ. 2. 结果与应用

定理 6. 令 $B_n=\{z \in \mathbf{C}^n \mid |z|<1\}$,则

$$b_{B_n}(z,w)$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}}{2}\ln\frac{|1-w\bar{z}'|+\sqrt{|w-z|^2+|w\bar{z}'|^2-|z|^2|w|^2}}{|1-w\bar{z}'|-\sqrt{|w-z|^2+|w\bar{z}'|^2-|z|^2|w|^2}}. \tag{4.9.12}$$

这是多复变的一个经典的结果.

定理 7. 令 $D\subset\mathbf{C}^n$ 为一有界齐性域,$G\subset\mathbf{C}^n$ 是一个有界域. 设 $f:G\to D$ 为全纯映照满足下列条件:

(i) f 在 $G\cup\partial G$ 上连续;

(ii) $f(\partial G)\subset\partial D$,

则 G 对 b_G 而言是完备的.

证:定理 2 知,存在正数 k,使得对任何 $z\in G$ 有

$$\frac{\partial f}{\partial z}T_D(f(z),f(z))\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}'\leqslant k^2T_G(z,z).$$

设 $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\cdots,\alpha_n(t)):[0,1]\to G$ 为逐段光滑的 c^1 曲线,使得 $\alpha(0)=z^1,\alpha(1)=z^2$,则我们有 $|f\circ\alpha|_B\leqslant k|\alpha|_B$. 由 Bergman 距离的定义,我们有

$$b_D(f(z^1),f(z^2))\leqslant kb_G(z^1,z^2). \tag{4.9.13}$$

设 $\{p_m\}\subset(G,b_G)$ 为 Cauchy 序列,此即对任何 $\epsilon>0$,存在自然数 N,使得当 $l,m>N$ 时,我们总有 $b_G(p_m,p_l)<\epsilon$. 存在 $\{p_m\}$ 的子序列 $\{pk_m\}$ 和 $p\in G\cup\partial G$,使得 $\lim_{m\to\infty}|pk_m-p|=0$. 现在,设 $p\in\partial G$. 由(4.9.13)式,$\{f(p_m)\}$ 是 (D,b_D) 的 Gauchy 序列,注意到 (D,b_D) 是完备的,因此存在 $A\in D$,使得 $\lim_{m\to\infty}b_D(f(p_m),A)=0$. 由定理 5,我们有 $\lim_{m\to\infty}|f(p_m)$ $A|=0$. 由条件(i)和(ii)可知 $A=f(p)\in\partial D$,矛盾. 因而 $p\in G$. 由三角不等式 $b_G(p_m,p)\leqslant b_G(p_m,p_{k_m})+b_G(p_{k_m},p)$ 和定理 5 我们有 $\lim_{m\to\infty}b_G(p_m,p)=0$. 因此,$G$ 对 b_G 而言是完备的.

例 1. 令 $G=\{z\in\mathbf{C}^n\mid|z_1|^{2p_1}+|z_2|^{2p_2}+\cdots+|z_n|^{2p_n}<1\}$,这里 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 都是正整数. 设 $f(z)=(z_1^{p_1},z_2^{p_2},\cdots,z_n^{p_n})$,而 f 在 $G\cup\partial G$ 连续. 由定理 7 可知,G 对 b_G 而言是完备的.

定理 8. 令 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域,若其 Bergman 核函数 $K_D(z,\xi)$下列条件:

(i) $K_D(z,\xi)$在 $D\times(D\cup\partial D)$连续;

(ii)对任何 $p\in\partial D$,有 $\lim_{z\to p}K_D(z,z)=+\infty$.

则 D 对 ρ_D 而言是完备的.

证:这是文[JaP]中定理 7.6.4.的一个特殊情况.

注:根据定理 4,若 D 满足定理 8 的条件,则 D 对 Bergman 距离而言是完备的.

例 2. 令 $D=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2+|z_n|^{2p}<1\}$,这里 p 为正数.在文[DA]中,在 D'Angelo 给出了 D 的 Bergman 核函数的一个显表达式.他得到

$$K_D(z,w)=\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{\left(1-\sum_{j=1}^{n-1}z_j\overline{w_j}\right)^{n+(k/p)}}{\left[\left(1-\sum_{j=1}^{n-1}z_j\overline{w_j}\right)^{1/p}-z_n\overline{w_n}\right]^{k+1}}. \tag{4.9.14}$$

经简单计算,我们有 $c_n>0, c_k\geqslant 0(1\leqslant k\leqslant n-1)$.若 $z\in D, w\in D\cup\partial D$,则我们有 $|w_n|^{2p}\leqslant 1-\left(\sum_{j=1}^{n-1}|w_j|^2\right)$, $|z_n|^{2p}<1-\left(\sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^2\right)$.显然,对任何 $z\in D, w\in D\cup\partial D$,我们有 $\left|1-\sum_{j=1}^{n-1}z_j\overline{w_j}\right|\neq 0$.因此,若 $w_n=0$ 或 $z_n=0$,我们总有

$$|z_n\overline{w_n}|<\left|1-\sum_{j=1}^{n-1}z_j\overline{w_j}\right|^{1/p}.$$

下面,我们设 $|z_n|\neq 0, |w_n|\neq 0$.由于

$$\begin{aligned}|z_n\overline{w_n}|^{2p}&=|w_n|^{2p}|z_n|^{2p}<\left(1-\sum_{j=1}^{n-1}|w_j|^2\right)\\&\quad\cdot\left(1-\sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^2\right)\leqslant\left|1-\sum_{j=1}^{n-1}z_j\overline{w_j}\right|^2,\end{aligned}$$

因此有 $|z_n\overline{w_n}|<\left|1-\sum_{j=1}^{n-1}z_j\overline{w_j}\right|^{1/p}$.这蕴含了 $K_D(z,w)$ 在 $D\times(D\cup\partial D)$ 连续.易见 $\lim_{z\to\partial D}K_D(z,z)=+\infty$.因此 D 对 b_D 而言是完备的.

例 3. 令 $Y_{\mathrm{IV}}=\{w\in\mathbf{C}, z\in R_{\mathrm{IV}}(n) \mid |w|^{2k}<1+|zz'|^2-2z\bar{z}'\}$,在[GY]中已计算出 Y_{IV} 的 Bergman 核函数为:

$$K((w,z);(\xi,a))=\frac{1}{k^n\pi^{n+1}}[1+ZZ'\overline{aa'}-2Z\bar{a}']^{-n+(1/K)}\times F(y), \tag{4.9.15}$$

这里 $y=1/[1-w\bar{\xi}(1+zz'\overline{aa'}-2z\bar{a}')^{-1/k}]$, $F(y)=\sum_{i=0}^{n+2}a_iy^i$ 当 $a_{n+2}>0$.显然有 $\lim_{(w,z)\to\partial D}K_D((w,z);(w,z))=+\infty$.余下的只需证明 $K((w,z);(\xi,a))$ 在 $Y_{\mathrm{IV}}\times(Y_{\mathrm{IV}}\cup\partial Y_{\mathrm{IV}})$ 连续,这里 $(w,z)\in Y_{\mathrm{IV}}$, $(\xi,a)\in(Y_{\mathrm{IV}}\cup\partial Y_{\mathrm{IV}})$.由引理 3,对 $z\in R_{\mathrm{IV}}(n), a\in R_{\mathrm{IV}}(n)\cup\partial R_{\mathrm{IV}}(n)$,我们有 $1+zz'\overline{aa'}-2z\bar{a}'\neq 0$.因此只需说明 $1>|w\bar{\xi}|\;|(1+zz'\overline{aa'}-2z$

$\bar{a}')|^{1/k}$. 我们分两种情况说明 $|w\xi|^k<|1+zz'\overline{aa'}-2z\bar{a}'|$.

情况 1: $a\in\partial R_{IV}(n)$.

从 $1+|aa'|^2-2a\bar{a}'=0$ 和 $|\xi|^{2k}\leqslant 1+|aa'|^2-2a\bar{a}'$ 可以直接得到 $\xi=0$. 因而, $|w\xi|^k<|1+zz'\overline{aa'}-2z\bar{a}'|$.

情况 2: $a\in R_{IV}(n)$.

从 $|\xi|^{2k}\leqslant 1+|aa'|^2-2a\bar{a}'$ 和 $|w|^{2k}<1+|zz'|^2-2z\bar{z}'$ 可以直接得到 $|w\bar{\xi}|^{2k}<(1+|aa'|^2-2a\bar{a}')(1+|zz'|^2-2z\bar{z}')$. 由引理 3 我们得到 $|w\bar{\xi}|^{2k}<|1+zz'\overline{aa'}-2z\bar{a}'|^2$. 因此 $|w\xi|^k<|1+zz'\overline{aa'}-2z\bar{a}'|$. 最后我们得到 Y_{IV} 对其 Bergman 距离而言是完备的.

定理 9. 设 $D\subset\mathbf{C}^n$ 是一个完备的圆型域, 若 $\lambda(D\cup\partial D)\subset D(0\leqslant|\lambda|<1)$ 且对任何 $p\in\partial D$, 有 $\lim_{z\to p}K_D(z,z)=+\infty$, 则 D 对 ρ_D 而言是完备的. 所谓 D 是完备圆型域是指 D 为有界域, 且对任何满足 $|\lambda|\leqslant 1$ 的 λ 和任何 $z\in D$, 总有 $\lambda z\in D$.

证: 由定理 5, 只要证明条件(ii)是被满足的. 对任何 $f\in L^2H(D)$, 令 $f_m(z)=f[(1-1/m)z]$, 显然 $f_m(z)$ 在 $D\cup\partial D$ 连续, 因而在 $D\cup\partial D$ 有界. 设 $\mathscr{A}$ 是 D 的一个紧致集合, 则 $\mathscr{A}^*=\{\lambda z\,|\,0\leqslant|\lambda|\leqslant 1, z\in\mathscr{A}\}$ 也是 D 的一个紧致集合, 因而 f 在 $\mathscr{A}^*$ 有界. 我们设对任何 $z\in\mathscr{A}^*$, 有 $|f(Z)|\leqslant M$, 因此 $|f_m(z)|\leqslant M$ 对任何 $z\in\mathscr{A}$ 成立. 由 Montel 正规定则, $\{f_m\}$ 是 D 内的正规族. 为方便起见, 我们假定 $f_m(z)$ 局部一致收敛于 $f(z)$. 令

$$\kappa_j=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|z|\leqslant j\}\cap\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,d(z,\mathbf{C}^n\setminus D)\geqslant 1/j\},$$

则对任何 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 使得当 $j\geqslant N$ 时, 我们总有

$$\int_{D-\kappa_j}|f(z)|^2\mathrm{d}v(z)<\varepsilon/4 \tag{4.9.16}$$

对任何 $z\in\kappa_N$, $|z/(1-1/m)|\leqslant N/(1-1/m)$ 成立. 因此当 m 充分大时我们有 $|z/(1-1/m)|\leqslant N+1$ 和 $d(z/(1-1/m),\mathbf{C}^n\setminus D)\geqslant d(z,\mathbf{C}^n\setminus D)-|z-z/(1-1/m)|\geqslant 1/N-(1-1/(1-1/m))N$. 因此当 m 充分大时我们有 $d(z/(1-1/m),C^n\setminus D)\geqslant 1/(N+1)$. 因此 $\kappa_N\subset(1-1/m)\kappa_{N+1}$ 当 m 充分大时成立.

$$\begin{aligned}&\int_{D-\kappa_{N+1}}|f(z)-fm(z)|^2\mathrm{d}v(z)\\ \leqslant\ &2\int_{D-\kappa_{N+1}}|f(z)|^2\mathrm{d}v(z)+2\int_{D-K_{N+1}}|f_m(z)|^2\mathrm{d}v(z)\\ \leqslant\ &\varepsilon/2+2\int_{D-\kappa_{N+1}}|f_m(z)|^2\mathrm{d}v(z).\end{aligned}$$

对任何 $z\in D-\kappa_{N+1}$，可知$(1-1/m)z\in D$，$(1-1/m)z$ 不在$(1-1/m)\cdot\kappa_{N+1}$中，因此有$(1-1/m)z\in D-\kappa_N$. 这样就有

$$2\int_{D-k_{N+1}}|f_m(z)|^2\mathrm{d}v(z)\leqslant 2\int_{D-\kappa_N}|f(z)|^2\mathrm{d}v(z)\leqslant\varepsilon/2.$$

由 $\int_D|f(z)-f_m(z)|^2\mathrm{d}v(z)\leqslant\int_{\kappa_{N+1}}|f(z)-f_m(z)|^2\mathrm{d}v(z)+\varepsilon$ 直接可得$\lim_{m\to\infty}\int_D|f(z)-f_m(z)|^2\mathrm{d}v(z)=0$. 这就完成了证明.

例 4. 令

$Y_{\mathrm{I}}=\{w\in\mathbf{C},Z\in R_{\mathrm{I}}(m,n)\mid |w|^{2k}<\det(I-Z\bar{Z}'),k>0\}$,

$Y_{\mathrm{II}}=\{w\in\mathbf{C},Z\in R_{\mathrm{II}}(p)\mid |w|^{2k}<\det(I-Z\bar{Z}),k>0\}$,

$Y_{\mathrm{III}}=\{w\in\mathbf{C},Z\in R_{\mathrm{III}}(q)\mid |w|^{2k}<\det(I+Z\bar{Z}),k>0\}$.

我们能应用定理 9 证明 $Y_L(L=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$对其 Bergman 度量而言都是完备的. 在[YW2, YW5, YW6, YW7]中，殷慰萍得到了 $Y_L(L=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$的 Bergman 核函数的显表达式. 在这里我们仅对 Y_{I} 进行证明，但方法对 Y_{II} 和 Y_{III} 都适用. 这里的 Y_{I}，Y_{II}，Y_{III} 和例 3 中的 Y_{IV} 都称为超 Cartan 域或 Cartan-Hartogs 域.

设$(w,Z)\in Y_{\mathrm{I}}$. 则存在 $m\times m$ 酉方阵 U 和 $n\times n$ 酉方阵 V 以及 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant m)$，使得

$$Z=U\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&\lambda_m&0&\cdots&0\end{pmatrix}V(1>\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\geqslant 0),\tag{4.9.17}$$

显然，$|w|^{2k}<\det(I-Z\bar{Z}')=\prod_{j=1}^n(1-\lambda_j^2)$. 对满足 $0\leqslant|\lambda|\leqslant 1$ 的任何 λ，我们有 $|\lambda w|^{2k}=|\lambda|^{2k}|w|^{2k}\leqslant|w|^{2k}<\prod_{j=1}^n(1-\lambda_j^2)\leqslant\prod_{j=1}^n(1-|\lambda|^2\lambda_j^2)=\det[I-(\lambda Z)\overline{\lambda Z}']$. 因而 Y_{I} 是一个完备的圆型域. 为了证明 $\lambda(Y_{\mathrm{I}}\cup\partial Y_{\mathrm{I}})\subset Y_{\mathrm{I}}(0\leqslant|\lambda|<1)$，只要证明 $\lambda\partial Y_{\mathrm{I}}\subset Y_{\mathrm{I}}$. 现设$(w,Z)\in\partial Y_{\mathrm{I}}$. 若 $z\in\partial R_{\mathrm{I}}(m,n)$，则 $w=0$. 显然，对任何满足 $0\leqslant|\lambda|<1$ 的 λ，总有 $\lambda(w,Z)\in Y_{\mathrm{I}}$. 若 $Z\in R_{\mathrm{I}}(m,n)$，则 $w\neq 0$，我们有 $|\lambda w|^{2k}=|\lambda|^{2k}|w|^{2k}<|w|^{2k}\leqslant\prod_{j=1}^n(1-\lambda_j^2)\leqslant\prod_{j=1}^n(1-|\lambda|^2\lambda_j^2)=\det[I-(\lambda Z)\overline{\lambda Z}']$. 因此 $\lambda(w,z)\in Y_{\mathrm{I}}$.

$$K_{Y_{\mathrm{I}}}((w,Z);(w,Z)) = \frac{1}{k^{mn}\pi^{mn-1}}[\det(I - Z\bar{Z}')]^{(m+n+1/k)} \times F(y), \tag{4.9.18}$$

这里 $Y = (1 - |w|^2[\det(I - Z\bar{Z}')]^{-1/k})^{-1}, F(y) = \sum_{j=0}^{mn+1} a_j y^{j+1}$ 且 $a_{mn+1} > 0$. 从(4.9.10) 便直接可得$\lim_{(w,z)\to\partial Y_{\mathrm{I}}} K_{Y_{\mathrm{I}}}((w,Z);(w,Z)) = +\infty$. 因此 Y_{I} 对其 Bergman 度量而言是完备的.

本节内容取自文献[YZg6,YZg7].

X. 超 Cartan 域上的度量比较定理

这一节的主要内容是给出第三类超 Cartan 域 Y_{III}上 Bergman 度量和 Kobayashi 度量的比较定理. 该定理属于多复分析中关于"不变度量与不变距离"的范畴. 20 世纪六七十年代当 Kobayashi 度量刚被引进时, 这领域的研究相当热门. 根据 Riemann 映照定理, 在复平面 C 上的任何一个单连通区域 D 只要不是 C 本身, 它一定全纯等价于单位圆盘 E. 因而研究了域 E 的任何一个双全纯不变量, 就等于在任何一个单连通区域 D 上研究了这个不变量. 从这个观点出发, 虽然在高维时不存在 Riemann 映照定理(当 $n>1$ 时, $\mathbf{C}^n$ 中的互不全纯等价的单连通域有无穷多个), 但各种双全纯不变量的研究与使用, 在一定程度上起到 Riemann 定理的作用. 三个经典的不变度量: Bergman 度量, Carathéodory 度量和 Kobayashi 度量都是重要的双全纯不变量. 因而对它们的研究引起不少数学家的重视. 而且这种研究对域的边界的几何, 对双全纯映照的连续延拓到边界等等重要问题都有重要的应用. 最近, M. Jarnicki 和 P. Pflug 合著的≪Invariant Distances and Metrics in Complex analysis≫的出版[JaP]以及 A. V. Isaev 和 S. G. Krantz 合写的≪Invariant Metrics and Distances in Complex Analysis≫在美国数学会的≪NOTICES≫2000 年 5 月号上发表[IsK], 表明关于不变度量和不变距离的研究又已经在国际上热门起来.

在不变度量的研究中, 上述三个经典度量的等价问题是重要的研究课题. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域, 令 $B_\Omega, C_\Omega, K_\Omega$ 分别表示其 Bergman 度量, Carathéodory 度量和 Kobayashi 度量. 由于 Bergman 度量和 Kobayashi 度量总是不小于 Carathéodory 度量. 因而这三个度量之间的等价问题就化为研究如下的问题: 是否存在仅依赖于 Ω 的正常数 $a(\Omega), b(\Omega), c(\Omega)$ 使得对所有 $(z,\xi) \in \Omega\times\mathbf{C}^n$ 有:

$$B_\Omega(z,\xi)/C_\Omega(z,\xi) \leqslant a(\Omega), b(\Omega) \leqslant B_\Omega(z,\xi)/K_\Omega(z,\xi) \leqslant c(\Omega).$$

若 Ω 在 Bergman 度量下的全纯截曲率有一个负上界,则由[Hei]可知,上式最后一个不等式(即 $B_{\Omega}\leqslant c(\Omega)K_{\Omega}$)成立.若上式最后一个不等式成立,我们就称在域 Ω 上成立 Bergman 度量和 Kobayashi 度量的比较定理.但是,一般而言,对 B_{Ω} 和 K_{Ω} 并无确定的关系.文[DiF]指出,存在边界光滑的拟凸域 Ω,使得 B_{Ω}/K_{Ω} 是无界的.因而对那些域其 Bergman 度量和 Kobayashi 度量的比较定理成立就很值得研究.这方面的成果很多,例如,对有界齐性域,对强拟凸域,这种比较定理都成立.文[HaP]指出,对复 2 维的广义的 Thullen 域,其 Bergman 度量和 Kobayashi 度量的比较定理成立.文[YW36,YW39]指出此定理对某两类拟凸域(不一定是强拟凸域的情况)也成立.我们意在证明此定理对第三类超 Cartan 域(也称第三类 Cartan-Hartogs 域)也成立.

第三类超 Cartan 域(也称第三类 Cartan-Hartogs 域)是在文[YW3]中引进的.它是指如下形式的域:

$$Y_{\mathrm{III}}(N,q,K):=\{w\in\mathbf{C}^N,Z\in R_{\mathrm{III}}(q):|w|^{2K}<\det(I+Z\bar{Z}),K>0\}:=Y_{\mathrm{III}}.\tag{4.10.1}$$

其中

$$w=\{w_1,\cdots,w_N\},|w|^2=w\bar{w}'=\sum_{k=1}^{N}|w_k|^2.$$

$R_{\mathrm{III}}(q)$是华罗庚意义下的第三类 Cartan 域(或称第三类典型域).

我们主要证明如下的定理.

定理 设 $B_{Y_{\mathrm{III}}}$和 $E_{Y_{\mathrm{III}}}$分别表示 Y_{III}上 Bergman 度量和 Kobayashi 度量,则存在一个正的常数 C^*,使得对任意的$((w,Z),\xi)\in Y_{\mathrm{III}}\times\mathbf{C}^{N+\frac{q(q-1)}{2}}$有:

$$B_{Y_{\mathrm{III}}}((w,Z),\xi)\leqslant C^*E_{Y_{\mathrm{III}}}((w,Z),\xi).\tag{4.10.2}$$

这就是第三类超 Cartan 域上的 Bergman 度量和 Kobayashi 度量的比较定理.

证明比较定理最重要的一步是估计 Bergman 度量的全纯截曲率,像这样的估计一般都是很复杂的.当维数为 2 时就很复杂[Azu,AzS],为解决这个困难,我们构造一个新的完备的 Kähler 度量,而且它不小于 Bergman 度量.使得它的全纯截曲率的上界为一负常数,再利用[Hei],就可以得到这新的度量和 Kobayashi 度量的比较定理.由此再推出第三类超 Cartan 域上的比较定理.

在证明此定理之前,首先介绍几个基本概念.

X. 1. 基本概念

首先我们给出 Kähler 度量的定义.

设域 D 为有界域,$(z,w)\in D$,如果 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]$ 是关于 (z,w) 和 $\overline{(z,w)}$ 的解析函数,

$$T = T[(z,w),\overline{(z,w)}]$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln K[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta} & \dfrac{\partial^2 \ln K[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_\alpha \partial \overline{w}_j} \\ \dfrac{\partial^2 \ln K[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_k \partial \overline{z}_\beta} & \dfrac{\partial^2 \ln K[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_k \partial \overline{w}_j} \end{pmatrix}_{\substack{1\leqslant \alpha,\beta\leqslant n \\ 1\leqslant k,j\leqslant m}} \tag{4.10.3}$$

是正定 Hermitian 矩阵,则度量

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}(z,w)T[(z,w),\overline{(z,w)}]\mathrm{d}\,\overline{(z,w)}'$$

被称为域 D 的 Kähler 度量[YiT].

如果 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]$ 是 Bergman 核函数,而且 $w=z$,则 Kähler 度量就是 Bergman 度量。

下面我们给出 Carathéodory 度量和 Kobayashi 度量的确切定义.

令 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的域,E 记为 $\mathbf{C}^1$ 上的单位圆盘.任意给定 $p\in D$ 和切向量 $v\in T_p(D)$,

$$c_D(p,v) := \sup_f P(f(p),\mathrm{d}f(p)v),$$

其中 f 是 D 到 E 全纯映射,对于 $z\in E$, $w\in T_z(E)$, $P(z,w)=\dfrac{|w|}{1-|z|^2}$.我们称 $c_D(p,v)$ 为 Carathéodory 度量[IsK].

令 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的域,E 记为 $\mathbf{C}^1$ 上的单位圆盘.对于 $(z,X)\in D\times\mathbf{C}^n$,

$$K_D(z,X) = \inf\{\gamma_E(\lambda;\alpha): \exists\,\varphi: E\to D, \varphi(\lambda)=z, \alpha\varphi'(\lambda)=X\}.$$

其中 $\gamma_E(\lambda;\alpha)=|\alpha|/(1-|\lambda|^2)$,$\varphi$ 是全纯的.K_D 被称为 Kobayashi 度量[PfW].

X. 2. 度量方阵

以下变换是 $Y_{\mathrm{III}}(N,m,n,K)$ 是全纯自同构,这些变换的集合形成一个群(不一定是最大群),记之为 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{III}})$:

$$\begin{cases} w^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} w \det(I+Z_0\overline{Z}_0)^{\frac{1}{2K}} \det(I+Z\overline{Z}_0)^{-\frac{1}{K}} \\ Z^* = A(Z-Z_0)(I+\overline{Z}_0 Z)^{-1}\overline{A}^{-1}, \end{cases} \tag{4.10.4}$$

其中 $A^{T}A=(I+Z_0\overline{Z}_0)^{-1}, Z_0\in R_{\mathrm{III}}(q), \mathrm{i}=(-1)^{\frac{1}{2}}$此变换把$(w, Z_0)$映为$(w^*, 0)$. 令

$$X = X(Z, w) = |w|^2(\det(I + Z\overline{Z}))^{-\frac{1}{K}},$$

则 X 在 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{III}})$下不变,而且任何以 X 为变量的函数都是在 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{III}})$下不变的. 由本章第 I 节知, Y_{III}的 Bergman 核函数是:

$$K_{Y_{\mathrm{III}}} = K^{-\frac{q(q-1)}{2}}\prod{}^{-\frac{q(q-1)}{2}+N}G(X)\det(I + Z\overline{Z})^{-(1+q+\frac{N}{K})}. \tag{4.10.5}$$

其中 $G(X)=\sum_{l=0}^{h} b_l\Gamma(N+l)(1-X)^{-(N+l)}, h=\frac{q(q-1)}{2}+1$. 令

$$\begin{aligned}P_3(x) = &(x+1)[2(x+1)+K(2q-3))][(2(x+1)\\&+K(2q-4))(2(x+1)+K(2q-5))][(2(x+1)\\&+K(2q-5))(2(x+1)+K(2q-6))\\&\cdot(2(x+1)+K(2q-7))]\cdots[(2(x+1)+K(q-1))\\&\cdot(2(x+1)+K(q-2))\cdots(2(x+1)+K)],\end{aligned} \tag{4.10.6}$$

则 $b_0=0$,其余 b_l 由下列递推公式确定:

$$b_l = \left[P_3(-l-1) - \sum_{k=0}^{l-1} b_k(-1)^k\Gamma(l+1)/\Gamma(l-k+1)\right] / \left[(-1)^l\Gamma(l+1)\right], l = 1, \cdots, \frac{q(q-1)}{2}.$$

令 z 是由 Z 中元素按行的次序排成的向量,即

$$z = (z_{12}, \cdots, z_{1q}, z_{23}, \cdots, z_{2q}, \cdots, z_{(q-1)q}).$$

若 $F\in\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{III}})$, 记 J_F 为 F 的 Jacobi 矩阵,则

$$J_F = \begin{pmatrix}\frac{\partial z^*}{\partial z} & \frac{\partial w^*}{\partial z}\\ 0 & \frac{\partial w^*}{\partial w}\end{pmatrix}. \tag{4.10.7}$$

易知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Z^* &= A\mathrm{d}Z(I+\overline{Z}_0Z)^{-1}\overline{A}^{-1} + A(Z-Z_0)\mathrm{d}(I+\overline{Z}_0Z)^{-1}\overline{A}^{-1},\\ \frac{\partial w^*}{\partial w} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\det(I+Z_0\overline{Z}_0)^{\frac{1}{2K}}\det(I+Z\overline{Z}_0)^{-\frac{1}{K}}I,\\ \frac{\partial w^*}{\partial z} &= \frac{1}{K}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\det(I+Z_0\overline{Z}_0)^{\frac{1}{2K}}\det(I+Z\overline{Z}_0)^{-\frac{1}{K}}E(Z_0)'w.\end{aligned} \tag{4.10.8}$$

其中

$$E(Z_0)=(\mathrm{tr}[(I+Z\overline{Z}_0)^{-1}I_{12}\overline{Z}_0],\mathrm{tr}[(I+Z\overline{Z}_0)^{-1}I_{13}\overline{Z}_0],$$
$$\cdots,\mathrm{tr}[(I+Z\overline{Z}_0)^{-1}I_{q-1q}\overline{Z}_0]) \tag{4.10.9}$$

为$\left(1,\dfrac{q(q-q)}{2}\right)$矩阵. $I_{\alpha\beta}$为$q\times q$矩阵,其第α行第β列交叉处元素为1,第β行第α列交叉处元素为-1,其余元素均为0.令

$$J=J_F|_{z_0=z}=\begin{pmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix} \tag{4.10.10}$$

则有

$$J_{11}=\frac{\partial z^*}{\partial z}\Big|_{z_0=z}=[A'\times A']_{*},$$

$$J_{12}=\left(-\frac{1}{K}\right)e^{i\theta}\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{2K}}E(Z)'w,$$

$$J_{21}=0,J_{22}=e^{i\theta}\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{2K}}I.$$

$[A'\times A']_{*}$的定义见[Lu3].

设$T=T[(z,w),\overline{(z,w)}]$为域$Y_{\mathrm{III}}$的Bergman度量方阵,则

$$T=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{III}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{z}_{\sigma r}} & \dfrac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{III}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{w}_j}\\[2ex] \dfrac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{III}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_i\partial\overline{z}_{\sigma r}} & \dfrac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{III}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_i\partial\overline{w}_j}\end{pmatrix}, \tag{4.10.11}$$

$$1\leqslant\alpha<\beta\leqslant q,1\leqslant\sigma<r\leqslant q,1\leqslant i,j\leqslant N.$$

其中

$$\frac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{III}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{z}_{\sigma r}}=\frac{\partial^2\ln G(X)}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{z}_{\sigma r}}$$
$$+\frac{\partial^2\ln\det(I+Z\overline{Z})^{-(1+q+\frac{N}{K})}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{z}_{\sigma r}}$$
$$=\frac{\partial^2\ln G(X)}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial\overline{z}_{\sigma r}}\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}+\frac{\partial\ln G(X)}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{z}_{\sigma r}}$$
$$-\left(1+q+\frac{N}{K}\right)\frac{\partial^2\ln\det(I+Z\overline{Z})}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{z}_{\sigma r}},$$

$$\frac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{III}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{w}_j}=\frac{\partial^2\ln G(X)}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{w}_j}$$
$$+\frac{\partial^2\ln\det(I+Z\overline{Z})^{-(1+q+\frac{N}{K})}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{w}_j}$$

$$= \frac{\partial^2 \ln G(X)}{\partial X^2} \frac{\partial X}{\partial \overline{w}_j} \frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \ln G(X)}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial z_{\alpha\beta} \partial \overline{w}_j}$$

$$- \left(1 + q + \frac{N}{K}\right) \frac{\partial^2 \ln \det(I + Z\overline{Z})}{\partial z_{\alpha\beta} \partial \overline{w}_j},$$

$$\frac{\partial^2 \ln K_{Y_{\mathrm{III}}}[(z, w), \overline{(z, w)}]}{\partial w_i \partial \overline{z}_{\sigma\tau}} = \frac{\partial^2 \ln G(X)}{\partial w_i \partial \overline{z}_{\sigma\tau}}$$

$$+ \frac{\partial^2 \ln \det(I + Z\overline{Z})^{-(1+q+\frac{N}{K})}}{\partial w_i \partial \overline{z}_{\sigma\tau}}$$

$$= \frac{\partial^2 \ln G(X)}{\partial X^2} \frac{\partial X}{\partial w_i} \frac{\partial X}{\partial \overline{z}_{\sigma\tau}} + \frac{\partial \ln G(X)}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial w_i \partial \overline{z}_{\sigma\tau}}$$

$$- \left(1 + q + \frac{N}{K}\right) \frac{\partial^2 \ln \det(I + Z\overline{Z})}{\partial w_i \partial \overline{z}_{\sigma\tau}},$$

$$\frac{\partial^2 \ln K_{Y_{\mathrm{III}}}[(z, w), \overline{(z, w)}]}{\partial w_i \partial \overline{w}_j} = \frac{\partial^2 \ln G(X)}{\partial w_i \partial \overline{w}_j}$$

$$+ \frac{\partial^2 \ln \det(I + Z\overline{Z})^{-(1+q+\frac{N}{K})}}{\partial w_i \partial \overline{w}_j}$$

$$= \frac{\partial^2 \ln G(X)}{\partial X^2} \frac{\partial X}{\partial w_i} \frac{\partial X}{\partial \overline{w}_j} + \frac{\partial \ln G(X)}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial w_i \partial \overline{w}_j}$$

$$- \left(1 + q + \frac{N}{K}\right) \frac{\partial^2 \ln \det(I + Z\overline{Z})}{\partial w_i \partial \overline{w}_j}.$$

设

$$\ln G(X) = M, \frac{\partial \ln G(X)}{\partial X} = M', \frac{\partial^2 \ln G(X)}{\partial X^2} = M''. \tag{4.10.12}$$

经计算,我们知道以下的结果

$$\left.\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}\right|_{z=0} = -\frac{1}{K}|w|^2 \det(I + Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}} \mathrm{tr}[(I + Z\overline{Z})^{-1} I_{\alpha\beta} \overline{Z}]|_{z=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial X}{\partial \overline{z}_{\sigma\tau}}\right|_{z=0} = -\frac{1}{K}|w|^2 \det(I + Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}} \mathrm{tr}[(I + Z\overline{Z})^{-1} Z I_{\sigma\tau}]|_{z=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 X}{\partial z_{\alpha\beta} \partial \overline{z}_{\sigma\tau}}\right|_{z=0} = -\frac{1}{K}|w|^2 X \mathrm{tr}[I_{\alpha\beta} I_{\sigma\tau}], \left.\frac{\partial X}{\partial w_i}\right|_{z=0} = \overline{w}_i, \left.\frac{\partial X}{\partial \overline{w}_j}\right|_{z=0} = w_j,$$

$$\left.\frac{\partial^2 X}{\partial z_{\alpha\beta} \partial \overline{w}_j}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial^2 X}{\partial w_i \partial \overline{z}_{\sigma\tau}}\right|_{z=0} = 0, \left.\frac{\partial^2 X}{\partial w_i \partial \overline{w}_j}\right|_{z=0} = \delta_{ij},$$

$$\frac{\partial^2 \ln \det(I + Z\overline{Z})}{\partial z_{\alpha\beta} \partial \overline{z}_{\sigma\tau}} = \mathrm{tr}(I_{\alpha\beta} I_{\sigma\tau}),$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ln \det(I+Z\bar{Z})}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \bar{w}_j}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial^2 \ln \det(I+Z\bar{Z})}{\partial w_i \partial \bar{z}_{\sigma\tau}}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial^2 \ln \det(I+Z\bar{Z})}{\partial w_i \partial \bar{w}_j}\right|_{z=0} = 0.$$

这样就有

$$\left.\frac{\partial^2 \ln K_{Y_{III}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \bar{z}_{\sigma\tau}}\right|_{z=0} = 2\left(\frac{1}{K}M'X + \left(1+q+\frac{N}{K}\right)\right)\operatorname{tr}(I_{\alpha\beta}I_{\sigma\tau}),$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ln K_{Y_{III}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \bar{w}_j}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial^2 \ln K_{Y_{III}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_i \partial \bar{z}_{\sigma\tau}}\right|_{z=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ln K_{Y_{III}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_i \partial \bar{w}_j}\right|_{z=0} = M''\bar{w}_i w_j + M'\delta_{ij}.$$

也就是说

$$T = \begin{pmatrix} 2\left[\frac{1}{K}M'X + \left(1+q+\frac{N}{K}\right)\right]I & 0 \\ 0 & M'I + M''w'w \end{pmatrix}. \tag{4.10.13}$$

因为对于任意$(z,w)\in Y_{III}(N,m,n,K)$，存在 $F\in \operatorname{Aut}(Y_{III})$，使得$F(z,w)=(0,w^*)$，则

$$T[(z,w),\overline{(z,w)}] = J_F|_{z_0=z}T[(z^*,w^*)\overline{(z^*,w^*)}]|_{z^*=0}\overline{J_F}'|_{z_0=z}$$

$$= J\begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{K}M'X + \left(1+q+\frac{N}{K}\right)\right)I & 0 \\ 0 & M'I + M''w'w \end{pmatrix}\bar{J}'. \tag{4.10.14}$$

我们得到 $T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$，这里

$$T_{11} = 2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)[A'\bar{A}\times A'\bar{A}]_{sk} + K^{-2}(XM''+M')XE(Z)'\overline{E(Z)},$$

$$T_{12} = -K^{-1}\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{K}}(XM''+M')E(Z)'w,\ T_{21} = \bar{T}'_{12},$$

$$T_{22} = M'\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{K}}I + \det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{2}{K}}M''w'w.$$

令 $K[(z,w),\overline{(z,w)}] = G_*(X)\det(I+Z\bar{Z})^{-(1+q+\frac{N}{K})}$，记 $M=\ln G_*(X)$，若其生成一个 Kähler 度量，则其度量方阵 T 和上面有相同形式.

X. 3. 全纯截曲率

假设 $K[(z,w),(z,w)] = G_*(X)\det(I+Z\bar{Z})^{-(1+q+\frac{N}{K})}$ 生成 $Y_{Ⅲ}$ 的一个不变 Kähler 度量，则度量方阵 T 与上节所述相同，它的全纯截曲率 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$ 有如下形式：

$$\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)] = \frac{\mathrm{d}(z,w)[-\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}T + \mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}]\overline{\mathrm{d}(z,w)'}}{[\mathrm{d}(z,w)T\overline{\mathrm{d}(z,w)'}]^2}.$$

(4.10.15)

全纯截曲率在全纯自同构变换下是不变的，对任意 $(z,w)\in Y_{Ⅲ}$，存在 $F\in \mathrm{Aut}(Y_{Ⅲ})$，使得 $F(z,w)=(0,w^*)$. 所以，只须计算 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$ 在 $(0,w^*)$ 点的值即可. 由于

$$\mathrm{d}T = \begin{pmatrix}\mathrm{d}T_{11} & \mathrm{d}T_{12}\\ \mathrm{d}T_{21} & \mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix}, \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T = \begin{pmatrix}\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}T_{11} & \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}\\ \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{21} & \mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}T_{22}\end{pmatrix}. \quad (4.10.16)$$

根据 X.2.一节的结果，知道

$$T_{22} = M'\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{K}}I + \det(I+Z\bar{Z})^{\frac{2}{K}}M''\bar{w}'w.$$

所以有

$$\mathrm{d}T_{22} = \sum_{\alpha<\beta}\frac{\partial T_{22}}{\partial z_{\alpha\beta}}\mathrm{d}z_{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T_{22}}{\partial w_i}\mathrm{d}w_i,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{22}}{\partial z_{\alpha\beta}} &= M''\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{K}}I + M'\frac{\partial\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{K}}}{\partial z_{\alpha\beta}}I\\ &\quad + M''\frac{\partial\det(I+Z\bar{Z})^{\frac{2}{K}}}{\partial z_{\alpha\beta}}\bar{w}'w + \det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{2}{K}}M'''\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}\bar{w}'w\\ &= K^{-1}\det(I+Z\bar{Z})^{\frac{2}{K}}\mathrm{tr}((I+Z\bar{Z})^{-1}I_{\alpha\beta}Z^T)(XM'''+2M'')\bar{w}'w\\ &\quad + K^{-1}\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{K}}\mathrm{tr}((I-ZZ^T)^{-1}I_{\alpha\beta}Z^T)(XM''+M')I,\\ \frac{\partial T_{22}}{\partial w_i} &= M''\frac{\partial X}{\partial w_i}\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{K}}I + \left(M'''\frac{\partial X}{\partial w_i}\bar{w}'w + M''\bar{w}'e_i\right)\\ &\quad \cdot\det(I+Z\bar{Z})^{\frac{2}{K}}\\ &= \det(I+Z\bar{Z})^{\frac{2}{K}}[M''\bar{w}_iI + \det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{K}}M'''\bar{w}_i\bar{w}'w\\ &\quad + M''\bar{w}'e_i].\end{aligned}$$

由以上的计算可知，

$$dT_{22}|_{z=0} = M'''(\overline{w}dw')\overline{w}'w + M''\overline{w}dw'I + M''\overline{w}dw.$$
(4.10.17)

已经知道

$$ddT_{22} = \sum_{\alpha<\beta}\sum_{\sigma<\tau}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \bar{z}_{\sigma\tau}}dz_{\alpha\beta}d\bar{z}_{\sigma\tau} + \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial w_i\partial \overline{w}_j}dw_i d\overline{w}_j$$

$$+ \sum_{\alpha<\beta}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \overline{w}_j}dz_{\alpha\beta}d\overline{w}_q + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\sigma<\tau}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial w_i\partial \bar{z}_{\sigma\tau}}dw_i d\bar{z}_{\sigma\tau},$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \bar{z}_{\sigma\tau}}\right|_{z=0} = 2[K^{-1}(2M''+XM''')\overline{w}'w + K^{-1}(M'+XM'')]\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\tau},$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial w_i\partial \overline{w}_j}\right|_{z=0}$$

$$= \begin{cases} M''(e_{ii}+I) + M^{(4)}|w_i|^2\overline{w}'w + M'''(\overline{w}'w + |w_i|^2 I + w_i e_i' w + w_i\overline{w}'e_i), i = j, \\ M''e_{ij} + M^{(4)}w_j w_i \overline{w}'w + M'''(w_j w_i I + w_i e_j' w + w_j \overline{w}'e_i), i \neq j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \overline{w}_j} = \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial w_i\partial \bar{z}_{\sigma\tau}} = 0.$$

由以上的结果，就可以得到

$$\bar{d}dT_{22}|_{z=0} = 2K^{-1}(XM''+M')|dz|^2 I + 2K^{-1}(XM'''+2M'')|dz|^2\overline{w}'w$$

$$+ (M''I + M'''\overline{w}'w)|dw|^2 + M''\overline{dw'}dw + M^{(4)}w'w|w\,\overline{dw'}|^2$$

$$+ M'''[|w\,\overline{dw'}|^2 I + (\overline{w}dw')(\overline{dw'}w) + (w\,\overline{dw'})(\overline{w'}dw)].$$

(4.10.18)

由于

$$T_{12} = -K^{-1}(XM''+M')\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}E(Z)'w,$$

所以有

$$dT_{12} = \sum_{\alpha<\beta}\frac{\partial T_{12}}{\partial z_{\alpha\beta}}dz_{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T_{12}}{\partial w_i}dw_i,$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial z_{\alpha\beta}} = -K^{-1}\frac{\partial\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}}{\partial z_{\alpha\beta}}(XM''+M')E(Z)'w$$

$$-K^{-1}\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}$$

$$\cdot(XM'''+2M'')\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}E(Z)'w - K^{-1}$$

$$\cdot\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}(XM''+M')\frac{\partial E(Z)'}{\partial z_{\alpha\beta}}w,$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial w_i} = -K^{-1}\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}\Big[(XM''' + M'')\frac{\partial X}{\partial w_i}E(Z)'w$$

$$-K^{-1}(XM''+2M')E(Z)'\frac{\partial w}{\partial w_i}\Big],$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial z_{\alpha\beta}}\Big|_{z=0} = \frac{\partial T_{12}}{\partial w_i}\Big|_{z=0} = 0,$$

所以

$$dT_{12}|_{z=0} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{z}_{\sigma\tau}}\Big|_{z=0} = \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial w_i\partial\overline{w}_j}\Big|_{z=0} = \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{w}_j}\Big|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial w_i\partial\overline{z}_{\sigma\tau}}\Big|_{z=0} = 2K^{-1}[(XM'''+2M'')\overline{w}_i e'_{\sigma\tau}w + K^{-1}(XM''+M')e'_{\sigma\tau}e_i],$$

这样就有

$$ddT_{12}|_{z=0} = 2K^{-1}(XM'''+2M'')(\overline{w}dw')(\overline{dz}'w)$$
$$+2K^{-1}(XM''+M')(\overline{dz'}dw).$$

由于

$$T_{21} = \overline{T}'_{12} = -K^{-1}\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}(XM''+M')\overline{w}'\overline{E(Z)},$$

所以有

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial z_{\alpha\beta}} = -K^{-1}\frac{\partial\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}}{\partial z_{\alpha\beta}}(XM''+M')\overline{w}'\overline{E(Z)}$$

$$-K^{-1}\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}(M''+XM'''+M'')\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}\overline{w}'\overline{E(Z)}$$

$$-K^{-1}\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}(XM''+M')\overline{w}'\frac{\partial\overline{E(Z)}}{\partial z_{\alpha\beta}}.$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial w_i} = -K^{-1}\det(I+Z\overline{Z})^{-\frac{1}{K}}\Big[(XM'''+2M'')\frac{\partial X}{\partial w_i}\overline{w}'E(\overline{Z})$$

$$+(XM''+M')\frac{\partial w'}{\partial w_i}\overline{E(Z)}\Big],$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial z_{\alpha\beta}}\Big|_{z=0} = 2K^{-1}(XM''+M')w'e_{\alpha\beta},$$

这样可推出以下的结果

$$dT_{21}|_{z=0} = 2K^{-1}(XM''+M')w'dz. \tag{4.10.19}$$

$$ddT_{21}|_{z=0} = K^{-1}(XM'''+2M'')(\overline{w}dw')(\overline{w}'dz)$$
$$+K^{-1}(XM''+M')(\overline{dw}'dz). \tag{4.10.20}$$

由于

$$T_{11}=2\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)[A'A\times A'A]_{sk}+K^{-2}(XM''+M')XE(Z)'\overline{E(Z)},$$

所以有

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial z_{\alpha\beta}}=2K^{-1}(M''X+M')\left(\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}\right)[A'\overline{A}\times A'\overline{A}]_{sk}+2\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)\cdot\frac{\partial[A'\overline{A}\times A'\overline{A}]_{sk}}{\partial z_{\alpha\beta}}+K^{-2}(2M''+M'''X)\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}XE(Z)'\overline{E(Z)}+K^{-2}(XM''+M')\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}E(Z)'\overline{E(Z)}+K^{-2}(XM''+M')X\left(\frac{\partial E(Z)'\overline{E(Z)}}{\partial z_{\alpha\beta}}\right),$$

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial w_i}=2K^{-1}(M''X+M')\frac{\partial X}{\partial w_i}[A'\overline{A}\times A'\overline{A}]_{sk}+K^{-2}(XM'''+2M'')X\cdot\frac{\partial X}{\partial w_i}E(Z)'\overline{E(Z)}+K^{-2}(XM''+M')\frac{\partial X}{\partial w_i}E(Z)'\overline{E(Z)}.$$

$$\left.\frac{\partial T_{11}}{\partial z_{\alpha\beta}}\right|_{z=0}=0,\quad \left.\frac{\partial T_{11}}{\partial w_i}\right|_{z=0}=2K^{-1}(M''\overline{w}_iX+M'\overline{w}_i)I,$$

则得到结果

$$\mathrm{d}T_{11}|_{z=0}=2K^{-1}(XM''+M')\overline{w}\mathrm{d}w'I. \tag{4.10.21}$$

为了表示方便,给出一个小的定义,下面我们定义$[A\times B]_{sk}$,其中$A=(a_{ij})$和$B=(b_{kl})$相同行数、列数的矩阵,$c_{(ij)(kl)}$为$[A\times B]_{sk}$中的元素,$c_{(ij)(kl)}=a_{ik}b_{jl}-a_{il}b_{jk}$.

由于

$$\left.\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{z}_{\sigma\tau}}\right|_{z=0}=-2K^{-2}X(M''X+M')\mathrm{tr}(I_{\alpha\beta}I_{\sigma\tau})[I\times I]_{sk}+4K^{-2}(XM''+M')Xe'_{\sigma\tau}e_{\alpha\beta}-2\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)\cdot([(I_{\sigma\tau}I_{\beta\alpha})\times I]_{sk}+[I\times(I_{\tau\sigma}I_{\alpha\beta})]_{sk}),$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial w_i\partial\overline{w}_j}\right|_{z=0}=2K^{-1}(XM'''+2M'')\overline{w}_iw_jI+2K^{-1}(XM''+M')\delta_{ij}I,$$

$$\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \overline{w}_j}\Big|_{z=0} = \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial w_i \partial \overline{z}_{\sigma\tau}}\Big|_{z=0} = 0,$$

$$\sum_{\alpha,\beta,\sigma,\tau} \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \overline{z}_{\sigma\tau}} dz_{\alpha\beta}\overline{dz_{\sigma\tau}} = 4K^{-2}X(XM'' + M')|dz|^2 I$$

$$+ 4K^{-2}(XM'' + M')X\overline{dz}'dz - 2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)$$

$$\cdot([\overline{dZ}dZ' \times I]_{sk} + [I \times \overline{dZ}'dZ]_{sk}),$$

其中

$$dZ = \begin{pmatrix} 0 & dz_{12} & \cdots & dz_{1q} \\ -dz_{12} & 0 & \cdots & dz_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -dz_{1q} & -dz_{2q} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

所以有

$$\begin{aligned} ddT_{11}|_{z=0} = {} & 4K^{-2}X(XM'' + M')|dz|^2 I \\ & - 2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)([\overline{dZ}dZ' \times I]_{sk} \\ & + [I \times \overline{dZ}'dZ]_{sk}) + 4K^{-2}(XM'' + M')X\overline{dz}'dz \\ & + 2K^{-1}(XM''' + 2M'')|w\overline{dw}'|^2 I \\ & + 2K^{-1}(XM'' + M')|dw|^2 I. \end{aligned} \tag{4.10.22}$$

由以上大量的计算可得：

$$dT|_{z=0} = \begin{pmatrix} 2K^{-1}(XM'' + M')\overline{w}dw'I & 0 \\ 2K^{-1}(XM'' + M')\overline{w}'dz & M'''(\overline{w}dw')\overline{w}'w + M''(wdw'I + \overline{w}'dw) \end{pmatrix},$$

$$T|_{z=0} = \begin{pmatrix} 2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)I & 0 \\ 0 & M''\overline{w}'w + M'I \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}|_{z=0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)^{-1}I & 0 \\ 0 & (M')^{-1}(I - (M' + M''X)^{-1}\overline{w}'wM'') \end{pmatrix}.$$

令

$$\mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}|_{z=0}=\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix}.\tag{4.10.23}$$

则有

$$t_{11}=2K^{-2}(XM''+M')^2|w\mathrm{d}w'|^2\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)^{-1}I,$$

$$t_{12}=2K^{-2}(XM''+M')^2\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)^{-1}w\mathrm{d}w'\,\overline{\mathrm{d}z'w},$$

$$t_{21}=\overline{t'_{12}},$$

$$t_{22}=2K^{-2}(XM''+M')^2\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)^{-1}|\mathrm{d}z|^2\,\overline{w'w}$$

$$+\frac{(M'')^2}{M'}[\overline{w}\mathrm{d}w'I+\overline{w'}\mathrm{d}w][\overline{\mathrm{d}w w'}I+\overline{\mathrm{d}w'w}]$$

$$+(M')^{-1}[M'''(XM'''+4M'')-(XM''+M')^{-1}M''(XM'''$$

$$+2M'')^2]|w\,\mathrm{d}w'|^2\,\overline{w'w}$$

令

$$-\mathrm{d}\mathrm{d}T+\mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}|_{z=0}=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix},\tag{4.10.24}$$

其中

$$R_{11}=[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{11}+t_{11}]|_{z=0}$$

$$=\left[2K^{-2}(XM''+M')^2\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)^{-1}I\right.$$

$$\left.-2K^{-1}(XM'''+2M'')I\right]|\overline{w}\mathrm{d}w'|^2-4K^{-2}X(XM''+M')|\mathrm{d}z|^2I$$

$$-2K^{-1}(XM''+M')|\mathrm{d}w|^2I-4K^{-2}(XM''+M')X\,\overline{\mathrm{d}z'}\mathrm{d}z$$

$$+2\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)([\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z'\times I]_{*}+[I\times\overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z]_{*}),$$

$$R_{12}=[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}+t_{12}]|_{z=0}=2\left[K^{-2}(XM''+M')^2\right.$$

$$\left.\cdot\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)^{-1}-K^{-1}(XM'''+2M'')\right]\overline{w}\mathrm{d}w'\,\overline{\mathrm{d}z'w}$$

$$-2K^{-1}(XM''+M')(\overline{\mathrm{d}z'}\mathrm{d}w),$$

$$R_{21}=\overline{R'_{12}},$$

$$R_{22}=[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{22}+t_{22}]|_{z=0}$$

$$=(M')^{-1}[M'''(XM'''+4M'')-(XM''+M')^{-1}M''(XM'''+2M'')^2]$$

$$\cdot |w\overline{\mathrm{d}w'}|^2 \overline{w'}w + [(M'')^2(M')^{-1} - M'''](\overline{w}\mathrm{d}w'I + \overline{w'}\mathrm{d}w)$$
$$\cdot (\mathrm{d}\overline{w}w'I + \overline{\mathrm{d}w'}w) - 2K^{-1}(XM'' + M')|\mathrm{d}z|^2 I - M''|\mathrm{d}w|^2 I$$
$$+ \left[2K^{-2}(XM'' + M')^2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)^{-1}\right.$$
$$\left. - 2K^{-1}(XM''' + 2M'')\right]|\mathrm{d}z|^2 \overline{w'}w - M''\overline{\mathrm{d}w'}\mathrm{d}w$$
$$- M^{(4)}|w\overline{\mathrm{d}w'}|^2 \overline{w'}w.$$

由于

$$(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)[-\overline{\partial}\mathrm{d}T + \mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}]\overline{(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)'}|_{z=0}$$
$$= (\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\overline{(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)'} \tag{4.10.25}$$
$$= \mathrm{d}zR_{11}\overline{\mathrm{d}z'} + \mathrm{d}wR_{21}\overline{\mathrm{d}z'} + \mathrm{d}zR_{12}\overline{\mathrm{d}w'} + \mathrm{d}wR_{22}\overline{\mathrm{d}w'}.$$

经计算有

$$\mathrm{d}zR_{12}\overline{\mathrm{d}w'} = \left[2K^{-2}(XM'' + M')^2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)^{-1}\right.$$
$$\left. - 2K^{-1}(XM''' + 2M'')\right]|w\overline{\mathrm{d}w'}|^2|\mathrm{d}z|^2$$
$$- 2K^{-1}(XM'' + M')|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2,$$

$$\mathrm{d}zR_{21}\overline{\mathrm{d}w'} = \mathrm{d}wR_{12}\overline{\mathrm{d}z'},$$

$$\mathrm{d}zR_{11}\overline{\mathrm{d}z'} = \left[2K^{-2}(XM'' + M')^2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)^{-1}\right.$$
$$\left. - 2K^{-1}(XM''' + 2M'')\right]|\overline{w}\mathrm{d}w'|^2|\mathrm{d}z|^2$$
$$- 2K^{-1}(XM'' + M')|\mathrm{d}z|^2|\mathrm{d}w|^2$$
$$- 2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)\mathrm{d}z([\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z' \times I]_{sk}$$
$$+ [I \times \overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z]_{sk})\overline{\mathrm{d}z'} - 4K^{-2}X(XM'' + M')|\mathrm{d}z|^4,$$

$$\mathrm{d}wR_{22}\overline{\mathrm{d}w'} = (M')^{-1}[M''(XM''' + 4M'')$$
$$- (XM'' + M')^{-1}M''(XM''' + 2M'')^2]$$
$$+ |w\overline{\mathrm{d}w'}|^4 + 4[(M'')^2(M')^{-1} - M''']|w\overline{\mathrm{d}w'}|^2|\mathrm{d}w|^2$$
$$- 2M''|\mathrm{d}w|^4 - M^{(4)}|w\overline{\mathrm{d}w'}|^4$$
$$+ \left[2K^{-2}(XM'' + M')^2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)^{-1}\right.$$

$$- 2K^{-1}(XM''' + 2M'')\Big] |dz|^2 |w\,\overline{dw'}|^2$$

$$- 2K^{-1}(XM'' + M')|dz|^2|dw|^2.$$

这样我们得到

$$(dz,dw)[-\overline{\partial}dT + dTT^{-1}\overline{dT'}]\overline{(dz,dw)'}|_{z=0}$$

$$= P_1|w\,\overline{dw'}|^4 + P_{12}|w\,\overline{dw'}|^2|dw|^2 + P_2|dw|^4$$

$$+ Q_1|dw|^2|dz|^2 + Q_2|w\,\overline{dw'}|^2|dz|^2$$

$$+ R|dz|^4 - \left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)dz([\overline{dZ}dZ' \times I]_{sk}$$

$$+ [I \times \overline{dZ'}dZ]_{sk})\overline{dz'}. \tag{4.10.26}$$

其中

$$P_1 = (M')^{-1}[M'''(XM''' + 4M'') - (XM'' + M')^{-1}$$

$$\cdot M''(XM''' + 2M'')^2] - M^{(4)},$$

$$P_{12} = 4[(M'')^2(M')^{-1} - M'''], P_2 = -2M'',$$

$$Q_1 = -8K^{-1}(XM'' + M')$$

$$Q_2 = 8\Big[K^{-2}(XM'' + M')^2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)^{-1}$$

$$- K^{-1}(XM''' + 2M'')\Big],$$

$$R = -8K^{-2}(XM'' + M')X.$$

经计算可得:

$$dz([\overline{dZ}dZ \times I]_{sk} + [I \times \overline{dZ}dZ]_{sk})\overline{dz'} = -\mathrm{tr}(dZ\,\overline{dZ}dZ\,\overline{dZ}).$$

$$\tag{4.10.27}$$

有了上面的结果,我们就可以得到全纯截曲率

$$\omega[(z,w)d(z,w)]|_{z=0} = \frac{G}{H}, \tag{4.10.28}$$

这里

$$G = P_1|w\,\overline{dw'}|^4 + P_{12}|w\,\overline{dw'}|^2|dw|^2 + P_2|dw|^4 + Q_1|dw|^2|dz|^2$$

$$+ Q_2|w\,\overline{dw'}|^2|dz|^2 + R|dz|^4 - 2K^{-1}(M'X + M_1)\mathrm{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'}),$$

$$H = [2K^{-1}(M'X + M_1)|dz|^2 + M'|dw|^2 + M''|w\,\overline{dw'}|^2)]^2,$$

其中 $M_1 = (1 + q)K + N$.

X.4. 过渡性度量的构造

假设 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]=H(X)\det(I+Z\bar{Z})^{-\left(1+q+\frac{N}{K}\right)}$ 生成一个不变 Kahler 度量，则它可以被写成如下的形式：

$$
\begin{aligned}
&H(X)\det(I+Z\bar{Z})^{-\left(1+q+\frac{N}{K}\right)}\\
&=\frac{H(X)}{G(X)}G(X)\det(I+Z\bar{Z})^{-\left(1+q+\frac{N}{K}\right)}\\
&=h(X)K_{Y_{\mathrm{III}}}[(z,w),\overline{(z,w)}].
\end{aligned}
\tag{4.10.29}
$$

其中 $h(X)=\frac{H(X)}{G(X)}$，$K_{Y_{\mathrm{III}}}$ 是 $Y_{\mathrm{III}}(N,q;K)$ 上的 Bergman 核. 所以由 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]$ 生成的度量方阵如下：

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2\ln h(X)}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar{z}_{\sigma t}} & \frac{\partial^2\ln h(X)}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar{w}_q}\\
\frac{\partial^2\ln h(X)}{\partial w_p\partial z_{\sigma t}} & \frac{\partial^2\ln h(X)}{\partial w_p\partial\bar{w}_q}
\end{pmatrix}
+T[(z,w),\overline{(z,w)}],
\tag{4.10.30}
$$

第一个方阵记为 T_h，通过计算可知：

$$
T_h=J\begin{pmatrix}
K^{-1}[\ln h(X)]'I & 0\\
0 & [\ln h(X)]'I+[\ln h(X)]''\overline{w^{*}}'w^{*}
\end{pmatrix}\bar{J}',
\tag{4.10.31}
$$

其中 J 和第 X.1. 节中的 J 一样，$w^{*}=e^{i\theta}\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{2K}}w$. 第二个方阵是 $Y_{\mathrm{III}}(N,q;K)$ 的 Bergman 度量方阵，因为 $Y_{\mathrm{III}}(N,q;K)$ 的 Bergman 度量是完备的[YZg6, YZg7]. 如果 $T_h\geqslant0$，则由 $H(X)\det(I+Z\bar{Z})^{-\left(1+q+\frac{N}{K}\right)}$ 生成的 Kahler 度量是完备的并且不小于 $Y_{\mathrm{III}}(N,q;K)$ 的 Bergman 度量 $B_{Y_{\mathrm{III}}}$.

显然，$T_h\geqslant0$ 的充要条件是 $[\ln h(X)]'\geqslant0$，$[\ln h(X)]''\geqslant0$.

$$
[\ln h(X)]'=\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)},\ [\ln h(X)]''=\left[\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)}\right]'
$$

所以 $T_h\geqslant0$ 充要条件是

$$
\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)}\geqslant0,\ \left[\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)}\right]'\geqslant0
$$

因此，如果 $h(X)$ 满足以上的条件，由 $H(X)\det(I+Z\bar{Z})^{-\left(1+q+\frac{N}{K}\right)}$ 生成的度量是完备的并且不小于 $B_{Y_{\mathrm{III}}}$.

例如：令 $H(X)=(1-X)^{-\lambda}$，$\lambda\geqslant\max\{m_1,m_2\}$ 则由 $H(X)\det(I+Z\bar{Z})^{-\left(1+q+\frac{N}{K}\right)}$ 生成的不变 Kähler 度量完备且不小于 $Y_{\mathrm{III}}(N,q;K)$ 的 Bergman 度量 $B_{Y_{\mathrm{III}}}$. 其中

$$m_1=\max\left\{\frac{G'(X)(1-X)}{G(X)}\right\},$$

$$m_2=\max\left\{\frac{[G(X)G''(X)-G'(X)^2](1-X)^2}{G(X)^2}\right\}. \qquad (4.10.31)'$$

事实上，通过计算可知：

$$\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)}=\frac{\lambda G(X)(1-X)^{-1}-G'(X)}{G(X)}$$

$$\left[\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)}\right]'=\frac{\lambda(1-X)^{-2}G(X)^2-G''(X)G(X)+G'(X)^2}{G(X)^2}$$

因为 $0\leqslant X<1$ 时，$G(X)\geqslant 0$，所以 $T_h\geqslant 0$ 的充要条件是

$$\lambda G(X)(1-X)^{-1}-G'(X)\geqslant 0,$$

$$\lambda(1-X)^{-2}G(X)^2-G''(X)G(X)+G'(X)^2\geqslant 0.$$

它等价于

$$\lambda\geqslant\max\left\{\frac{G'(X)(1-X)}{G(X)}\right\}=m_1,$$

$$\lambda\geqslant\max\left\{\frac{[G(X)G''(X)-G'(X)^2](1-X)^2}{G(X)^2}\right\}=m_2.$$

因为 $G'(X)$ 和 $G(X)(1-X)^{-1}$ 是 $(1-X)^{-1}$ 的 $N+\frac{q(q-1)}{2}+1$ 阶的多项式，所以

$$\lim_{X\to 1}\frac{G'(X)(1-X)}{G(X)}=N+\frac{q(q-1)}{2}+1.$$

因为 m_1 存在且有限. 同理 m_2 存在且有限. 因此当 $\lambda\geqslant\max\{m_1,m_2\}$ 时，

$$K_{Y_{\mathrm{III}}}=(1-X)^{-\lambda}\det(I+Z\bar{Z})^{-\left(1+q+\frac{N}{K}\right)}$$

生成的不变度量是完备的且不小于 Y_{III} 的 Bergman 度量.

X.5. 全纯截曲率的上界

我们把 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$ 写成如下的形式：

$$\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]|_{z=0}$$

$$=-C-\frac{\omega_1[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]}{\left[2\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)|\mathrm{d}z|^2+M'|\mathrm{d}w|^2+M''|w\,\mathrm{d}w'|^2)\right]^2}$$

(4.10.32)

其中

$$
\begin{aligned}
&\omega_1[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]\\
&= P_1^* |w\,\overline{\mathrm{d}w}'|^4 + P_{12}^* |w\,\overline{\mathrm{d}w}'|^2 |\mathrm{d}w|^2 + P_2^* |\mathrm{d}w|^4\\
&\quad + Q_1^* |\mathrm{d}w|^2 |\mathrm{d}z|^2 + Q_2^* |w\,\overline{\mathrm{d}w}'|^2 |\mathrm{d}z|^2\\
&\quad + R^* |\mathrm{d}z|^4 + 2\left(K^{-1}M'X + 1 + q + \frac{N}{K}\right)\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1^* &= -P_1 - (CM'')^2 = \frac{M''}{M'}(XM'' + M')^{-1}(XM''' + 2M'')^2 + M^{(4)}\\
&\quad - \frac{M'''}{M'}(XM''' + 4M'') - (CM'')^2,\\
P_{12}^* &= -P_{12} - 2CM''M' = 4M''' - 4\frac{(M'')^2}{M'} - 2CM'M'',\\
P_2^* &= -P_2 - C(M')^2 = 2M'' - C(M')^2,\\
Q_1^* &= -Q_1 - 4CK^{-1}(M'X + M_1)M'\\
&= 8K^{-1}(XM'' + M') - 4CK^{-1}(M'X + M_1)M',\\
Q_2^* &= -Q_2 - 4CK^{-1}(M'X + M_1)M''\\
&= 8K^{-1}[(XM''' + 2M'') - (XM'' + M')^2(M'X + M_1)^{-1}]\\
&\quad - 4CK^{-1}(M'X + M_1)M'',\\
R^* &= 8K^{-2}(XM' + M')X - 4CK^{-2}(XM' + M_1)^2.
\end{aligned}
$$

$C>0$ 且为常数. 其中 $M_1 = (1+q)K + N$. 如果证明 $\omega_1[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]\geqslant 0$, 则

$$\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)] \leqslant -C.$$

令 $G_*(X) = (1-X)^{-\lambda}$, 其中 $\lambda > 0, \lambda \geqslant \{m_1, m_2\}$. 则由于 $M = \ln G_*(X)$, 所以

$$
\begin{aligned}
&M' = \lambda(1-X)^{-1}, M'' = \lambda(1-X)^{-2},\\
&M''' = 2\lambda(1-X)^{-3}, M^{(4)} = 6\lambda(1-X)^{-4}.
\end{aligned}
$$

将以上各式代入 $P_1^*, \cdots, R^*$ 并且令 $\lambda = aM_1$, 我们有以下的结果:

$$
\begin{aligned}
P_1^* &= (1-X)^{-1}[aM_1(1-X)^{-2}]^{-1}[aM_1(1-X)^{-3}]^2\\
&\quad + 6aM_1(1-X)^{-4} - 2(1-X)^{-2}[2aM_1(1-X)^{-3}\\
&\quad + 2aM_1(1-X)^{-2}] - C(aM_1)^2(1-X)^{-4}\\
&= aM_1(1-X)^{-4}(2 - CaM_1).
\end{aligned}
$$

如果 $C \leqslant \frac{2}{aM_1}$, 则 $P_1^* \geqslant 0$.

$$P_{12}^{*}=8aM_1(1-X)^{-3}-4aM_1(1-X)^{-3}-2Ca^2M_1^2(1-X)^{-3}$$
$$=2aM_1(1-X)^{-3}(2-CaM_1),$$

如果 $C\leqslant\frac{2}{aM_1}$，则 $P_{12}^{*}\geqslant 0$.

$$P_2^{*}=2aM_1(1-X)^{-2}-C(aM_1)^2(1-X)^{-2}$$
$$=aM_1(1-X)^{-2}(2-CaM_1).$$

如果 $C\leqslant\frac{2}{aM_1}$，则 $P_2^{*}\geqslant 0$.

$$Q_1^{*}=8K^{-1}[XaM_1(1-X)^{-2}+aM_1(1-X)^{-1}]$$
$$-4CK^{-1}[XaM_1(1-X)^{-1}+M_1]aM_1(1-X)^{-1}$$
$$=4K^{-1}aM_1(1-X)^{-1}[(2-CaM_1)(1-X)^{-1}$$
$$-CM_1(1-a)].$$

令 $y=(1-X)^{-1}$，则当 $x\in[0,1)$，就有 $y\in[1,\infty)$. 令

$$f(y)=(2-aM_1)y-CM_1(1-a),$$

如果 $C\leqslant\frac{2}{aM_1}$，$f(y)$ 是增函数. 它在 $[1,\infty)$ 上最小值是 $f(1)$. 但是 $f(1)=2-CM_1$. 如果 $a\geqslant 1$，则 $f(1)\geqslant 0$. 因此在 $[1,\infty)$ 上 $f(y)\geqslant 0$. 但是

$$Q_1^{*}=2K^{-1}aM_1yf(y)\text{，就有 }Q_1^{*}\geqslant 0\text{，当 }a\geqslant 1,C\leqslant\frac{2}{aM_1}.$$

$$Q_2^{*}=4K^{-1}(XW'+M_1)^{-1}(1-X)^{-2}aM_1^2\{(1-X)^{-2}[2a$$
$$-Ca^2M_1]+(1-X)^{-1}[4(1-a)-2CaM_1(1-a)]$$
$$-C(1-a)^2M_1\}.$$

令 $y=(1-X)^{-1}$，当 $y\in[1,\infty)$.

令

$$f(y)=(2a-Ca^2M_1)y^2+2(1-a)(2-CaM_1)y-C(1-a)^2M_1,$$
$$f'(y)=2(2a-Ca^2M_1)y+2(1-a)(2-CaM_1).$$

当 $y_0=1-\frac{1}{a}$，$f'(y_0)=0$. 如果 $C\leqslant\frac{2}{aM_1}$，$f(y)$ 有一最小值 $f(y_0)=-2a^{-1}(a-1)^2\leqslant 0$. $f(y)$ 有两个根：y_1,y_2. 所以当 $y\in[y_0,y_1]$，$f(y)\leqslant 0$. 但是如果 $y\in[y_1,\infty)$，$f(y)\geqslant 0$（当 $C\leqslant 2(aM_1)^{-1},a\geqslant 1$）因此

$$Q_2^{*}\geqslant 0\text{，当 }y=(1-X)^{-1}\in[y_1,\infty),C\leqslant 2(aM_1)^{-1},a\geqslant 1.$$
$$Q_2^{*}\leqslant 0\text{，当 }y=(1-X)^{-1}\in[y_0,y_1],C\leqslant 2(aM_1)^{-1},a\geqslant 1.$$

所以我们只考虑 $y=(1-X)^{-1}\in[y_0,y_1]$ 的情况. 因为 $X\geqslant 0$，所以只考虑 $y=(1-X)^{-1}\in[1,y_1]$. 根据许瓦兹不等式，可知

$$Q_2^* |\mathrm{d}z|^2 |w \overline{\mathrm{d}w'}|^2 \geqslant Q_2^* |\mathrm{d}z|^2 |\mathrm{d}w|^2 |w|^2, y \in [1, y_1)$$

因此，如果$(1-X)^{-1} \in [1, y_1]$，我们就有

$$\begin{aligned}
&Q_2^* |\mathrm{d}z|^2 |w \overline{\mathrm{d}w'}|^2 + Q_1^* |\mathrm{d}z|^2 |\mathrm{d}w|^2 \\
\geqslant\ & Q_2^* |\mathrm{d}z|^2 |\mathrm{d}w|^2 |w|^2 + Q_1^* |\mathrm{d}z|^2 |\mathrm{d}w|^2 \\
=\ & Q_2^* X |\mathrm{d}z|^2 |\mathrm{d}w|^2 + Q_1^* |\mathrm{d}z|^2 |\mathrm{d}w|^2 \\
=\ & (Q_2^* X + Q_1^*) |\mathrm{d}z|^2 |\mathrm{d}w|^2.
\end{aligned}$$

$$Q_2^* X + Q_1^* = 8K^{-1}(XM' + M_1)^{-1}(1-X)^{-2} aM_1 \cdot \left\{ 2 - \frac{CaM_1}{2}[a(1-X)^{-2} - 2(a-1)(1-X)^{-1} + a - 1] + \frac{a-1}{2} CM_1 \right\}.$$

$y=(1-X)^{-1}, y \in [1, \infty), f_1(y) = ay^2 - 2(a-1)y + a - 1, f_1'(y) = 2ay - 2(a-1), f_1'(y)$在$[1, y_1]$上是增函数. $f'(1) = 2 \geqslant 0$，在$[1, y_1]$上是$f_1'(y) \geqslant 0$. 就是说$f_1(y)$在$[1, y_1]$上递增. 由于$f(1) = 1$，因此在$[1, y_1]$上，$f_1(y) \geqslant 0$. 所以当$C \leqslant \frac{2}{aM_1}, a \geqslant 1$时，就有

$$(Q_2^* X + Q_1^*) \geqslant 0.$$

下面只剩下证明$R_1^* |\mathrm{d}z|^4 + K^{-1}(M'X + M_1)\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}) \geqslant 0$. 其中$R_1^* = \frac{1}{2}R^*$，将$R_1^* |\mathrm{d}z|^4$改写成$(R_1^* + \varepsilon)|\mathrm{d}z|^4$，选择合适的$\varepsilon$，使得$R_1^* + \varepsilon \geqslant 0$以及$K^{-1}(M'X + M_1)\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}) - \varepsilon |\mathrm{d}z|^4 \geqslant 0$都成立就行. 由于$\mathrm{d}Z$为$q \times q$斜对称矩阵且不为零矩阵，因而存在酉方阵$U$[Lu3]，使得

$$\mathrm{d}Z = \begin{cases} U' \left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \lambda_v \\ -\lambda_v & 0 \end{pmatrix} \right] U, & q = 2v. \\ U' \left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \lambda_v \\ -\lambda_v & 0 \end{pmatrix} \oplus 0 \right] U, & q = 2v + 1. \end{cases} \tag{4.10.33}$$

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_v \geqslant 0, \lambda_1 > 0.$$

这里$A \oplus B$表示矩阵A和B的直和，即

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}'\mathrm{d}Z\,\mathrm{d}Z' = U' \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_v^4 \end{pmatrix} \overline{U}.$$

也就是

$$\operatorname{tr}(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z})=2(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_v^4)$$

由 $|\mathrm{d}z|^2=|\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z'|=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'})=(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_v^2)$ 可得：

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}z|^4&=(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_v^2)^2=(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_v^4)+2\sum\nolimits_{m<n}\lambda_m^2\lambda_n^2\\&\leqslant(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_v^4)+v(v-1)\lambda_1^4.\end{aligned}$$

继而得到：

$$\begin{aligned}&\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)\operatorname{tr}(\mathrm{d}Z\,\mathrm{d}Z'\mathrm{d}Z\,\mathrm{d}Z')-\varepsilon|\mathrm{d}z|^4\\&=\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_v^4)-\varepsilon(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_v^2)^2\\&\geqslant 2K^{-1}M_1(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_v^4)-\varepsilon(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_v^4+2\sum\nolimits_{m<n}\lambda_m^2\lambda_n^2)\\&=(2K^{-1}M_1-\varepsilon)(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_v^4)-2\varepsilon\sum\nolimits_{m<n}\lambda_m^2\lambda_n^2\\&\geqslant(2K^{-1}M_1-\varepsilon)(\lambda_2^4+\cdots+\lambda_v^4)+(2K^{-1}M_1-\varepsilon)\lambda_1^4-\varepsilon v(v-1)\lambda_1^4\\&\geqslant(2K^{-1}M_1-\varepsilon)(\lambda_2^4+\cdots+\lambda_v^4)+[2K^{-1}M_1-\varepsilon(v^2-v+1)]\lambda_1^4.\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\leqslant\min\left\{K^{-1}M_1,\frac{K^{-1}M_1}{v^2-v+1}\right\}=\frac{K^{-1}M_1}{v^2-v+1}$ 时，

$$\left(K^{-1}M'X+1+q+\frac{N}{K}\right)\operatorname{tr}(\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z})-\varepsilon|\mathrm{d}z|^4\geqslant 0.$$

取 $\varepsilon=\frac{K^{-1}M_1}{v^2-v+1}$，$G_*(X)=(1-X)^{-\lambda}$，$\lambda=aM_1$，这时

$$\begin{aligned}R_1^*+\varepsilon&=4K^{-2}[\lambda X(1-X)^{-2}+2\lambda(1-X)^{-1}]X\\&\quad-2CK^{-2}[\lambda X(1-X)^{-1}+M_1]^2+\varepsilon\\&=K^{-2}[2\lambda(2-C\lambda)y^2+4\lambda(C\lambda-1-CM_1)y\\&\quad-2C(M_1-\lambda)^2+\varepsilon K^2].\end{aligned}$$

令 $f(y)=2\lambda(2-C\lambda)y^2+4\lambda(C\lambda-1-CM_1)y-2C(M_1-\lambda)^2+\varepsilon K^2$，则 $f'(y)=4\lambda(2-C\lambda)y+4\lambda(C\lambda-1-CM_1)$. 若 $C\leqslant\frac{2}{\lambda}$，则 $f'(y)$ 在 $[1,\infty)$ 为增函数. 当 $C\leqslant\frac{1}{M_1}$ 时，$f'(1)=4\lambda(1-CM_1)\geqslant 0$，所以 $f'(y)\geqslant 0$. 因而 $f(y)$ 在 $[1,\infty)$ 为增函数. $f(1)=-2CM_1^2+\varepsilon K^2$，所以当 $C\leqslant\frac{\varepsilon K^2}{2M_1^2}=\frac{K}{2M_1(v^2-v+1)}$ 时，$f(y)\geqslant 0$. 即有 $R_1^*+\varepsilon\geqslant 0$

综上所述，当 $0<C\leqslant\min\left\{\frac{2}{aM_1},\frac{K}{2M_1(v^2-v+1)},\frac{1}{M_1}\right\}$，$a\geqslant 1$ 时，有

$$\omega_1[(z,w),d(z,w)]\geqslant 0.$$

这样就得到最后的结果，当 $0<C\leqslant\min\left\{\frac{2}{aM_1},\frac{K}{2M_1(v^2-v+1)},\frac{1}{M_1}\right\}$，$a\geqslant\max\left\{\frac{m_1}{M_1},\frac{m_2}{M_1},1\right\}$时，由上两节可知由

$$(1-X)^{-aM_1}\det(I+Z\bar{Z})^{-\left(1+q+\frac{N}{K}\right)}$$

生成的不变 Kahler 度量 V_G 是完备的，且 $V_G\geqslant B_{Y_{\mathrm{III}}}$，同时在度量 V_G 下的全纯截曲率有负上界 $-C$. 由[Hei]可知，存在 $C^*>0$，使得 $V_G\leqslant C^*E_{Y_{\mathrm{III}}}$，这里 $E_{Y_{\mathrm{III}}}$ 是第三类超 Cartan 域 Y_{III} 上的 Kobayashi 度量. 因而有

$$B_{Y_{\mathrm{III}}}\leqslant C^*E_{Y_{\mathrm{III}}}.$$

其中，$v=\left[\frac{q}{2}\right]$是$\frac{q}{2}$的整数部分，而 m_1,m_2 如(4.10.31)′所示. 这就证明了比较定理.

本节内容取自文献[YZx1,YZx2,YZx3].

Ⅺ. 超 Cartan 域上的度量比较定理(续)

众所周知，Bergman 度量，Carathéodory 度量和 Kobayashi 度量是三个经典的不变量. $\mathbf{C}^n$ 中有界域 D 上满足收缩性质的不变度量中，Kobayashi 度量 K_D 是最大的，Carathéodory 度量 C_D 是最小的. 陆启铿首先发现 Bergman 度量 B_D 不具有收缩性质，并证明了 $B_D\geqslant C_D$ 成立. 所以一个很自然的问题就是何时不等式 $B_D\leqslant cK_D$ 成立？这里 c 是正常数. 此不等式成立就称在域 D 成立 Bergman 度量与 Kobayashi 度量的比较定理. 但并不对所有的 D 都存在这种比较定理. K. Diederich K 和 J. E. Fornaess 在文献[DiF]中指出，在 $\mathbf{C}^3$ 中存在边界光滑的拟凸域 Ω，使得$\frac{B_\Omega}{K_\Omega}$是无界的. 因而对哪些域其 Bergman 度量和 Kobayashi 度量的比较定理成立就很值得研究. 这方面的成果很多. 这在上一节中已经指出. 现在我们证明了此定理对第一类超 Cartan 域也成立. 事实上，对其余的超 Cartan 域也成立，但我们在本书中就不赘述了.

Ⅺ.1. 度量方阵的显表达式

由[YW3]知，也可从本章的第Ⅰ节知，Y_{I} 的 Bergman 核函数是：

$$K_{Y_I} = K^{-mn} \prod^{mn+N} G(X)\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}.$$

其中 $G(X) = \sum_{j=0}^{mn+1} b_j \Gamma(N + j)(1 - X)^{-(N+j)}$，令

$$\begin{aligned}P(x) = &(x+1)[(x+1+Kn)(x+1+K(n-1))\cdots(x+1+K)][(x+1+K(n+1))\\&\cdot(x+1+Kn)\cdots(x+1+2K)][(x+1+K(n+2))(x+1+K(n+1))\cdots\\&\cdot(x+1+3K)]\cdots[(x+1+K(n+m-1))(x+1+K(n+m-2))\cdots\\&\cdot(x+1+mK)]\end{aligned}$$

而且 $b_0=0$，其余的 $b_j, j=0,1,\cdots,mn+1$ 由下列递推公式确定：

$$b_j = \left[P(-j-1) - \sum_{k=0}^{j-1} b_k(-1)^k\Gamma(j+1)/\Gamma(j-k+1)\right] /[(-1)^j\Gamma(j+1)].$$

令 z 是由 Z 中元素按行的次序排成的向量，即

$$z = (z_{11}, z_{12}, \cdots, z_{1n}, z_{21}, z_{22}, \cdots, z_{2n}, z_{m1}, z_{m2}, \cdots, z_{mn}).$$

若 $F \in \mathrm{Aut}(Y_I)$，记 J_F 为 F 的 Jacobi 矩阵，则

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial z^*}{\partial z} & \frac{\partial w^*}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial w^*}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

易知

$$\mathrm{d}Z^* = A\mathrm{d}Z(I - Z_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}D^{-1} + A(Z - Z_0)\mathrm{d}(I - Z_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}D^{-1},$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial w} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\det(I - Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2K}}\det(I - ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{K}}I,$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial z} = \frac{1}{K}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\det(I - Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2K}}\det(I - ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{K}}E(Z_0)'w.$$

其中

$E(Z_0) = (\mathrm{tr}[(I - ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1}I_{11}Z_0^{\mathrm{T}}], \mathrm{tr}[(I - ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1}I_{12}Z_0^{\mathrm{T}}], \cdots, \mathrm{tr}[(I - ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1}I_{mn}Z_0^{\mathrm{T}}])$ 为 $1 \times mn$ 矩阵．$I_{\alpha\beta}$ 为 $m \times n$ 矩阵，其第 α 行第 β 列交叉处元素为 1，其余元素均为 0．令

$$J = J_F|_{z_0=z} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix},$$

则有

$$J_{11} = \left.\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|_{z_0=z} = A' \times D^{\mathrm{T}},$$

$$J_{12} = \frac{1}{K}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{2K}}E(Z)'w,$$

$$J_{21}=0,\ J_{22}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2K}}I.$$

设 $T=T[(z,w),\overline{(z,w)}]$ 为域 Y_{I} 的 Bergman 度量方阵，则

$$T=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{I}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar z_{\sigma\tau}} & \dfrac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{I}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar w_q}\\ \dfrac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{I}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_p\partial\bar z_{\sigma\tau}} & \dfrac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{I}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_p\partial\bar w_q}\end{pmatrix},$$

$$1\leqslant\alpha,\sigma\leqslant m,1\leqslant\beta,\tau\leqslant n,1\leqslant p,q\leqslant N.$$

设

$$\ln G(X)=M,\frac{\partial\ln G(X)}{\partial X}=M',\frac{\partial^2\ln G(X)}{\partial X^2}=M''.$$

由于

$$\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha\beta}}\Big|_{z=0}=0,\ \frac{\partial X}{\partial\bar z_{\sigma\tau}}\Big|_{z=0}=0,$$

$$\frac{\partial^2X}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar z_{\sigma\tau}}\Big|_{z=0}=\frac{1}{K}X\mathrm{tr}[I_{\alpha\beta}I_{\tau\sigma}],\ \frac{\partial X}{\partial w_p}\Big|_{z=0}=\bar w_p,\ \frac{\partial X}{\partial\bar w_q}\Big|_{z=0}=w_q,$$

$$\frac{\partial^2X}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar w_q}\Big|_{z=0}=\frac{\partial^2X}{\partial w_p\partial\bar z_{\sigma\tau}}\Big|_{z=0}=0,\ \frac{\partial^2X}{\partial w_p\partial\bar w_q}\Big|_{z=0}=\delta_{pq},$$

$$\frac{\partial^2\ln\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar z_{\sigma\tau}}=-\mathrm{tr}(I_{\alpha\beta}I_{\tau\sigma})=-\delta_{\alpha\sigma}\cdot\delta_{\beta\tau},$$

$$\frac{\partial^2\ln\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar w_q}\Big|_{z=0}=\frac{\partial^2\ln\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})}{\partial w_p\partial\bar z_{\sigma\tau}}\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{\partial^2\ln\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})}{\partial w_p\partial\bar w_q}\Big|_{z=0}=0.$$

所以

$$\frac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{I}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar z_{\sigma\tau}}\Big|_{z=0}=\frac{1}{K}M'X+\left(m+n+\frac{N}{K}\right)\mathrm{tr}(I_{\alpha\beta}I_{\tau\sigma}),$$

$$\frac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{I}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\bar w_q}\Big|_{z=0}=\frac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{I}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_p\partial\bar z_{\sigma\tau}}\Big|_{z=0}=0,$$

$$\frac{\partial^2\ln K_{Y_{\mathrm{I}}}[(z,w),\overline{(z,w)}]}{\partial w_p\partial\bar w_q}\Big|_{z=0}=M''\bar w_pw_q+M'\delta_{pq}.$$

$$T=\begin{pmatrix}\left[\dfrac{1}{K}M'X+\left(m+n+\dfrac{N}{K}\right)\right]I & 0\\ 0 & M'I+M''\bar w'w\end{pmatrix}.$$

因为对于任意$(z_0,w)\in Y_{\mathrm{I}}(N,m,n,K)$，存在 $F\in\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{I}})$，使得

$F(z_0,w)=(0,w^*)$，则

$$T[(z,w),\overline{(z,w)}]=J_F|_{z_0=z}T[(z^*,w^*)\overline{(z^*,w^*)}]|_{z^*=0}\overline{J_F}'|_{z_0=z}$$

$$=J\begin{pmatrix}\frac{1}{K}M'X+\left(m+n+\frac{N}{K}I\right) & 0\\ 0 & M'I+M''\overline{w}'^*w^*\end{pmatrix}\bar{J}'.$$

我们得到 $T=\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$，这里

$$T_{11}=\left(K^{-1}M'X+m+n+\frac{N}{K}\right)(A'A\times D'D)$$
$$+K^{-2}(XM''+M')XE(Z)'\overline{E(Z)},$$

$$T_{12}=K^{-1}\det(I-ZZ^{T})^{-\frac{1}{K}}(XM''+M')E(Z)'w,\ T_{21}=\bar{T}_{12}',$$

$$T_{22}=M'\det(I-ZZ^{T})^{-\frac{1}{K}}I+\det(I-ZZ^{T})^{-\frac{2}{K}}M''\overline{w}'w.$$

对于符号×见[Lu3]

令 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]=G_*(X)\det(I-ZZ^{T})^{-\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}$，记 $M=\ln G_*(X)$，若其生成一个 Kähler 度量，则其度量方阵 T 和上面有相同形式.

Ⅺ.2. 全纯截曲率的显表达式

假设 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]=G_*(X)\det(I-ZZ^{T})^{-\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}$ 生成 $Y_{\rm I}$ 的一个不变 Kähler 度量，则度量方阵 T 与上节所述相同，它的全纯截曲率 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$ 有如下形式：

$$\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]=\frac{\mathrm{d}(z,w)[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T+\mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}]\overline{\mathrm{d}(z,w)}'}{[\mathrm{d}(z,w)T\overline{\mathrm{d}(z,w)}']^2}$$

全纯截曲率在全纯自同构变换下是不变的，对任意 $(z,w)\in Y_{\rm I}$，存在 $F\in\mathrm{Aut}(Y_{\rm I})$，使得 $F(z,w)=(0,w^*)$. 所以，只须计算 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$ 在 $(0,w^*)$ 点的值即可. 由于

$$\mathrm{d}T=\begin{pmatrix}\mathrm{d}T_{11} & \mathrm{d}T_{12}\\ \mathrm{d}T_{21} & \mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix},\ \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T=\begin{pmatrix}\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{11} & \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}\\ \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{21} & \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix}.$$

因为

$$T_{11}=\left(K^{-1}M'X+m+n+\frac{N}{K}\right)(A'A\times D'D)$$
$$+K^{-2}(XM''+M')XE(Z)'\overline{E(Z)},$$

所以

$$dT_{11} = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial T_{11}}{\partial z_{\alpha\beta}} dz_{\alpha\beta} + \sum_{p=1}^{N} \frac{\partial T_{11}}{\partial w_p} dw_p,$$

$$\bar{d}dT_{11} = \sum_{\alpha\beta=1}^{m,n}\sum_{\sigma\tau=1}^{m,n} \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \bar{z}_{\sigma\tau}} dz_{\alpha\beta}d\bar{z}_{\sigma\tau} + \sum_{p,q=1}^{N} \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial w_p \partial \bar{w}_q} dw_p d\bar{w}_q$$

$$+ \sum_{\alpha\beta=1}^{m,n}\sum_{q=1}^{N} \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z_{\alpha\beta}\partial \bar{w}_q} dz_{\alpha\beta}d\bar{w}_q + \sum_{p=1}^{N}\sum_{\sigma,\tau=1}^{m,n}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial w_p \partial \bar{z}_{\sigma\tau}} dw_p d\bar{z}_{\sigma\tau},$$

$$dT_{11}|_{z=0} = K^{-1}(XM''+M')\bar{w}dw'I.$$

$$\bar{d}dT_{11}|_{z=0} = K^{-2}X(XM''+M')|dz|^2 I + \left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)$$
$$(\overline{dZ}dZ'\times I + I\times\overline{dZ'}dZ) + K^{-2}(XM''+M')X\overline{dz'}dz$$
$$+ K^{-1}(XM'''+2M'')|w\overline{dw'}|^2 I$$
$$+ K^{-1}(XM''+M')|dw|^2 I.$$

其中

$$dZ = \begin{pmatrix} dz_{11} & dz_{12} & \cdots & dz_{1n} \\ dz_{21} & dz_{22} & \cdots & dz_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ dz_{m1} & dz_{m2} & \cdots & dz_{mn} \end{pmatrix},$$

由于

$$T_{12} = K^{-1}(XM''+M')\det(I-ZZ^{T})^{-\frac{1}{K}}E(Z)'w,$$

故

$$dT_{12}|_{z=0} = 0.$$
$$\bar{d}dT_{12}|_{z=0} = K^{-1}(XM'''+2M'')(\bar{w}dw')(dz'w)$$
$$+ K^{-1}(XM''+M')(dz'dw).$$

而

$$T_{21} = \overline{T}_{12}' = K^{-1}\det(I-ZZ^{T})^{-\frac{1}{K}}(XM''+M')\bar{w}'\overline{E(Z)},$$
$$dT_{21}|_{z=0} = K^{-1}(XM''+M')\overline{w'}dz.$$
$$\bar{d}dT_{21}|_{z=0} = K^{-1}(XM'''+2M'')(\bar{w}dw')(\bar{w}'dz)$$
$$+ K^{-1}(XM''+M')(\overline{dw'}dz).$$

由于

$$T_{22} = M'\det(I-ZZ^{T})^{-\frac{1}{K}}I + \det(I-ZZ^{T})^{-\frac{2}{K}}M''\bar{w}'w.$$

所以

$$dT_{22}|_{z=0} = M'''(\overline{w}dw')\overline{w}'w + M''\overline{w}dw'I + M''w'dw.$$

$$\begin{aligned}ddT_{22}|_{z=0} = {}& K^{-1}(XM''+M')|dz|^2 I + K^{-1}(XM'''+2M'')|dz|^2\,\overline{w}'w \\ &+ (M''I + M'''\overline{w}'w)|dw|^2 + M''dw'dw \\ &+ M^{(4)}\overline{w}'w|w\,\overline{dw}'|^2 + M'''[|w\,\overline{dw}'|^2 I \\ &+ (\overline{w}dw')(\overline{dw}'w) + (w\,\overline{dw}')(\overline{w}'dw)].\end{aligned}$$

由以上计算可得

$$dT|_{z=0} = \begin{pmatrix} K^{-1}(XM''+M')\overline{w}dw'I & 0 \\ K^{-1}(XM''+M')\,\overline{w}'dz & M'''(wdw')\,\overline{w}'w + M''(wdw'I + \overline{w}'dw) \end{pmatrix},$$

$$T|_{z=0} = \begin{pmatrix} \left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)I & 0 \\ 0 & M''\,\overline{w}'w + M'I \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}|_{z=0} = \begin{pmatrix} \left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)^{-1}I & 0 \\ 0 & (M')^{-1}(I - (M'+M''X)^{-1}\,\overline{w}'wM'') \end{pmatrix}.$$

令

$$-\bar{d}dT + dTT^{-1}\overline{dT}'|_{z=0} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned}R_{11} = {}& [K^{-2}(XM''+M')^2\left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)^{-1}I \\ &- K^{-1}(XM'''+2M'')I]|\overline{w}dw'|^2 - K^{-2}X(XM''+M')|dz|^2 I \\ &- K^{-1}(XM''+M')|dw|^2 I - K^{-2}(XM''+M')X\,\overline{dZ}'dZ \\ &- \left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)(\overline{dZ}dZ'\times I + I\times\overline{dZ}'dZ),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{12} = {}& [K^{-2}(XM''+M')^2\left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)^{-1} \\ &- K^{-1}(XM'''+2M'')]\overline{w}dw'\overline{dz}'w \\ &- K^{-1}(XM''+M')(\overline{dz}'dw),\end{aligned}$$

$$R_{21} = \overline{R_{12}'},$$

$$\begin{aligned}R_{22} = {}& (M')^{-1}[M'''(XM'''+4M'') - (XM''+M')^{-1}M''(XM''' \\ &+ 2M'')^2]|w\,\overline{dw}'|^2\,\overline{w}'w + [(M'')^2(M')^{-1} - M'''](wdw'I \\ &+ \overline{w}'dw)(\overline{dw}w'I + \overline{dw}'w) - K^{-1}(XM''+M')|dz|^2 I \\ &- M''|dw|^2 I + [K^{-2}(XM''+M')^2\left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)^{-1} \\ &- K^{-1}(XM'''+2M'')]|dz|^2\,\overline{w}'w - M''\overline{dw}'dw \\ &- M^{(4)}|w\,\overline{dw}'|^2\,\overline{w}'w.\end{aligned}$$

由于

$$(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)[-\bar{\partial}\mathrm{d}T+\mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}](\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)'|_{z=0}$$

$$=(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}\overline{(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)'}$$

$$=\mathrm{d}zR_{11}\overline{\mathrm{d}z'}+\mathrm{d}wR_{21}\overline{\mathrm{d}z'}+\mathrm{d}zR_{12}\overline{\mathrm{d}w'}+\mathrm{d}wR_{22}\overline{\mathrm{d}w'}.$$

经计算有

$$(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)[-\bar{\partial}\mathrm{d}T+\mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}]\overline{(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)'}|_{z=0}$$

$$=P_1|w\overline{\mathrm{d}w'}|^4+P_{12}|w\overline{\mathrm{d}w'}|^2|\mathrm{d}w|^2+P_2|\mathrm{d}w|^4$$

$$+Q_1|\mathrm{d}w|^2|\mathrm{d}z|^2+Q_2|w\overline{\mathrm{d}w'}|^2|\mathrm{d}z|^2+R|\mathrm{d}z|^4$$

$$-\left(K^{-1}M'X+m+n+\frac{N}{K}\right)\mathrm{d}z(\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z'\times I+I\times\overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z)\overline{\mathrm{d}z'}.$$

其中

$$P_1=(M')^{-1}[M''(XM''+4M')-(XM'+M')^{-1}M'(XM''+2M')^2]-M^{(4)},$$

$$P_{12}=4[(M'')^2(M')^{-1}-M'''],P_2=-2M'',Q_1=-4K^{-1}(XM''+M'),$$

$$Q_2=4\left[K^{-2}(XM''+M')^2\left(K^{-1}M'X+m+n+\frac{N}{K}\right)^{-1}-K^{-1}(XM''+M')\right],$$

$$R=-2K^{-2}(XM''+M')X.$$

经计算可得:

$$\mathrm{d}z(\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z'\times I+I\times\overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z)\overline{\mathrm{d}z'}=2\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z'}).$$

事实上,令

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}z(\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z'\times I),$$

将 $\mathrm{d}y$ 排成一个 (m,n) 的矩阵 $\mathrm{d}Y$,则 $\mathrm{d}Y=\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z$.所以

$$\mathrm{d}z(\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z'\times I)\overline{\mathrm{d}z'}=\mathrm{d}y\overline{\mathrm{d}z'}=\mathrm{tr}(\mathrm{d}Y\overline{\mathrm{d}Z'})=\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z'}).$$

同理

$$\mathrm{d}z(I\times\overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z)\overline{\mathrm{d}z'}=\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z'}).$$

这样就可以得到

$$\omega[(z,w)\mathrm{d}(z,w)]|_{z=0}=G_1/H_1.$$

这里

$$G_1=P_1|w\overline{\mathrm{d}w'}|^4+P_{12}|w\overline{\mathrm{d}w'}|^2|\mathrm{d}w|^2+P_2|\mathrm{d}w|^4+Q_1|\mathrm{d}w|^2|\mathrm{d}z|^2$$

$$+Q_2|w\overline{\mathrm{d}w'}|^2|\mathrm{d}z|^2+R|\mathrm{d}z|^4-2K^{-1}(M'X+M_1)\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z'}\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z'}),$$

$$H_1=[K^{-1}(M'X+M_1)|\mathrm{d}z|^2+M'|\mathrm{d}w|^2+M''|w\overline{\mathrm{d}w'}|^2]^2,$$

其中 $M_1=(m+n)K+N$.

XI.3. 过渡性度量的构造

假设 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]=H(X)\det(I-ZZ^{T})^{-\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}$ 生成一个不变 Kähler 度量，则它可以被写成如下的形式：

$$H(X)\det(I-ZZ^{T})^{-\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}=\frac{H(X)}{G(X)}G(X)\det(I-ZZ^{T})^{-\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}$$
$$=h(X)K_{Y_{I}}[(z,w),\overline{(z,w)}].$$

其中 $h(X)=\dfrac{H(X)}{G(X)}$，K_{Y_I} 是 $Y_I(N,m,n,K)$ 上的 Bergman 核．所以由 $K[(z,w),\overline{(z,w)}]$ 生成的度量方阵如下：

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^{2}\ln h(X)}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{z}_{\sigma\tau}} & \dfrac{\partial^{2}\ln h(X)}{\partial z_{\alpha\beta}\partial\overline{w}_{q}}\\ \dfrac{\partial^{2}\ln h(X)}{\partial w_{p}\partial\overline{z}_{\sigma\tau}} & \dfrac{\partial^{2}\ln h(X)}{\partial w_{p}\partial\overline{w}_{q}}\end{pmatrix}+T[(z,w),\overline{(z,w)}],$$

第一个方阵记为 T_h，通过计算可知：

$$T_{h}=J\begin{pmatrix}K^{-1}[\ln h(X)]'I & 0\\ 0 & [\ln h(X)]'I+[\ln h(X)]''\overline{w}'^{*}w^{*}\end{pmatrix}\overline{J}',$$

其中 J 和第一节中的 J 一样，$w^{*}=e^{i\theta}\det(I-ZZ^{T})^{-\frac{1}{2K}}w$．第二个方阵是 $Y_I(N,m,n;K)$ 的 Bergman 度量方阵，由[YZg6, YZg7]可知，$Y_I(N,m,n;K)$ 的 Bergman 度量是完备的．如果 $T_h\geqslant 0$，则由 $H(X)\det(I-ZZ^{T})^{-\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}$ 生成的 Kähler 度量是完备的并且不小于 $Y_I(N,m,n;K)$ 的 Bergman 度量 B_{Y_I}．

显然，$T_h\geqslant 0$ 的充要条件是 $[\ln h(X)]'\geqslant 0$，$[\ln h(X)]''>0$．

$$[\ln h(X)]'=\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)},\ [\ln h(X)]''=\left[\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)}\right]'$$

所以 $T_h\geqslant 0$ 充要条件是

$$\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)}\geqslant 0,\ \left[\frac{H'(X)}{H(X)}-\frac{G'(X)}{G(X)}\right]'\geqslant 0.$$

因此，如果 $h(X)$ 满足以上的条件，由 $H(X)\det(I-ZZ^{T})^{-\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}$ 生成的度量是完备的并且不小于 B_{Y_I}．

例如：令 $H(X)=(1-X)^{-\lambda}$，$\lambda\geqslant\max\{m_1,m_2\}$ 则由 $H(X)\det(I-ZZ^{T})^{-\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}$ 生成的不变 Kähler 度量完备且不小于 $Y_I(N,m,n;K)$ 的 Bergman 度量 B_{Y_I}．

其中

$$m_1 = \max\left\{\frac{G'(X)(1-X)}{G(X)}\right\},$$

$$m_2 = \max\left\{\frac{[G(X)G''(X) - G'(X)^2](1-X)^2}{G(X)^2}\right\}.$$

事实上,通过计算可知:

$$\frac{H'(X)}{H(X)} - \frac{G'(X)}{G(X)} = \frac{\lambda G(X)(1-X)^{-1} - G'(X)}{G(X)},$$

$$\left[\frac{H'(X)}{H(X)} - \frac{G'(X)}{G(X)}\right]' = \frac{\lambda(1-X)^{-2}G(X)^2 - G''(X)G(X) + G'(X)^2}{G(X)^2}.$$

因为 $0 \leqslant X < 1$ 时,$G(X) \geqslant 0$,所以 $T_h \geqslant 0$ 的充要条件是

$$\lambda G(X)(1-X)^{-1} - G'(X) \geqslant 0$$

$$\lambda(1-X)^{-2}G(X)^2 - G''(X)G(X) + G'(X)^2 \geqslant 0.$$

它等价于

$$\lambda \geqslant \max\left\{\frac{G'(X)(1-X)}{G(X)}\right\} = m_1,$$

$$\lambda \geqslant \max\left\{\frac{[G(X)G''(X) - G'(X)^2](1-X)^2}{G(X)^2}\right\} = m_2.$$

因为 $G'(X)$和 $G(X)(1-X)^{-1}$是$(1-X)^{-1}$的 $N+mn+1$ 阶的多项式,所以

$$\lim_{X\to 1}\frac{G'(X)(1-X)}{G(X)} = N + mn + 1.$$

因此 m_1 存在且有限.同理 m_2 存在且有限.因此当 $\lambda \geqslant \max\{m_1, m_2\}$时,

$$K_{Y_{\mathrm{I}}} = (1-X)^{-\lambda}\det(I - Z\bar{Z}')^{-\left(m+n+\frac{N}{K}\right)}$$

生成的不变度量是完备的且不小于 Y_{I} 的 Bergman 度量.

Ⅺ.4. 全纯截曲率的上界

我们把 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$写成如下的形式:

$$\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]|_{z=0}$$

$$= -C - \frac{\omega_1[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]}{\left[\left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)|\mathrm{d}z|^2 + M'|\mathrm{d}w|^2 + M''|w\,\overline{\mathrm{d}w}'|^2\right]^2},$$

其中

$$\omega_1[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$$

$$= P_{11}^*|w\,\overline{\mathrm{d}w}'|^4 + P_{12}^*|w\,\overline{\mathrm{d}w}'|^2|\mathrm{d}w|^2$$

$$+ P_2^* |dw|^4 + Q_1^* |dw|^2 |dz|^2 + Q_2^* |w \overline{dw'}|^2 |dz|^2$$

$$R^* |dz|^4 + 2\left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)\mathrm{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'}),$$

$$P_1^* = - P_1 - (CM'')^2 - \frac{M''}{M'}(XM'' + M')^{-1}(XM''' + 2M'')^2 + M^{(4)}$$

$$- \frac{M'''}{M'}(XM''' + 4M'') - (CM'')^2,$$

$$P_{12}^* = - P_{12} - 2CM''M' - 4M''' - 4\frac{(M'')^2}{M'} - 2CM'M'',$$

$$P_2^* = - P_2 - C(M')^2 - 2M'' - C(M')^2,$$

$$Q_1^* = - Q_1 - 2CK^{-1}(M'X + M_1)M'$$

$$= 4K^{-1}(XM'' + M') - 2CK^{-1}(M'X + M_1)M',$$

$$Q_2^* = - Q_2 - 2CK^{-1}(M'X + M_1)M''$$

$$- 4K^{-1}[(XM''' + 2M'') - (XM'' + M')^2(M'X + M_1)^{-1}]$$

$$- 2CK^{-1}(M'X + M_1)M'',$$

$$R^* = 2K^{-2}(XM' + M')X - CK^{-2}(XM' + M_1)^2.$$

$C>0$ 且为常数,其中 $M_1 = (m+n)K + N$. 如果证明 $\omega_1[(z,w),d(z,w)]\geqslant 0$,则

$$\omega[(z,w),d(z,w)]\leqslant -C.$$

令 $G_*(X) = (1 - X)^{-\lambda}$,其中 $\lambda > 0$, $\lambda \geqslant \{m_1, m_2\}$,则由于 $M = \ln G_*(X)$,所以

$$M' = \lambda(1-X)^{-1}, M'' = \lambda(1-X)^{-2},$$

$$M''' = 2\lambda(1-X)^{-3}, M^{(4)} = 6\lambda(1-X)^{-4}.$$

将以上各式代入 $P_1^*, \cdots, R^*$ 并且令 $\lambda = aM_1$,我们有以下的结果:

$$P_1^* = (1-X)^{-1}[aM_1(1-X)^{-2}]^{-1}[aM_1(1-X)^{-3}]^2$$

$$+ 6aM_1(1-X)^{-4} - 2(1-X)^{-2}[2aM_1(1-X)^{-3}$$

$$+ 2aM_1(1-X)^{-2}] - C(aM_1)^2(1-X)^{-4}$$

$$= aM_1(1-X)^{-4}(2 - C\,aM_1).$$

如果 $C\leqslant\frac{2}{aM_1}$,则 $P_1^*\geqslant 0$.

$$P_{12}^* = 8aM_1(1-X)^{-3} - 4aM_1(1-X)^{-3} - 2C\,a^2M_1^2(1-X)^{-3}$$

$$= 2aM_1(1-X)^{-3}(2 - C\,aM_1),$$

如果 $C\leqslant\frac{2}{aM_1}$,则 $P_{12}^*\geqslant 0$.

$$
\begin{aligned}
P_2^* &= 2aM_1(1-X)^{-2} - C(aM_1)^2(1-X)^{-2} \\
&= aM_1(1-X)^{-2}(2 - CaM_1),
\end{aligned}
$$

如果 $C \leqslant \frac{2}{aM_1}$，则 $P_2^* \geqslant 0$.

$$
\begin{aligned}
Q_1^* &= 4K^{-1}[XaM_1(1-X)^{-2} + aM_1(1-X)^{-1}] \\
&\quad - 2CK^{-1}[XaM_1(1-X)^{-1} + M_1]aM_1(1-X)^{-1} \\
&= 2K^{-1}aM_1(1-X)^{-1}[(2 - CaM_1)(1-X)^{-1} \\
&\quad - CM_1(1-a)].
\end{aligned}
$$

令 $y = (1-X)^{-1}$，则当 $X \in [0,1)$，就有 $y \in [1,\infty)$. 令

$$
f(y) = (2 - CaM_1)y - CM_1(1-a),
$$

如果 $C \leqslant \frac{2}{aM_1}$，$f(y)$ 是增函数，它在 $[1,\infty)$ 上最小值是 $f(1)$. 但是 $f(1) = 2 - CM_1$. 如果 $a \geqslant 1$，则 $f(1) \geqslant 0$，因此在 $[1,\infty)$ 上 $f(y) \geqslant 0$. 但是 $Q_1^* = 2K^{-1}aM_1 y f(y)$，就有 $Q_1^* \geqslant 0$，当 $a \geqslant 1$，$C \leqslant \frac{2}{aM_1}$.

$$
\begin{aligned}
Q_2^* &= 2K^{-1}(XW' + M_1)^{-1}(1-X)^{-2}aM_1^2\{(1-X)^{-2}[2a \\
&\quad - Ca^2M_1] + (1-X)^{-1}[4(1-a) - 2CaM_1(1-a)] \\
&\quad - C(1-a)^2M_1\}.
\end{aligned}
$$

令 $y = (1-X)^{-1}$，则 $y \in [1,\infty)$.

令

$$
f(y) = (2a - Ca^2M_1)y^2 + 2(1-a)(2 - CaM_1)y - C(1-a)^2M_1,
$$

则

$$
f'(y) = 2(2a - Ca^2M_1)y + 2(1-a)(2 - CaM_1).
$$

令 $y_0 = 1 - \frac{1}{a}$，则 $f'(y_0) = 0$. 如果 $C \leqslant \frac{2}{aM_1}$，则 $f(y)$ 有一个最小值 $f(y_0) = -2a^{-1}(a-1)^2 \leqslant 0$. $f(y)$ 有两个根：y_1, y_2. 所以当 $y \in [y_0, y_1]$，有 $f(y) \leqslant 0$. 但是如果 $y \in [y_1, \infty)$，则 $f(y) \geqslant 0$（当 $C \leqslant 2(aM_1)^{-1}$，$a \geqslant 1$）. 因此 $Q_2^* \geqslant 0$，当 $y = (1-X)^{-1} \in [y_1, \infty)$，$C \leqslant 2(aM_1)^{-1}$，$a \geqslant 1$. $Q_2^* \leqslant 0$，当 $y = (1-X)^{-1} \in [y_0, y_1]$，$C \leqslant 2(aM_1)^{-1}$，$a \geqslant 1$.

所以我们只考虑 $y = (1-X)^{-1} \in [y_0, y_1]$ 的情况. 因为 $X \geqslant 0$，所以只考虑 $y = (1-X)^{-1} \in [1, y_1]$. 根据 Schwarz 不等式，可知

$$
Q_2^* |dz|^2 |w \overline{dw'}|^2 \geqslant Q_2^* |dz|^2 |dw|^2 |w|^2, \quad y \in [1, y_1),
$$

因此，如果 $(1-X)^{-1} \in [1, y_1]$，我们就有

$$
Q_2^* |dz|^2 |w \overline{dw'}|^2 + Q_1^* |dz|^2 |dw|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant Q_2^* |dz|^2 |dw|^2 |w|^2 + Q_1^* |dz|^2 |dw|^2 \\
&= Q_2^* X |dz|^2 |dw|^2 + Q_1^* |dz|^2 |dw|^2 \\
&= (Q_2^* X + Q_1^*) |dz|^2 |dw|^2 .
\end{aligned}
$$

$$
Q_2^* X + Q_1^* = 4K^{-1}(XM' + M_1)^{-1}(1-X)^{-2} a M_1
$$

$$
\cdot \left\{ \frac{2 - C aM_1}{2} [a(1-X)^{-2} - 2(a-1)(1-X)^{-1} + a - 1] + \frac{a-1}{2} CM_1 \right\}.
$$

令 $y=(1-X)^{-1}$，则 $y\in[1,\infty)$，令 $f_1(y)=ay^2-2(a-1)y+a-1$，则 $f_1'(y)=2ay-2(a-1)$，而 $f_1'(y)$在$[1,y_1]$上是增函数. 由于 $f'(1)=2\geqslant 0$，故在$[1,y_1]$上有 $f_1'(y)\geqslant 0$. 就是说 $f_1(y)$在$[1,y_1]$上递增. 由于 $f(1)=1$，因此在$[1,y_1]$上，$f_1(y)\geqslant 0$. 所以当 $C\leqslant \frac{2}{aM_1}$，$a\geqslant 1$ 时，就有

$$
(Q_2^* X + Q_1^*) \geqslant 0.
$$

下面只剩下证明 $R^* |dz|^4 + 2K^{-1}(M'X + M_1)\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'})\geqslant 0$. 将 $R^*|dz|^4$ 改写成$(R^*+\varepsilon)|dz|^4$，选择合适的 ε，使得 $R^*+\varepsilon\geqslant 0$ 以及 $2K^{-1}(M'X+M_1)\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'})-\varepsilon|dz|^4\geqslant 0$ 都成立就行. 由于 dZ 为 $m\times n$ 矩阵且不为零矩阵，因而存在酉方阵 U 与 V，使得

$$
dZ = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m & 0 \end{pmatrix}\overline{V}', \lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\lambda_m\geqslant 0, \lambda_1>0.
$$

则

$$
dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'} = U\begin{pmatrix} \lambda_1^4 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^4 \end{pmatrix}\overline{U}'.
$$

也就是

$$
\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'}) = \lambda_1^4 + \cdots + \lambda_m^4
$$

由$|dz|^2 = |dz\,\overline{dz'}| = \operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ'}) = (\lambda_1^2+\cdots+\lambda_m^2)$可得：

$$
\begin{aligned}
|dz|^4 &= (\lambda_1^2+\cdots+\lambda_m^2)^2 = (\lambda_1^4+\cdots+\lambda_m^4) + 2\sum_{p<q}\lambda_p^2\lambda_q^2 \\
&\leqslant (\lambda_1^4+\cdots+\lambda_m^4) + m(m-1)\lambda_1^4.
\end{aligned}
$$

继而得到：

$$
\begin{aligned}
&2\left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'}) - \varepsilon|dz|^4 \\
&= 2\left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_m^4) - \varepsilon(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_m^2)^2 \\
&\geqslant 2K^{-1}M_1(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_m^4) - \varepsilon(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_m^4 + 2\sum_{p<q}\lambda_p^2\lambda_q^2)
\end{aligned}
$$

$$= (2K^{-1}M_1 - \varepsilon)(\lambda_1^4 + \cdots + \lambda_m^4) - 2\varepsilon \sum\nolimits_{p<q}\lambda_p^2\lambda_q^2$$
$$\geqslant (2K^{-1}M_1 - \varepsilon)(\lambda_2^4 + \cdots + \lambda_m^4) + (2K^{-1}M_1 - \varepsilon)\lambda_1^4 - \varepsilon m(m-1)\lambda_1^4$$
$$\geqslant (2K^{-1}M_1 - \varepsilon)(\lambda_2^4 + \cdots + \lambda_m^4) + [2K^{-1}M_1 - \varepsilon(m^2 - m + 1)]\lambda_1^4.$$

当 $\varepsilon \leqslant \min\left\{2K^{-1}M_1, \frac{2K^{-1}M_1}{m^2 - m + 1}\right\} = \frac{2K^{-1}M_1}{m^2 - m + 1}$ 时，

$$2\left(K^{-1}M'X + m + n + \frac{N}{K}\right)\operatorname{tr}(\mathrm{d}Z\,\mathrm{d}Z'\mathrm{d}Z\,\overline{\mathrm{d}Z'}) - \varepsilon|\mathrm{d}z|^4 \geqslant 0.$$

取 $\varepsilon = \frac{2K^{-1}M_1}{m^2 - m + 1}$，$G_*(X) = (1 - X)^{-\lambda}$，$\lambda = aM_1$，这时

$$\begin{aligned} R^* + \varepsilon &= 2K^{-2}[\lambda X(1 - X)^{-2} + \lambda(1 - X)^{-1}]X \\ &\quad - CK^{-2}[\lambda X(1 - X)^{-1} + M_1]^2 + \varepsilon \\ &= K^{-2}[\lambda(2 - C\lambda)y^2 + 2\lambda(C\lambda - 1 - CM_1)y \\ &\quad - C(M_1 - \lambda)^2 + \varepsilon K^2]. \end{aligned}$$

令 $f(y) = \lambda(2 - C\lambda)y^2 + 2\lambda(C\lambda - 1 - CM_1)y - C(M_1 - \lambda)^2 + \varepsilon K^2$，则 $f'(y) = 2\lambda(2 - C\lambda)y + 2\lambda(C\lambda - 1 - CM_1)$. 若 $C \leqslant \frac{2}{\lambda}$，则 $f'(y)$ 在 $[1, \infty)$ 为增函数. 当 $C \leqslant \frac{1}{M_1}$ 时，$f'(1) = 2\lambda(1 - CM_1) \geqslant 0$，所以 $f'(y) \geqslant 0$，因而 $f(y)$ 在 $[1, \infty)$ 为增函数. $f(1) = -CM_1^2 + \varepsilon K^2$，所以当 $C \leqslant \frac{\varepsilon K^2}{M_1^2} = \frac{2K}{M_1(m^2 - m + 1)}$ 时，$f(y) \geqslant 0$. 即有 $R^* + \varepsilon \geqslant 0$.

综上所述，当 $0 < C \leqslant \min\left\{\frac{2}{aM_1}, \frac{2K}{M_1(m^2 - m + 1)}, \frac{1}{M_1}\right\}$，$a \geqslant 1$ 时，有 $\omega_1[(z, w), \mathrm{d}(z, w)] \geqslant 0$，从而 $\omega[(z, w), \mathrm{d}(z, w)] < -C$.

Ⅺ.5. 比较定理的最后证明

当 $0 < C \leqslant \min\left\{\frac{2}{aM_1}, \frac{2K}{M_1(m^2 - m + 1)}, \frac{1}{M_1}\right\}$，$a \geqslant \max\left\{\frac{m_1}{M_1}, \frac{m_2}{M_1}, 1\right\}$ 时，由上两节可知由

$$(1 - X)^{-aM_1}\det(I - ZZ^{\top})^{-\left(m + n + \frac{N}{K}\right)}$$

生成不变 Kahler 度量 V_G 是完备的，且 $V_G \geqslant B_{Y_{\mathrm{I}}}$，同时在度量 V_G 下的全纯截曲率有负上界 $-C$. 由[Hei]可知，存在 $C^* > 0$ 使得 $V_G \leqslant C^* E_{Y_{\mathrm{I}}}$，这里 $E_{Y_{\mathrm{I}}}$ 是第一类超 Cartan 域 Y_{I} 上的 Kobayashi 度量. 因而有

$$B_{Y_{\rm I}} \leqslant C^* E_{Y_{\rm I}}.$$

这就证明了比较定理.本节内容取自文献[YWZx,YWZx1,YWZx2].

Ⅻ. 超 Cartan 域的 Einstein-Kähler 度量

我们给出了第1类超 Cartan 域的 Einstein-Kähler 度量生成函数的隐函数表达式;给出了第1类超 Cartan 域的全纯截曲率及其估计,并由此对 $K > \frac{mn-1}{m+n}$ 时的第1类超 Cartan 域给出了 Einstein-Kahler 度量和 Kobayashi 度量的比较定理;对一种特殊的超 Cartan 域给出了其完备的 Einstein-Kähler 度量的显表达式,这在非齐性域中还是首次得到.

S.Y.Cheng 和 S.T.Yau 在[ChY]中证明 $\mathbf{C}^n$ 中的任一具有 C^2 边界的有界拟凸域 Ω,具有惟一的完备的 Einstein-Kähler 度量。设该度量为

$$ds^2 = \sum \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} dz_i d\overline{z}_j,$$

则 g 是 Monge-Ampère 方程的下列 Dirichlet 边值问题的惟一解:

$$\begin{cases} \det\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) = e^{(n+1)g}, & z \in \Omega \\ g = \infty. & z \in \partial\Omega \end{cases}$$

N.Mok 和 S.T.Yau 在文[MoY]中又将这一结果推广到任意有界拟凸域。这里 g 称为域 Ω 的 Einstein-Kähler 度量的生成函数.J.S.Bland 在[Bld]中对一类 Reinhardt 域 $\{|z|^2 + |w|^{2p} < 1\}$ 给出了其 Einstein-Kahler 度量生成函数的隐函数表达式.

本文考虑殷慰萍与 Roos 引入,在[YW1,YW3,YW6,YW7,GY,YWZx2]中研究的超 Cartan 域,其形式如下:

$$Y_{\rm I}(N_1, m, n; K) := \{W \in \mathbf{C}^{N_1}, Z \in R_{\rm I}(m,n): |W|^{2K} < \det(I - Z\overline{Z}^{\rm T}), K > 0\}$$

$$Y_{\rm II}(N_2, p; K) := \{W \in \mathbf{C}^{N_2}, Z \in R_{\rm II}(p): |W|^{2K} < \det(I - Z\overline{Z}^{\rm T}), K > 0\}$$

$$Y_{\rm III}(N_3, q; K) := \{W \in \mathbf{C}^{N_3}, Z \in R_{\rm III}(q): |W|^{2K} < \det(I - Z\overline{Z}^{\rm T}), K > 0\}$$

$$Y_{\rm IV}(N_4, n; K) := \{W \in \mathbf{C}^{N_4}, Z \in R_{\rm IV}(n): |W|^{2K} < 1 - 2Z\overline{Z}^{\rm T} + |ZZ'|^2, K > 0\}$$

其中 $R_{\rm I}(m,n)$,$R_{\rm II}(p)$,$R_{\rm III}(q)$ 和 $R_{\rm IV}(n)$ 分别表示华罗庚意义下的4

类 Cartan 域，$\bar{Z}^{T}$ 表示 Z 的共轭转置，det 表示行列式，N_1, N_2, N_3, N_4，m, n, p, q 为自然数．文献[YW1, YW3, YW6, YW7, GY]已经求出了这些域的 Bergman 核函数，并易知这些域的 Bergman 核函数是穷竭的，因而上述这些域均为拟凸域．

我们利用超 Cartan 域的全纯自同构群，以及一些全纯不变量，将 Monge-Ampère 方程化为一常微分方程．由方程的隐式解可构造出生成函数 g．从而得到超 Cartan 域的 Einstein-Kähler 度量．若在 $Y_{\mathrm{I}}(N_1, m, n; K)$ 中取 $N_1 = 1, m = 1, K = p$，则 Y_{I} 为 Reinhardt 域$\{|z|^2 + |w|^{2p} < 1\}$，所以文[Bld]是我们的特例．

首先给出我们需要的已知事实，然后将 Monge-Ampère方程为常微分方程，并给出详细推导过程，接着给出第 1 类超 Cartan 域在 Einstein-Kähler 度量下的全纯截曲率及其估计并对一类特殊的超 Curtan 域给出 Einstein-Kähler 度量和 Kobayashi 度量的比较定理，最后为例子同时对一种特殊的超 Cartan 域给出了其完备的 Einstein-Kähler 度量的显表达式，这在非齐性域中还是首次得到．

Ⅻ.1．准 备 知 识

下面我们考虑 $N_1 = 1$ 时的第一类超 Cartan 域并记为 Y_{I}．

引理 1． 下列变换组成 Y_{I} 的全纯自同构群。记为 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{I}})$：

$$\begin{cases} w^* = e^{i\theta_0} w \det(I - Z_0\bar{Z}_0^{T})^{\frac{1}{2K}} \det(I - Z\bar{Z}_0^{T})^{-\frac{1}{K}}; \\ Z^* = A(Z - Z_0)(I - \bar{Z}_0^{T}Z)^{-1}D^{-1}. \end{cases}$$

其中 $\bar{A}^{T}A = (I - Z_0\bar{Z}_0^{T})^{-1}$，$\bar{D}^{T}D = (I - \bar{Z}_0^{T}Z_0)^{-1}$，$Z_0$、$Z \in R_{\mathrm{I}}(m, n)$，$\theta_0 \in \mathbf{R}$．

证：见[YW3]．

引理 2． 令 $X = X(z, w) = |w|^2[\det(I - Z\bar{Z}^{T})]^{-\frac{1}{K}}$，则 X 在 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{I}})$下不变．即 $X(z^*, w^*) = X(z, w)$．

证：见[YW3]．

引理 3． 设 $\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{I}})$为第 1 类超 Cartan 域 Y_{I} 的全纯自同构群．$F(z, w; z_0, \theta_0) \in \mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{I}})$，$J_F$ 为 $F(z, w; z_0, \theta_0)$的 Jacobi 矩阵，则

$$J_F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z^*}{\partial z} & \dfrac{\partial w^*}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{\partial w^*}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

其中 z 表示由 Z 的元素排成的行向量. 即若 $Z=(z_{jk})_{m\times n}\in R_{\mathrm{I}}(m,n)$, 则 $z=(z_{11},\cdots,z_{1n},z_{21},\cdots,z_{2n},\cdots,z_{m1},\cdots,z_{mn})$.

我们有

$$\frac{\partial z^*}{\partial z}=[A(I+(Z-Z_0)(I-Z_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}Z_0^{\mathrm{T}})]'\times[(I-Z_0^{\mathrm{T}}Z)^{-1}D^{-1}],$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial z}=\frac{1}{K}e^{i\theta}\det(I-Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2K}}\det(I-ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{K}}E(Z_0)'w,$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial w}=e^{i\theta}\det(I-Z_0Z_0^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2K}}\det(I-ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{K}},$$

其中 $E(Z_0)=(\mathrm{tr}[(I-ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1}I_{11}Z_0^{\mathrm{T}}],\mathrm{tr}[(I-ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1}I_{12}Z_0^{\mathrm{T}}],\cdots,\mathrm{tr}[(I-ZZ_0^{\mathrm{T}})^{-1}I_{mn}Z_0^{\mathrm{T}}])$ 为 $1\times mn$ 矩阵. I_{pq} 为 $m\times n$ 矩阵, 其第 p 行第 q 列交叉处元素为 1, 其余元素均为 0. 对于符号 $\times$ 见[Lu2]. 且若记 $|J_F|^2=\det J_F\cdot\overline{\det J_F}$, 则 $|J_F|^2_{z_0=z}=\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-\left(m+n+\frac{1}{K}\right)}$.

证: 见[YWZx2], [YW3].

引理 4. 设 B 为一 $m\times n$ 矩阵, 则有

$$\mathrm{tr}(BB'BB')\leqslant\mathrm{tr}(BB')\mathrm{tr}(B\bar{B}')\leqslant(m^2-m+1)\mathrm{tr}(B\bar{B}'B\bar{B}')$$

证: 若 B 为非零矩阵, 则存在酉方阵 U 和 V, 使得

$$B=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_m & 0\end{pmatrix}\bar{V}',\ \lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\lambda_m\geqslant0,\ \lambda_1\geqslant0,$$

则 $\mathrm{tr}(B\bar{B}'B\bar{B}')=\lambda_1^4+\lambda_2^4+\cdots+\lambda_m^4$, $\mathrm{tr}(B\bar{B}')=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_m^2$. 由

$$\begin{aligned}\lambda_1^4+\cdots+\lambda_m^4&\leqslant(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_m^2)^2\leqslant\lambda_1^4+\cdots+\lambda_m^4+m(m-1)\lambda_1^4\\&\leqslant(m^2-m+1)(\lambda_1^4+\cdots+\lambda_m^4)\end{aligned}$$

得证.

Ⅺ.2. 化 Monge-Ampere 方程为常微分方程

我们考虑的第 I 类超 Cartan 域 Y_{I} 有如下表示式

$$Y_{\mathrm{I}}=\{w\in\mathbf{C},Z\in R_{\mathrm{I}}(m,n):|w|^{2K}<\det(I-ZZ^{\mathrm{T}}),K>0\}.$$

若 $Z=(z_{jk})_{m\times n}\in R_{\mathrm{I}}(m,n)$,

记 $$\begin{aligned}(z,w)&=(z_{11},\cdots,z_{1n},z_{21},\cdots,z_{2n},\cdots,z_{m1},\cdots,z_{mn},w)\\&=(z_1,z_2,\cdots,z_N),\end{aligned}$$

其中 $N=mn+1$. 又记

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(z,w)=\frac{\partial^2 g}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta},\ \alpha,\beta=1,2,\cdots,N.$$

其中

$$\frac{\partial g}{\partial z_N}=\frac{\partial g}{\partial w}.$$

设 g 生成 Y_{I} 的完备的 Einstein-Kähler 度量,则 g 满足 Monge-Ampère 方程的如下边值问题:

$$\begin{cases}\det(g_{\alpha\bar{\beta}}(z,w))=\mathrm{e}^{(N+1)g(z,w)}, & (z,w)\in Y_{\mathrm{I}}\\ g=\infty, & (z,w)\in\partial Y_{\mathrm{I}}\end{cases}\tag{4.12.1}$$

设 $F:(z,w)\mapsto(z^*,w^*),\ F=F(z,w;z_0,\theta_0)\in\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{I}})$.

由度量的不变性,易知 $\det(g_{\alpha\bar{\beta}}(z,w))=|J_F|^2\det(g_{\alpha\bar{\beta}}(z^*,w^*))$.

所以

$$\mathrm{e}^{(N+1)g(z,w)}=|J_F|^2\mathrm{e}^{(N+1)g(z^*,w^*)}.$$

由此得到

$$\mathrm{e}^{-g(z^*,w^*)}=|J_F|^{\frac{2}{N+1}}\mathrm{e}^{-g(z,w)}.$$

对任意给定的$(z,w)\in Y_{\mathrm{I}}$,特别地,取 $z_0=z,\theta_0=-\mathrm{Arg}\ w$,

即令 $F_0=F(z,w;z,-\mathrm{Arg}\ w)$,则有

$$\mathrm{e}^{-g(0,w^*)}=|J_{F_0}|^{\frac{2}{N+1}}\mathrm{e}^{-g(z,w)}=\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-\frac{(m+n+1/K)}{N+1}}\mathrm{e}^{-g(z,w)}.$$

这时 $w^*=X^{\frac{1}{2}}$.

记 $\lambda=K(m+n)+1$,则 $|J_F|^2_{Z_0=Z}=X^{\lambda}|w|^{-2\lambda}$.

令 $h(X)=\mathrm{e}^{-g(0,X^{\frac{1}{2}})}=\mathrm{e}^{-g(0,w^*)}$,即

$$h(X)=\mathrm{e}^{-g(0,w^*)}=|J_{F_0}|^{\frac{2}{N+1}}\mathrm{e}^{-g(z,w)}=X^{\frac{\lambda}{N+1}}|w|^{-2\frac{\lambda}{N+1}}\mathrm{e}^{-g(z,w)}.$$

则

$$\frac{\partial h}{\partial w}=h'(X)\frac{\partial X}{\partial w}=|J_F|^{\frac{2}{N+1}}\mathrm{e}^{-g(z,w)}\frac{\partial(-g)}{\partial w}.$$

又因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial w}&=\frac{X}{w},\\ \frac{\partial X}{\partial \bar{w}}&=\frac{X}{\bar{w}}.\end{aligned}\tag{4.12.2}$$

注:为简单起见,记

$$\frac{X}{w}=\begin{cases}\bar{w}\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-1/K}, & w\neq 0,\\ 0, & w=0.\end{cases}$$

所以

$$\frac{\partial g}{\partial w}=-\frac{X}{w}\cdot\frac{h'(X)}{h(X)}.$$

又由 $h(X)=X^{\frac{\lambda}{N+1}}|w|^{-2\frac{\lambda}{N+1}}e^{-g(z,w)}$有

$$\frac{\partial h}{\partial z_\alpha}=h'(X)\frac{\partial X}{\partial z_\alpha}=-h(X)\frac{\partial g}{\partial z_\alpha}+\frac{\lambda}{N+1}X^{-1}\frac{\partial X}{\partial z_\alpha}h(X).$$

其中 $\alpha=1,2,\cdots,N-1$.

整理得

$$\frac{\partial g}{\partial z_\alpha}=\left(\frac{\lambda}{N+1}X^{-1}-\frac{h'(X)}{h(X)}\right)\frac{\partial X}{\partial z_\alpha}.$$

令

$$Y(X)=\frac{\lambda}{N+1}-X\frac{h'(X)}{h(X)},\tag{4.12.3}$$

则

$$\frac{\partial g}{\partial z_\alpha}=YX^{-1}\frac{\partial X}{\partial z_\alpha},\ \alpha=1,2,\cdots,N-1,$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}=\left(Y-\frac{\lambda}{N+1}\right)\frac{1}{w}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\overline{w}}&=Y'\frac{X}{|w|^2},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\overline{z}_\beta}&=\frac{1}{w}Y'\frac{\partial X}{\partial\overline{z}_\beta},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial z_\alpha\partial\overline{w}}&=Y'X^{-1}\frac{\partial X}{\partial\overline{w}}\cdot\frac{\partial X}{\partial z_\alpha}+YX^{-1}\frac{\partial^2 X}{\partial z_\alpha\partial\overline{w}}\\
&\quad-YX^{-2}\frac{\partial X}{\partial\overline{w}}\cdot\frac{\partial X}{\partial z_\alpha},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial z_\alpha\partial\overline{z}_\beta}&=Y'X^{-1}\frac{\partial X}{\partial\overline{z}_\beta}\cdot\frac{\partial X}{\partial z_\alpha}+YX^{-1}\frac{\partial^2 X}{\partial z_\alpha\partial\overline{z}_\beta}\\
&\quad-YX^{-2}\frac{\partial X}{\partial\overline{z}_\beta}\cdot\frac{\partial X}{\partial z_\alpha}.
\end{aligned}\tag{4.12.4}$$

其中 $\alpha,\beta=1,2,\cdots,N-1$.

又

$$\frac{\partial X}{\partial z_{pq}}=\frac{1}{K}X\,\mathrm{tr}[(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-1}I_{pq}Z^{\mathrm{T}}],$$

$$\frac{\partial X}{\partial \bar{z}_{st}} = \frac{1}{K} X \operatorname{tr}[(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-1} Z I_{st}'].\tag{4.12.5}$$

其中 I_{pq}、I_{st}分别为第 p 行、第 q 列,第 s 行、第 t 列交叉处为 1,其余为 0 的 $m \times n$ 矩阵,I_{st}'为 I_{st}的转置.由(4.12.2)式和(4.12.5)式可得

$$\left.\frac{\partial X}{\partial w}\right|_{z=0} = \bar{w}, \qquad \left.\frac{\partial X}{\partial \bar{w}}\right|_{z=0} = w,$$

$$\left.\frac{\partial X}{\partial z_{\alpha}}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial X}{\partial z_{pq}}\right|_{z=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial X}{\partial \bar{z}_{\beta}}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial X}{\partial \bar{z}_{st}}\right|_{z=0} = 0.\tag{4.12.6}$$

其中 $\alpha = n(p-1)+q, \beta = n(s-1)+t$.

又由(4.12.5)式可得

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z_{pq} \bar{z}_{st}} = \frac{1}{K}\frac{\partial X}{\partial z_{st}} \operatorname{tr}[(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-1} I_{pq} Z^{\mathrm{T}}] + \frac{X}{K}\operatorname{tr}[(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-1} I_{pq} I_{st}']$$
$$+ \frac{X}{K}\operatorname{tr}[(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-1} Z I_{st}' (I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-1} I_{pq} Z^{\mathrm{T}}].\tag{4.12.7}$$

由(4.12.2),(4.12.5),(4.12.6),(4.12.7)式,经计算可得

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^2 X}{\partial z_{pq} \bar{z}_{st}}\right|_{z=0} = \frac{X}{K}\delta_{ps}\delta_{qt}, \\ &\left.\frac{\partial^2 X}{\partial z_{pq} w}\right|_{z=0} = 0, \\ &\left.\frac{\partial^2 X}{\partial w \bar{z}_{st}}\right|_{z=0} = 0. \end{aligned}\tag{4.12.8}$$

其中

$$\delta_{ps} = \begin{cases} 1, & p = s, \\ 0, & p \neq s. \end{cases} \qquad \delta_{qt} = \begin{cases} 1, & q = t, \\ 0, & q \neq t. \end{cases}$$

将上述(4.12.6),(4.12.8)式结果代入(4.12.4)式,则有

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial w \partial \bar{w}}\right|_{z=0} = Y',$$

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial w \partial \bar{z}_{\beta}}\right|_{z=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial z_{\alpha} \partial \bar{w}}\right|_{z=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial z_{\alpha} \partial \bar{z}_{\beta}}\right|_{z=0} = YK^{-1}\delta_{\alpha\beta}.$$

其中 $\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, N-1$.

所以

$$
\det(g_{\alpha\bar\beta}(0,w^*)) = \det\begin{pmatrix} \frac{Y}{K} & & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \frac{Y}{K} & \\ 0 & & & Y' \end{pmatrix} = \left(\frac{Y}{K}\right)^{N-1} Y'.
$$

由于

$$
\det(g_{\alpha\bar\beta}(z,w)) = \det(g_{\alpha\bar\beta}(0,w^*))\,|J_{F_0}|^2 = \left(\frac{Y}{K}\right)^{N-1} Y'\,|J_{F_0}|^2,
$$

以及

$$
e^{(N+1)g(z,w)} = |J_{F_0}|^2 e^{(N+1)g(0,w^*)} = |J_{F_0}|^2 h^{-(N+1)}.
$$

所以 Monge-Ampère 方程化为

$$
\left(\frac{Y}{K}\right)^{N-1} Y' = h^{-(N+1)}.
$$

两边取对数得

$$
\ln(Y^{N-1}Y') + (N+1)\ln h - \ln K^{N-1} = 0.
$$

对 X 求导得

$$
\frac{(Y^{N-1}Y')'}{(Y^{N-1}Y')} + (N+1)\frac{h'}{h} = 0.
$$

整理并将(4.12.3)式代入得

$$
\frac{(Y^{N-1}Y')'}{(Y^{N-1}Y')} + \frac{\lambda}{X} - (N+1)\frac{Y}{X} = 0.
$$

由此可得

$$
[X(Y^{N-1}Y')]' = (Y^{N+1})' - \frac{\lambda-1}{N}(Y^N)',
$$

即

$$
XY^{N-1}Y' = Y^{N+1} - \frac{\lambda-1}{N}Y^N + C, \tag{4.12.9}
$$

其中 C 为一常数.

由

$$
\frac{\partial g}{\partial w} = \left(Y - \frac{\lambda}{N+1}\right)\frac{1}{w},
$$

得

$$
Y = w\frac{\partial g}{\partial w} + \frac{\lambda}{N+1},
$$

对 $\forall (z,w) \in Y_{\text{I}}$ 成立. 若取 $(z,0) \in Y_{\text{I}}$，则有 $X=0$，所以 $w\left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_{w=0} =$

0,由此得 $Y(0)=\frac{\lambda}{N+1}$. 于是可解出(4.12.9)式中的常数 C,得

$$C=\frac{(\lambda-N-1)\lambda^N}{N(N+1)^{N+1}}.$$

设 g 是满足 Monge-Ampère 方程的任意一个解,则由上述推导,可得

$$g=\frac{1}{N+1}\ln\left[\left(\frac{Y}{K}\right)^{N-1}Y'\det(I-Z\bar{Z}^{T})^{-\left(m+n+\frac{1}{K}\right)}\right].$$

其中 Y 是下述问题的解:

$$\begin{cases} XY^{N-1}Y'=Y^{N+1}-\frac{\lambda-1}{N}Y^N+\frac{(\lambda-N-1)\lambda^N}{N(N+1)^{N+1}}, \\ Y(0)=\frac{\lambda}{N+1}. \end{cases} \tag{4.12.10}$$

这问题的解也不是惟一的. 但是,若 g 是问题(4.12.1)的解,即 g 满足 Monge-Ampère 方程而且满足(4.12.1)式中的边界条件,那么 g 生成的 Einstein-Kahler 度量是完备的而且是惟一的. 当然这种惟一的完备 Einstein-Kähler 度量也是由上述形式的 g 生成,其中的 Y 也是问题(4.12.10)的解. 因此在下面对 Einstein-Kähler 度量下的全纯截曲率的估计,包含了对完备的 Einstein-Kähler 度量下的全纯截曲率的估计.

注意到 $\det(g_{\alpha\beta})=K^{1-N}Y^{N-1}Y'|J_{F_0}|^2>0$,对 $\forall(z,w)\in Y_{\mathrm{I}}$ 成立. 若令

$$G(Y)=Y^{N+1}-\frac{\lambda-1}{N}Y^N+\frac{(\lambda-N-1)\lambda^N}{N(N+1)^{N+1}},$$

由(4.12.10)式,则有 $G(Y)>0$ 对 $\forall X\in(0,1)$成立. 因 $G\left(\frac{\lambda}{N+1}\right)=0$,又

$$G'\left(\frac{\lambda}{N+1}\right)=\left(\frac{\lambda}{N+1}\right)^{N-1}>0,$$

所以 $\exists\delta>0$,使 $G\left(\frac{\lambda}{N+1}-\delta\right)<0$,所以由对 $\forall X\in(0,1)$, $G(Y(X))>0$ 可知 $Y(X)>\frac{\lambda}{N+1}$,又由(4.12.10)式有 $Y'(X)>0$. 综上所述,对 $\forall(z,w)\in Y_{\mathrm{I}}$ 有 $X\in[0,1)$, $Y(X)\geqslant\frac{\lambda}{N+1}$, $Y'(X)>0$.

又由(4.12.10)式可得

$$C^*X=(Y-Y(0))\left(Y^N-\frac{\lambda-N-1}{N(N+1)}\sum_{k=1}^{N}Y(0)^{k-1}Y^{N-k}\right)e^{\varphi(Y)},$$

其中

$$\varphi(Y)=-\int_{Y(0)}^{Y}\frac{(N+1)Y^{N-1}}{Y^N-\frac{\lambda-N-1}{N(N+1)}\sum_{k=1}^{N}Y(0)^{k-1}Y^{N-k}}\mathrm{d}Y,$$

C^*为任意正常数,这是(4.12.10)式的隐式解.

Ⅻ.3. 第1类超 Cartan 域在 Einstein-Kähler 度量下的全纯截曲率

假设 $g(z,w)$生成 Y_{I} 的 Einstein-Kahler 度量,那么 Y_{I} 的全纯截曲率 $\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$在此度量下有如下形式:

$$\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]=\frac{\mathrm{d}(z,w)[\ \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T+\mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T'}]\overline{\mathrm{d}(z,w)}'}{[\mathrm{d}(z,w)T\,\overline{\mathrm{d}(z,w)}']^2}.$$

其中 $\mathrm{d}=\sum\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\mathrm{d}z_\alpha,\bar{\mathrm{d}}=\sum\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}\overline{\mathrm{d}z_\alpha}$,度量方阵 $T=(g_{\alpha\bar{\beta}})$

因为全纯截曲率在全纯自同构变换下是不变的,而对任意的 $(z,w)\in Y_{\mathrm{I}}$,存在 $F\in\mathrm{Aut}(Y_{\mathrm{I}})$,使得 $F(z,w)=(0,w^*)$.所以,只须计算$\omega[(z,w),\mathrm{d}(z,w)]$在$(0,w^*)$点的值即可.由于

$$T[(z,w),\overline{(z,w)}]=J_F|_{z_0=z}T[(0,w^*),\overline{(0,w^*)}]\overline{J_F}'|_{z_0=z}$$

$$=J\begin{pmatrix}\frac{Y}{K}I & 0\\ 0 & Y'\end{pmatrix}\bar{J}'.$$

可得到

$$T=\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$T_{11}=\frac{Y}{K}(A'\bar{A}\times\overline{D}'D)+\frac{XY'}{K^2}E(Z)'\overline{E(Z)},$$

$$T_{12}=\frac{Y'}{K}\bar{w}\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{K}}E(Z)',$$

$$T_{21}=\overline{T}_{12}',$$

$$T_{22}=Y'\det(I-ZZ^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{K}}.$$

这里 $A,D,E(Z)$见引理(1).由于

$$\mathrm{d}T=\begin{pmatrix}\mathrm{d}T_{11} & \mathrm{d}T_{12}\\ \mathrm{d}T_{21} & \mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix},\ \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T=\begin{pmatrix}\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{11} & \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}\\ \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{21} & \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{22}\end{pmatrix}.$$

经计算可得

$$\mathrm{d}T_{11}|_{z=0}=\frac{Y'}{K}\bar{w}\mathrm{d}wI,$$

$$\mathrm{d}T_{12}|_{z=0}=0,$$

$$\mathrm{d}T_{21}|_{z=0}=\frac{Y'}{K}\bar{w}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}T_{22}|_{z=0}=Y''\bar{w}\mathrm{d}w,$$

$$\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}T_{11}|_{z=0}=\frac{XY''+Y'}{K}|\mathrm{d}w|^2I+\frac{XY'}{K^2}|\mathrm{d}z|^2I+\frac{XY'}{K^2}\overline{\mathrm{d}z}'\mathrm{d}z$$

$$+\frac{Y}{K}(\mathrm{d}Z\overline{\mathrm{d}Z}'\times I+I\times\overline{\mathrm{d}Z}'\mathrm{d}Z),$$

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{12}|_{z=0}=\frac{XY''+Y'}{K}\mathrm{d}w\,\overline{\mathrm{d}z}',$$

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T_{21}|_{z=0}=\frac{XY''+Y'}{K}\overline{\mathrm{d}w}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}T_{22}|_{z=0}=(XY'''+Y'')|\mathrm{d}w|^2+\frac{XY''+Y'}{K}|\mathrm{d}z|^2.$$

若令

$$-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T+\mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T}'|_{z=0}=\begin{pmatrix}R_{11}&R_{12}\\R_{21}&R_{22}\end{pmatrix},$$

则有

$$(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)[-\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}T+\mathrm{d}TT^{-1}\overline{\mathrm{d}T}']\overline{(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)}'|_{z=0}$$

$$=(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)\begin{pmatrix}R_{11}&R_{12}\\R_{21}&R_{22}\end{pmatrix}\overline{(\mathrm{d}z,\mathrm{d}w)}'$$

$$=\mathrm{d}zR_{11}\overline{\mathrm{d}z}'+\mathrm{d}wR_{21}\overline{\mathrm{d}z}'+\mathrm{d}zR_{12}\overline{\mathrm{d}w}'+\mathrm{d}wR_{22}\overline{\mathrm{d}w}'.$$

注意到

$$T^{-1}|_{z=0}=\begin{pmatrix}\frac{K}{Y}I&0\\0&\frac{1}{Y'}\end{pmatrix}.$$

经计算则有

$$R_{11}=\left(\frac{XY'^2}{KY}-\frac{XY''+Y'}{K}\right)|\mathrm{d}w|^2I-\frac{XY'}{K^2}|\mathrm{d}z|^2I-\frac{XY'}{K^2}\overline{\mathrm{d}z}'\mathrm{d}z$$

$$-\frac{Y}{K}(\overline{\mathrm{d}Z}\mathrm{d}Z'\times I+I\times\overline{\mathrm{d}Z}'\mathrm{d}Z),$$

$$R_{12}=\left(\frac{XY'^2}{KY}-\frac{XY''+Y'}{K}\right)\mathrm{d}w\,\overline{\mathrm{d}z}',$$

$$R_{21}=\overline{R_{12}}',$$

$$R_{22}=\left(\frac{XY'^2}{KY}-\frac{XY''+Y'}{K}\right)|\mathrm{d}z|^2+\left(\frac{XY''^2}{Y'}-XY'''-Y''\right)|\mathrm{d}w|^2.$$

利用(4.12.10)式,经计算可得

$$XY'=Y^2-\frac{\lambda-1}{N}Y+\frac{C}{Y^{N-1}},$$

$$\frac{XY'^2}{KY}-\frac{XY''+Y'}{K}=-\frac{YY'}{K}\left(1-\frac{NC}{Y^{N+1}}\right),$$

$$\frac{XY''^2}{Y'} - XY''' - Y'' = \left(2+\frac{N(N-1)C}{Y^{N+1}}\right)Y'^2.$$

又易知

$$dz(\overline{dZ}dZ'\times I + I\times\overline{dZ'}dZ)\overline{dz'} = 2\mathrm{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'}).$$

事实上，令

$$du = dz(\overline{dZ}dZ'\times I).$$

将 du 排成一个(m,n)的矩阵 dU，则 $dU = dZ\,\overline{dZ'}dZ$. 所以

$$dz(\overline{dZ}dZ'\times I)\overline{dz'} = du\,\overline{dz'} = \mathrm{tr}(dU\,\overline{dZ'}) = \mathrm{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'}).$$

同理

$$dz(I\times\overline{dZ'}dZ)\overline{dz'} = \mathrm{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'}).$$

将上述代入，则有

$$\begin{aligned}&(dz,dw)[-\bar{d}dT + dTT^{-1}\overline{dT'}]\overline{(dz,dw)'}\\ &= dzR_{11}\overline{dz'} + dwR_{21}\overline{dz'} + dzR_{12}\overline{dw'} + dwR_{22}\overline{dw'}\\ &= -\frac{2Y^2}{K^2}\left(1-\frac{\lambda-1}{NY}+\frac{C}{Y^{N+1}}\right)|dz|^4 - \frac{2Y}{K}\mathrm{tr}(dZ\,\overline{dZ'}dZ\,\overline{dZ'})\\ &\quad -4\frac{YY'}{K}\left(1-\frac{NC}{Y^{N+1}}\right)|dz|^2|dw|^2 - \left(2+\frac{N(N-1)C}{Y^{N+1}}\right)Y'^2|dw|^4.\end{aligned}$$

这样就得到第1类超 Cartan 域在 Einstein-Kähler 度量下的全纯截曲率为

$$\begin{aligned}\omega[(z,w),d(z,w)]|_{z=0} = -2\Bigg[&\frac{\frac{Y^2}{K^2}\left(1-\frac{\lambda-1}{NY}+\frac{C}{Y^{N+1}}\right)|dz|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\\ &+\frac{\frac{Y}{K}\mathrm{tr}(dZ\,dZ'dZ\,\overline{dZ'})}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}+\frac{\frac{2YY'}{K}\left(1-\frac{NC}{Y^{N+1}}\right)|dz|^2|dw|^2}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\\ &+\frac{\left(1+\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}\right)Y'^2|dw|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\Bigg].\end{aligned} \tag{4.12.11}$$

其中 $C=\frac{(\lambda-N-1)\lambda^N}{N(N+1)^{N+1}}$.

下面我们分情况对曲率进行估计.

(i) 当 $K\geqslant\frac{mn+1}{m+n}$时，$\lambda\geqslant N+1$，$C\geqslant 0$.

取 $\varepsilon=\frac{2N}{\lambda(N-1)}$.

如果 $N>2$,即 $mn>1$(亦即 Y_{I} 中,除 $m=n=1$ 的情形之外),则有

$$0<\frac{2N}{\lambda(N-1)}\leqslant\frac{2N}{N^2-1}<1.$$

即 $0<\varepsilon<1$. 由(4.12.11)式,有

$$\frac{1}{2}\omega=\varepsilon+\frac{\frac{Y^2}{K^2}\left(1-\varepsilon-\frac{\lambda-1}{NY}-\frac{(N+1)C}{(N-1)Y^{N+1}}\right)|dz|^4+\frac{Y}{K}\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ}'dZ\,\overline{dZ}')}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}$$

$$+\frac{\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}\left(\frac{2Y}{K(N-1)}|dz|^2-Y'|dw|^2\right)^2}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}$$

$$+\frac{(1-\varepsilon)\frac{2YY'}{K}|dz|^2|dw|^2+(1-\varepsilon)Y'^2|dw|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}$$

因为 $Y(X)\geqslant\frac{\lambda}{N+1}$,于是

$$-\frac{1}{2}\omega\geqslant\varepsilon$$

$$+\frac{\frac{Y^2}{K^2}\left(1-\varepsilon-\frac{\lambda-1}{NY}-\frac{(N+1)C}{(N-1)Y}\left(\frac{N+1}{\lambda}\right)^N\right)|dz|^4+\frac{Y}{K}\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ}'dZ\,\overline{dZ}')}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}$$

$$\geqslant\varepsilon+\frac{\frac{Y}{K^2}\left((1-\varepsilon)\frac{\lambda}{N+1}-\frac{\lambda-2}{N-1}\right)|dz|^4+\frac{Y}{K}\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ}'dZ\,\overline{dZ}')}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}$$

$$=\varepsilon+\frac{Y}{K^2}\frac{K\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ}'dZ\,\overline{dZ}')-\frac{2(\lambda-1)}{N^2-1}|dz|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}.$$

因为 $|dz|^2=\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ}')$,应用引理 4,有

$$-\frac{1}{2}\omega\geqslant\varepsilon+\frac{Y}{K^2}\frac{\left(K-\frac{2(\lambda-1)}{N^2-1}(m^2-m+1)\right)\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ}'dZ\,\overline{dZ}')}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}$$

$$=\varepsilon+\frac{Y}{K}\frac{\left(1-\frac{2(m+n)(m^2-m+1)}{N^2-1}\right)\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ}'dZ\,\overline{dZ}')}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}.$$

下面证明不等式：

$$\frac{2(m+n)(m^2-m+1)}{N^2-1}<1 \tag{4.12.12}$$

成立.

即不等式 $2(m+n)(m^2-m+1)\leqslant mn(mn+2)$ 成立.

当 $m=1, n>m$ 时，不等式(4.12.12)成为 $2(n+1)\leqslant n^2+2n$，成立；

当 $m=2$ 时，不等式(4.12.12)成为 $(n-2)(2n+3)\geqslant 0$，成立；

当 $m=3$ 时，不等式(4.12.12)成为 $(n-3)(9n+14)+5n\geqslant 0$，成立；

当 $m\geqslant 4$ 时，$2(m+n)(m^2-m+1)\leqslant 2m^2(m+n)\leqslant 2mn2n\leqslant mn(mn+2)$，不等式(4.12.12)成立.

所以 $\omega\leqslant -2\varepsilon=-\dfrac{4N}{\lambda(N-1)}<0$.

当 $m=n=1$ 时，$N=2, \lambda=2K+1, Y\geqslant\dfrac{2K+1}{3}, \dfrac{C}{Y^{N+1}}<\dfrac{1}{2}$，

$$-\frac{1}{2}\omega=1+\frac{C}{Y^3}\frac{\frac{Y^2}{K^2}|dz|^4-\frac{4YY'}{K}|dz|^2|dw|^2+Y'^2|dw|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}$$

$$\geqslant 1+\frac{C}{Y^3}\frac{-\frac{2YY'}{K}|dz|^2|dw|^2}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}$$

$$\geqslant\frac{\frac{Y^2}{K^2}|dz|^4+\frac{YY'}{K}|dz|^2|dw|^2+Y'^2|dw|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\geqslant\frac{3}{4}.$$

所以 $\omega\leqslant -\dfrac{3}{2}<0$.

(ii) 当 $\dfrac{mn-1}{m+n}<K<\dfrac{mn+1}{m+n}$ 时，$N-1<\lambda<N+1, C<0$，

$$1+\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}>1+\frac{N(N-1)C}{2}\left(\frac{N+1}{\lambda}\right)^{N+1}$$

$$=\frac{(N+1)(\lambda-N+1)}{2\lambda}>0$$

所以

$$\omega < -2\left[\frac{\frac{Y^2}{K^2}\left(1-\frac{\lambda-1}{NY}+\frac{C}{Y^{N+1}}\right)|dz|^4+\frac{Y}{K}\operatorname{tr}(dZ\,d\bar{Z}'dZ\,d\bar{Z}')}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(1+\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}\right)Y'^2|dw|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\right].$$

应用引理4和 $Y\geqslant\frac{\lambda}{N+1}$,

$$\omega < -2\left[\frac{\frac{Y^2}{K^2}\left(1-\frac{\lambda-1}{NY}+\frac{C}{Y^{N+1}}+\frac{K}{Y(m^2-m+1)}\right)|dz|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(1+\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}\right)Y'^2|dw|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\right]$$

易知 $1-\frac{\lambda-1}{NY}+\frac{C}{Y^{N+1}}+\frac{K}{Y(m^2-m+1)}$ 在 $Y>\frac{\lambda}{N+1}$ 是单调增的,因此

$$1-\frac{\lambda-1}{NY}+\frac{C}{Y^{N+1}}+\frac{K}{Y(m^2-m+1)}>\frac{K(N+1)}{\lambda(m^2-m+1)}.$$

于是

$$\omega < -2\,\frac{\frac{Y^2}{K^2}\left(\frac{K(N+1)}{\lambda(m^2-m+1)}\right)|dz|^4+\left(1+\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}\right)Y'^2|dw|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}.$$

所以 $\omega < -\min\left(\frac{K(N+1)}{\lambda(m^2-m+1)},\frac{(N+1)(\lambda-N+1)}{2\lambda}\right)$.

(iii) 当 $K\leqslant\frac{mn-1}{m+n}$ 时, $\lambda\leqslant N-1$, $C<0$, 由(4.12.11)式,有

$$-\frac{1}{2}\omega-1=\left\{\frac{\frac{Y^2}{K^2}\left(-\frac{\lambda-1}{NY}+\frac{C}{Y^{N+1}}\right)|dz|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\right.$$

$$+\frac{\frac{Y}{K}\operatorname{tr}(dZ\,\overline{dZ}'dZ\,\overline{dZ}')}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}-\frac{2\frac{YY'}{K}\left(\frac{NC}{Y^{N+1}}\right)|dz|^2|dw|^2}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}$$

$$
+\frac{\left(\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}\right)Y'^2|dw|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}\Bigg\}.
$$

应用引理 4

$$
\frac{Y}{K}\mathrm{tr}(dZ\overline{dZ}'dZ\overline{dZ}')\geqslant\frac{Y}{K}\frac{1}{m^2-m+1}|dz|^4,
$$

$$
-\frac{1}{2}\omega-1\geqslant\frac{\left(-\frac{\lambda-1}{NY}+\frac{C}{Y^{N+1}}+\frac{K}{Y(m^2-m+1)}\right)\frac{Y^2}{K^2}|dz|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}
$$

$$
+\frac{2\frac{YY'}{K}\left(\frac{NC}{Y^{N+1}}\right)|dz|^2|dw|^2+\left(\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}\right)Y'^2|dw|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2\right)^2}.
$$

记

$$
u=\frac{\frac{Y}{K}|dz|^2}{\frac{Y}{K}|dz|^2+Y'|dw|^2}.
$$

显然有 $0\leqslant u\leqslant 1$，那么

$$
-\frac{1}{2}\omega-1\geqslant-\left(\frac{\lambda-1}{NY}-\frac{C}{Y^{N+1}}-\frac{K}{Y(m^2-m+1)}\right)u^2
$$

$$
-\frac{2NC}{Y^{N+1}}u(1-u)+\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}(1-u)^2.
$$

即

$$
\frac{1}{2}\omega+1\leqslant\left(\frac{\lambda-1}{NY}-\frac{C}{Y^{N+1}}-\frac{K}{Y(m^2-m+1)}\right)u^2+\frac{2NC}{Y^{N+1}}u(1-u)
$$

$$
-\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}}(1-u)^2.
$$

因 $-C>0$，并注意到 $\lambda=K(m+n)+1$，$N=mn+1$，所以

$$
\frac{\lambda-1}{NY}-\frac{K}{Y(m^2-m+1)}=\frac{K}{Y}\left(\frac{m+n}{N}-\frac{1}{m^2-m+1}\right)
$$

$$
=\frac{K}{Y}\frac{(m+n)(m^2-m+1)-(mn+1)}{(m^2-m+1)N}
$$

$$
\geqslant\frac{K}{Y}\frac{(m+n)m-(mn+1)}{(m^2-m+1)N}\geqslant 0.
$$

记

$$
a^*=\frac{\lambda-1}{NY}-\frac{C}{Y^{N+1}}-\frac{K}{Y(m^2-m+1)}>0,
$$

$$b^* = -\frac{2NC}{Y^{N+1}} > 0,$$

$$c^* = -\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}} > 0,$$

则

$$\frac{1}{2}\omega + 1 \leqslant a^* u^2 + b^* u(1-u) + c^*(1-u)^2$$
$$= (a^* + b^* + c^*)u^2 - (b^* + 2c^*)u + c^*.$$

所以$\frac{1}{2}\omega + 1$的最大值在 $u=0$ 或 $u=1$ 达到.

当 $u=0$ 时, $Y(0) \leqslant Y(X)$,

$$\frac{1}{2}\omega + 1 = c^* \leqslant -\frac{N(N-1)C}{2Y(0)^{N+1}} = \frac{(N-1)(N+1-\lambda)}{2\lambda}.$$

当 $u=1$ 时,

$$\frac{1}{2}\omega + 1 - a^* \leqslant \frac{\lambda - 1}{NY(0)} - \frac{C}{Y(0)^{N+1}} - \frac{K}{Y(0)(m^2 - m + 1)}$$
$$- 1 - \frac{K(N+1)}{\lambda(m^2 - m + 1)}.$$

由 $\lambda \leqslant (N-1)$得$\frac{(N-1)}{\lambda} \geqslant 1$.由 $N+1-\lambda \geqslant 2$ 得$\frac{N+1-\lambda}{2} \geqslant 1$,所以

$$c^* = -\frac{N(N-1)C}{2Y^{N+1}} \geqslant 1.$$

而 $a^*(0) < 1$,所以$\frac{1}{2}\omega + 1$ 在 $u=0$ 时取到最小值 $c^*(0)$.所以

$$\omega \leqslant -2 + \frac{(N-1)(N+1-\lambda)}{\lambda},$$

而等号在$(z,0)$点$(0,dw)$方向时成立,值得注意的是$-2+\frac{(N-1)(N+1-\lambda)}{\lambda}$是非负的而且能取到正值.

综上所述,当 $K > \frac{mn-1}{m+n}$时,对任一满足 Monge-Ampère 方程的 g 所生成的 Einstein-Kähler 度量,总存在一个正常数 C^*,使得在此度量下的全纯截曲率$\leqslant -C^*$.因而此时 Y_1 的惟一存在的完备的 Einstein-Kähler 度量下的全纯截曲率存在一个负上界.由文献[Hei]可知有以下比较定理成立:

定理:当 $K > \frac{mn-1}{m+n}$ 时,令 Y_1 的完备的 Einstein-Kahler 度量为 $E_{Y_1}(z,w;y)$,其 Kobayashi 度量为 $R_{Y_1}(z,w;y)$,则存在正常数 c,使

得对任意$(z,w)\in Y_{\rm I}$，$y\in\mathbf{C}^N$时有

$$E_{Y_{\rm I}}(z,w;y)\leqslant cR_{Y_{\rm I}}(z,w;y).$$

Ⅻ.4．非齐性域的显式完备 Einstein-Kähler 度量的例子

对于第 1 类超 Cartan 域 $Y_{\rm I}(1,m,n;K)$，若取 $K=\dfrac{mn+1}{m+n}$，$m\neq 1$，则 $\lambda-1=N$，$\lambda=N+1$，$C=0$．这时，方程(4.12.10)式化为

$$\begin{cases} XY'=Y^2-Y, \\ Y(0)=1, \end{cases} \tag{4.12.13}$$

可解出 $Y=\dfrac{1}{1-C^*X}$，其中 C^* 为任意常数．

若取 $C^*=1$，则 $Y=\dfrac{1}{1-X}$，于是

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{N+1}\ln\left[\left(\frac{Y}{K}\right)^{N-1}Y'\det(I-ZZ^{\rm T})^{-\left(m+n+\frac{1}{K}\right)}\right] \\ &= \ln\left[\frac{1}{1-X}\det(I-ZZ^{\rm T})^{-\frac{1}{K}}K^{\frac{1-N}{1+N}}\right]. \end{aligned}$$

下面我们要证明 g 是边值问题(4.12.1)的解．

显然有 $\det(g_{\alpha\beta}(z,w))=e^{(N+1)g(z,w)}$对$\forall(z,w)\in Y_{\rm I}$成立．

若点$(\tilde{z},\tilde{w})\in\partial Y_{\rm I}$，且 $\tilde{w}\neq 0$ 时，$(\tilde{z},\tilde{w})$为强拟凸点，当$(z,w)\in Y_{\rm I}$，$(z,w)\to(\tilde{z},\tilde{w})$时，有 $X\to 1$，所以$\dfrac{1}{1-X}\to+\infty$，而此时 $\det(I-ZZ^{\rm T})\to|\tilde{w}|^{2K}>0$．因此，当$(z,w)\to$此强拟凸点时，有 $g(z,w)\to+\infty$．

若点$(\tilde{z},\tilde{w})\in\partial Y_{\rm I}$，而 $\tilde{w}=0$ 时，$(\tilde{z},0)$为弱拟凸点，$(z,w)\in Y_{\rm I}$，$(z,w)\to(\tilde{z},0)$时，有$\dfrac{1}{1-X}>1$，$\det(I-ZZ^{\rm T})\to 0$，$\det(I-ZZ^{\rm T})^{-\frac{1}{K}}\to+\infty$，即当$(z,w)\to$此弱拟凸点时，也有 $g(z,w)\to+\infty$．

这证明 g 是 Monge-Ampère 方程的边值问题(4.12.1)的解，所以 g 生成了 $Y_{\rm I}$ 的完备的 Einstein-Kähler 度量．若令其度量方阵为

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned} T_{11} = {} & \frac{1}{K(1-X)}[(I-ZZ')^{-1}\times(I-Z^{\rm T}Z)^{-1}] \\ & +\frac{X}{K^2(1-X)^2}E(Z)'\overline{E(Z)}, \end{aligned}$$

$$T_{12} = \frac{w}{K(1-X)^2}\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{K}}E(Z)',$$

$$T_{21} = T_{12}',$$

$$T_{22} = \frac{1}{(1-X)^2}\det(I - ZZ^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{K}}.$$

$E(Z)$见引理3.

这样我们就得到了这种度量的显表达式:

$$ds^2 = (dz, dw)T\overline{(dz, dw)}'.$$

此时的 Y_{I} 一般而言是非齐性的,对非齐性域而言,我们找到了一个完备的 Einstein-Kahler 度量的显表达式,据我们所知这还是第一次.

在这种度量下的全纯截曲率为

$$\omega[(z,w),d(z,w)]|_{z=0} = -2\left\{1 + \frac{\frac{Y}{K}\mathrm{tr}(dZ\,\overline{dZ}'dZ\,\overline{dZ}') - \frac{Y}{K^2}|dz|^4}{\left(\frac{Y}{K}|dz|^2 + Y'|dw|^2\right)^2}\right\}.$$

若取 $m=1$,则 $K=1$.这时 Y_{I} 为超球,那么其全纯截曲率为常数 -2,与已知结果相同.

本节内容取自文献[YWA1].

第五章

偏微分方程与特殊函数

第五章　偏微分方程与特殊函数

这一章分两部分.第一部分讨论偏微分方程,第一个是两个变量的偏微分方程,研究单位圆外双曲型区域的情况,得到了 Cauchy 问题的显式解;第二个偏微分方程是 n 个变量,研究了单位超球外双曲型的情况,也得到了该方程的 Cauchy 问题的显式解.第二部分是特殊函数,主要研究非共轭锥上的 Gamma 函数.普通的 Gamma 函数(在大学复变函数论中讲到的那种)是定义在正实轴上的,而正实轴就是实维数为 1 的锥.Siegel 首先将 Gamma 函数推广到共轭锥上.这里我们将 Gamma 函数推广到作者和钟家庆引进的非自共轭锥上,并由此得到相应的锥上的第一类 Siegel 域的 Cauchy 核和形式 Poisson 核作为其应用.这里只讲了第一和第三类非自共轭锥上的 Gamma 函数.至于第二类非自共轭锥上的 Gamma 函数可参看文献[LP2].

I. 一类双曲型方程 Cauchy 问题的显式解

我们考虑下面的偏微分方程:

$$(r^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2rs\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}+(s^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{2r^2-n+2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2s^2-n+2}{s}\frac{\partial u}{\partial s}=0, \tag{5.1.1}$$

其中 n 是大于 2 的自然数.

这方程在单位圆内是椭圆型,在单位圆外是双曲型,单位圆是变型线.当 $n=2$ 时,它就是[Hua2]中第七讲所研究的方程.因此,方程(5.1.1)可看作是[Hua2]中所研究的方程的一种推广.但是,当 $n>2$ 时,增加了 $s=0$ 及 $r=0$ 两条奇线,这就有很大不同,而且更为复杂.

本文仅考虑方程(5.1.1)在双曲区域内的 Cauchy 问题,也就是在单位圆外考虑如下的定解条件:

$$u(r,0)=f(r),\ \frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{s=0}=0, \tag{5.1.2}$$

其中 $f(r)$ 是在单位圆外有二阶连续微商的函数.

作变换

$$r = \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}, \quad s = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}, \tag{5.1.3}$$

方程(5.1.1)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - (n-2)[\cot(x+y) + \cot 2(x-y)]\frac{\partial u}{\partial x} - (n-2)[\cot(x+y) - \cot 2(x-y)]\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{5.1.4}$$

令

$$u = \left[\frac{\sin^2(x+y)}{\sin^2(x-y)}\right]^{\frac{n-2}{2}} v(x,y),$$

则(5.1.4)化为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \left[\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2(x+y)} - \frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2(x-y)}\right]v. \tag{5.1.5}$$

条件(5.1.2)在变换(5.1.3)之下变为

$$u(x,y)\Big|_{x=y} = f_1(2y), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x=y} = 0. \tag{5.1.6}$$

由此可见，方程(5.1.1)在条件(5.1.2)之下的 Cauchy 问题归结为下列问题：

$$(\text{I})\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - (n-2)[\cot(x+y) + \cot 2(x-y)]\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \qquad - (n-2)[\cot(x+y) - \cot 2(x-y)]\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x,y)\Big|_{x=y} = f_1(2y), \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x=y} = 0. \end{cases}$$

我们证明这问题的解 $u(x,y)$ 具有明显表达式

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\dfrac{n-2}{2}\right)}\displaystyle\int_y^x f_1(2y_0)\left[\lambda_1\lambda_2 + \int_{2y_0-x-y}^{-x+y}\lambda_1\lambda_3\right. \\ \quad \left.\cdot\dfrac{\partial F(n-1,-n+2,1,\tau_2)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}y_0 \quad (n>4); \\ 2\displaystyle\int_y^x f_1(2y_0)D_1F(3,-2,1,D_2)\mathrm{d}y_0 \quad (n=4); \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_y^x f_1(2y_0)\left[A_1 + \int_{2y_0-x-y}^{x+y} A_2\,\dfrac{\partial F(2,-1,1,\tau_2)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}y_0 \\ \qquad\qquad (n=3, x-y>0); \\ \dfrac{-2}{\pi}\displaystyle\int_y^x f_1(2y_0)\left[A_1 + \int_{2y_0-x-y}^{x+y} A_2\,\dfrac{\partial F(2,-1,1,\tau_2)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}y_0 \\ \qquad\qquad (n=3, x-y<0). \end{cases}$$

其中 F 表示超几何函数的特殊情形——勒让德函数，

$$
\begin{cases}
\lambda_1 = \left[\dfrac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)\sin^2 2y_0}\right]^{\frac{n-2}{2}}, \\
\lambda_2 = \left[\dfrac{\sin 2(x-y_0)\sin 2(y_0-y)}{\sin 2(x-y)}\right]^{\frac{n-4}{2}}, \\
\lambda_3 = \left[\dfrac{\sin(x-y-\eta)\sin(x-y+\eta)}{\sin 2(x-y)}\right]^{\frac{n-4}{2}}, \\
D_1 = \dfrac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)\sin 2y_0}, \\
D_2 = \dfrac{\sin(y-y_0)\sin(y_0-x)}{\sin(x+y)\sin 2y_0}, \\
\tau_2 = \dfrac{\sin\left(\dfrac{2y_0+\eta}{2}-\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{2y_0-\eta}{2}-\dfrac{x+y}{2}\right)}{\sin(x+y)\sin 2y_0}, \\
A_1 = \dfrac{\sin(x+y)\csc 2y_0}{[\sin 2(x-y_0)\sin 2(y_0-y)]^{\frac{1}{2}}}, \\
A_2 = \dfrac{\sin(x+y)\csc 2y_0}{[\sin(x-y-\eta)\sin(x-y+\eta)]^{\frac{1}{2}}},
\end{cases}
\tag{5.1.7}
$$

当 n 为奇数时，因方括号内能出现负数，此时 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 等为双值函数，我们约定按如下方法取其单值枝：例如若令 $z=\sin(x-y-\eta)\cdot\sin(x-y+\eta)$，则 $\sqrt{z}$ 是双值函数，命 $z=\rho\,e^{i\varphi}$，则 $\sqrt{z}$ 的两个值是

$$
z_v = r^{\frac{1}{2}}e^{i\Theta_v},\quad \Theta_v = \frac{\varphi}{2}+\frac{2\pi v}{2},\quad v=0,1.
$$

我们约定总是取 $v=0$ 的一值，其他与此类似.

1.1 几个引理

1.1.1 引理 1. $F(n-1,-n+2,1,\sigma_2)$ 满足方程

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2(x+y)}u, \tag{5.1.8}
$$

其中

$$
\sigma_2 = -\frac{\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)}{\sin(x_0+y_0)\sin(x+y)}.
$$

证：

$$
\because\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = F''(\sigma_2)\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\frac{\partial\sigma_2}{\partial y} + F'(\sigma_2)\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x\partial y}.
$$

而

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}=-\frac{\sigma_2(1-\sigma_2)}{\sin^2(x+y)},\quad \frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x\partial y}=\frac{2\sigma_2-1}{\sin^2(x+y)},$$

$\therefore\quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{\sin^2(x+y)}[\sigma_2(1-\sigma_2)F''(\sigma_2)+(1-2\sigma_2)F'(\sigma_2)].$

$\because\quad F(n-1,-n+2,1,\sigma_2)$根据定义,它满足方程

$$\sigma_2(1-\sigma_2)F''(\sigma_2)+(1-2\sigma_2)F'(\sigma_2)+(n-1)(n-2)F=0,$$

$\therefore\quad$ 有$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{\sin^2(x+y)}F$.引理得证.

I.1.2　推论 1. $F(n-1,-n+2,1,\dot\sigma_2)$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2\xi}u,\tag{5.1.9}$$

其中

$$\dot\sigma_2=-\frac{\sin\left(\dfrac{\xi+\theta}{2}-\dfrac{\xi_0}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\xi-\theta}{2}-\dfrac{\xi_0}{2}\right)}{\sin\xi_0\sin\xi}.$$

证:在引理 1 中令 $\xi=x+y,\theta=x-y$,并取 $x_0=y_0$,记 $\xi_0=2y_0$,则方程(5.1.8)化为(5.1.9),$F(n-1,-n+2,1,\sigma_2)$就化为$F(n-1,-n+2,1,\dot\sigma_2)$.所以推论 1 成立.

I.1.3　推论 2. $F(n-1,-n+2,1,\dot\tau_2)$满足方程.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2\xi}u,$$

其中

$$\dot\tau_2=-\frac{\sin\left(\dfrac{2y_0+\eta-\xi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{2y_0-\eta-\xi}{2}\right)}{\sin\xi\sin 2y_0}.$$

证:令 $\xi=x+y,\eta=x-y$,则上述方程化为(5.1.8),而 $\dot\tau_2$ 化为 $\sigma_2\big|_{x_0=y_0}$(即 σ_2 中令 $x_0=y_0$ 而得的式子),因此推论 2 成立.

I.1.4　推论 3. $F(3,-2,1,D_2)$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\sin^2(x+y)}u,$$

其中 D_2 见(5.1.7).

证:在引理 1 中取 $n=4$,并令 $x_0=y_0$ 即得推论 3.

I.1.5　引理 2.

$$\lambda_3=\left[\frac{\sin(\theta-\eta)\sin(\theta+\eta)}{\sin 2\theta}\right]^{\frac{n-4}{2}}$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2\theta}u;$$

$$\tau_0=\left[\frac{\sin(x-y-\eta)\sin(x-y+\eta)}{\sin 2(x-y)}\right]^{\frac{n-4}{2}}$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2(x-y)}u;$$

$$\lambda=\frac{[\sin 2(x-y)]^{\frac{1}{2}}}{\sin(x+y)\sin 2y_0}$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\partial y}=\left[\frac{2}{\sin^2(x+y)}+\frac{1}{\sin^2 2(x-y)}\right]\lambda.$$

证:以上都容易直接验证,这里从略.

I.1.6 引理 3. $V_2=\lambda\Lambda$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\partial y}=\left[\frac{2}{\sin^2(x+y)}+\frac{1}{\sin^2 2(x-y)}\right]V_2+\frac{2}{\sin^2(x+y)}\tau, \quad (5.1.10)$$

其中 λ 同上,

$$\tau=\left[\frac{\sin 2(x-y)}{\sin 2(x-y_0)\sin 2(y_0-y)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Lambda=-\ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z},\quad z=\frac{\cos(x-y)}{\cos(2y_0-x-y)}.$$

证:

$$\because \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}\Lambda+\lambda\frac{d^2\Lambda}{dz^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{d\Lambda}{dz}\left[\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

应用引理 2,并注意到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z[-\tan(x-y)-\tan(2y_0-x-y)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z[\tan(x-y)-\tan(2y_0-x-y)],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2}{\cos^2(2y_0-x-y)}z,$$

我们有

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\partial y}=\left[\frac{2}{\sin^2(x+y)}+\frac{1}{\sin^2 2(x-y)}\right]V_2+\lambda z^2\frac{d^2\Lambda}{dz^2}[\tan^2(2y_0-x-y)$$

$$-\tan^2(x-y)]+2\lambda z\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{\cos^2(2y_0-x-y)}+\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}z}\cot(x+y)\right.$$
$$\left.\cdot\tan(2y_0-x-y)+\cot2(x-y)\tan(x-y)\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}z}\right].$$

由于

$$2\lambda z\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}z}=\frac{2}{\sin^2(x+y)}\tau\left[\frac{\sin(x+y)\cos(2y_0-x-y)}{\sin 2y_0}\right],$$

$$\lambda z^2\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}z^2}=\frac{2}{\sin^2(x+y)}$$
$$\cdot\tau\left[\frac{\sin(x+y)\cos(2y_0-x-y)(2\cos^2(x-y)-\cos^2(2y_0-x-y))}{2\sin 2y_0(\cos^2(2y_0-x-y)-\cos^2(x-y))}\right],$$

$$\therefore\quad\frac{\partial^2V_2}{\partial x\partial y}=\left[\frac{2}{\sin^2(x+y)}+\frac{1}{\sin^2 2(x-y)}\right]V_2+\frac{2\tau}{\sin^2(x+y)}$$
$$\cdot\left\{\frac{\sin(x+y)\cos(2y_0-x-y)}{\sin 2y_0}\left[\frac{1}{\cos^2(2y_0-x-y)}\right.\right.$$
$$\left.+\cot(x+y)\tan(2y_0-x-y)+\cot2(x-y)\tan(x-y)\right]$$
$$+\frac{\sin(x+y)\cos(2y_0-x-y)(2\cos^2(x-y)-\cos^2(2y_0-x-y))}{2\sin 2y_0(\cos^2(2y_0-x-y)-\cos^2(x-y))}$$
$$\left.\cdot[\tan^2(2y_0-x-y)-\tan^2(x-y)]\right\}.$$

容易验证花括号内的表达式恒等于 1,所以引理得证.

I.1.7 引理 4. 当 $n>4$ 时,

$$V=\int_{2y_0-x-y}^{-x+y}\lambda_3\frac{\partial F(n-1,-n+2,1,\tau_2)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta$$

满足方程

$$\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}=\left[\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2(x+y)}-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2(x-y)}\right]V+\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2(x+y)}\lambda_2,\tag{5.1.11}$$

其中 $\tau_2,\lambda_2,\lambda_3$,见(5.1.7).

证:作变换 $\xi=x+y,\theta=x-y$,则 τ_2、λ_2、λ_3、$V(x,y)$分别化为 $\dot\tau_2$、$\dot\lambda_2$、$\dot\lambda_3$、$V(\xi,\theta)$,

$$\dot\tau_2=-\frac{\sin\left(\frac{2y_0+\eta-\xi}{2}\right)+\left(\frac{2y_0-\eta-\xi}{2}\right)}{\sin\xi\sin 2y_0},$$

$$\dot\lambda_2=\left[\frac{\sin(\xi+\theta-2y_0)\sin(2y_0-\xi-\theta)}{\sin 2\theta}\right]^{\frac{n-4}{2}},$$

$$\dot\lambda_3=\left[\frac{\sin(\theta-\eta)\sin(\theta+\eta)}{\sin 2\theta}\right]^{\frac{n-4}{2}},$$

$$V(\xi,\theta) = \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \dot{\lambda}_3 \frac{\partial F(n-1, -n+2, 1, \tau_2)}{\partial \eta} d\eta,$$

而方程(5.1.11)化为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \left[\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2 \xi} - \frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2\theta}\right] V$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2 \xi} \dot{\lambda}_2, \tag{5.1.12}$$

因此,只要证明 $V(\xi,\theta)$满足(5.1.12),引理就得证.

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \dot{\lambda}_3 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} d\eta + \left(\dot{\lambda}_3 \frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \dot{\lambda}_3 \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^2 \partial \eta} d\eta + \left(\dot{\lambda}_3 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi}$$

$$+ \dot{\lambda}_3\Big|_{\eta=2y_0-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi}\right]$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\dot{\lambda}_3\Big|_{\eta=2y_0-\xi}\right],$$

由推论 2 可知

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2 \xi} F.$$

以此代入上式右端第一项得

$$\int_{2y_0-\xi}^{\theta} \dot{\lambda}_3 \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^2 \partial \eta} d\eta = \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \dot{\lambda}_3 \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2 \xi} F\right] d\eta$$

$$= \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \dot{\lambda}_3 \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} d\eta + \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2 \xi} \dot{\lambda}_3 \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta,$$

经两次分部积分得

$$\int_{2y_0-\xi}^{\theta} \dot{\lambda}_3 \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} d\eta = \left[\dot{\lambda}_3 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial \eta}\right]_{2y_0-\xi}^{\theta} + \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \frac{\partial^2 \dot{\lambda}_3}{\partial \eta^2} \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta.$$

另一方面,我们有

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta - \left(\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\Big|_{\eta=\theta} = \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \frac{\partial^2 \dot{\lambda}_3}{\partial \theta^2} \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta - \left(\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\Big|_{\eta=\theta},$$

因此有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \int_{2y_0-\xi}^{\theta} \left[\frac{\partial^2 \dot{\lambda}_3}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \dot{\lambda}_3}{\partial \theta^2} + \frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2 \xi} \dot{\lambda}_3\right] \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$$

$$+\left(\dot\lambda_3\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right)\Big|_{\eta=\theta}+\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\theta}\left[\frac{\partial\dot\lambda_3}{\partial\theta}-\frac{\partial\dot\lambda_3}{\partial\eta}\right]\Big|_{\eta=\theta}$$

$$+\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{\eta=2y_0-\xi}\left[\frac{\partial\dot\lambda_3}{\partial\eta}\Big|_{\eta=2y_0-\xi}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\dot\lambda_3\big|_{\eta=2y_0-\xi}\right)\right]$$

$$\dot\lambda_3\Big|_{\eta=2y_0-\xi}\left[\left(\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi}-\left(\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{\eta=2y_0-\xi}\right)\right].$$

(5.1.13)

易知

$$\left(\dot\lambda_3\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right)\Big|_{\eta=\theta}=0,\ \left[\frac{\partial\dot\lambda_3}{\partial\theta}-\frac{\partial\dot\lambda_3}{\partial\eta}\right]_{\eta=\theta}=0.$$

又因为

$$\dot\lambda_3\Big|_{\eta=2y_0-\xi}=\dot\lambda_2,\ \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\dot\lambda_3\Big|_{\eta=2y_0-\xi}\right)=-\left(\frac{\partial\dot\lambda_3}{\partial\eta}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{\eta=2y_0-\xi}\left[\frac{\partial\dot\lambda_3}{\partial\eta}\Big|_{\eta=2y_0-\xi}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\dot\lambda_3\big|_{\eta=2y_0-\xi}\right)\right]=0.$$

因此，在(5.1.13)右端除首尾两项外都等于零.下面计算此两项之值.

由引理2知，

$$\frac{\partial^2\dot\lambda_3}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\dot\lambda_3}{\partial\theta^2}=-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^22\theta}\dot\lambda_3,$$

所以(5.1.13)式右端首项的值恰巧等于

$$\left[\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2\xi}-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^22\theta}\right].$$

另外，因为

$$\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{\eta=2y_0-\xi}=\frac{(n-1)(n-2)\sin(2y_0-\xi)}{-2\sin\xi\sin 2y_0},$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{\eta=2y_0-\xi}\right)=\frac{(n-1)(n-2)}{2\sin\xi}$$

(这里我们用到 $F'(\dot\tau_2)|_{\eta=2y_0-\xi}=-(n-1)(n-2)$).

因为 $$\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}=F''\left[\left(\frac{\partial\tau_2}{\partial\eta}\right)^2-\frac{\partial\tau_2}{\partial\eta}\frac{\partial\tau_2}{\partial\xi}\right]+F'\left[\frac{\partial^2\tau_2}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\tau_2}{\partial\xi\partial\eta}\right],$$

易知

$$\left[\left(\frac{\partial\dot\tau_2}{\partial\eta}\right)^2-\frac{\partial\dot\tau_2}{\partial\eta}\frac{\partial\dot\tau_2}{\partial\eta}\right]\Big|_{\eta=2y_0-\xi}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2\dot\tau_2}{\partial\eta}-\frac{\partial^2\dot\tau_2}{\partial\xi\partial\eta}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi}=\frac{1}{2\sin^2\xi},$$

$$\therefore \qquad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\right]\Big|_{\eta=2y_0-\xi}=-\frac{(n-1)(n-2)}{2\sin^2\xi}.$$

$$\therefore \quad \lambda_3\Big|_{\eta=2y_0-\xi}=\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\right)\Big|_{\eta=2y_0-\xi}-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\Big|_{\eta=2y_0-\xi}\right)\right]$$

$$=-\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2\xi}\lambda_2.$$

因此,(5.1.13)就变为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

$$=\left[\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2\xi}-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2\theta}\right]V+\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2\xi}\lambda_2.$$

至此,引理 4 得证.

1.2 主要结果的证明

现在证明 $u(x,y)$确是问题(Ⅰ)的解,为此要验证 $u(x,y)$满足方程(5.1.4)并适合条件(5.1.6).对前者,只需验证

$$v(x,y)=\left[\frac{\sin 2(x-y)}{\sin^2(x+y)}\right]^{\frac{n-2}{2}}u(x,y)$$

适合方程(5.1.5).

下面我们就 $n=4$, $n>4$ 及 $n=3$ 三种情况分别进行验证.

1. 当 $n=4$ 时.

1°. 此时

$$v(x,y)=2\int_y^x \frac{f_1(2y_0)}{\sin^2 2y_0}F(3,-2,1,D_2)\mathrm{d}y_0,$$

注意到 $D_2|_{y_0=x}=D_2|_{y_0=y}=0$, $F(3,-2,1,0)=1$,我们有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=2\int_y^x \frac{f_1(2y_0)}{\sin^2 2y_0}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y_0-2\frac{f_1(2y)}{\sin^2 2y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{y_0=y}.$$

$$\because \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y_0=y}=[F'D_2(-\cot(y_0-x)-\cot(x+y))]|_{y_0=y}=0,$$

又由推论 3 知

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\sin^2(x+y)}F,$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=2\int_y^x \frac{f_1(2y_0)}{\sin^2 2y_0}\left[-\frac{6}{\sin^2(x+y)}F\right]\mathrm{d}y_0=-\frac{6}{\sin^2(x+y)}v,$$

这就证明了 $v(x,y)$适合(5.1.5).

2°. 令 $y_0=y+(x-y)\alpha$,则

$$u(x,y)=$$

$$2\int_0^1 f_1(2y+2(x-y)\alpha)\frac{\sin^2(x+y)F(3,\ -2,1,\dot{D}_2)}{\sin 2(x-y)\sin^2[2y+2(x-y)\alpha]}(x-y)\mathrm{d}\alpha\ ,$$

其中

$$\dot{D}_2=\frac{\sin[(x-y)\alpha]\sin[(x-y)(1-\alpha)]}{\sin(x+y)\sin[2y+2(x-y)\alpha]}.$$

由于$\dot{D}_2|_{x=y}=0$，$F(3,-2,1,0)=1$，易见

$$u(x,y)_{x=y}=f_1(2y).$$

3° 作变换 $\xi=x+y$，$\theta=x-y$，在此变换下有

$$u=D_3\int_0^1 f_*F(3,-2,1,D_4)\mathrm{d}\alpha,$$

其中

$$D_3=\frac{2\theta\sin^2\xi}{\sin 2\theta},\ f_*=\frac{f_1(\xi-\theta+2\theta\alpha)}{\sin^2(\xi-\theta+2\theta\alpha)},\ D_4=\frac{\sin(\theta\alpha)\sin(\theta-\alpha\theta)}{\sin\xi\ \sin(\xi-\theta+2\theta\alpha)}.$$

为了验证

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=y}=0,$$

只需验证

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}=0.$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial D_3}{\partial\theta}\cdot\int_0^1 f_*F\mathrm{d}\alpha+D_3\int_0^1\left[(-1+2\alpha)f'_*F+f_*F'\frac{\partial D_4}{\partial\theta}\right]\mathrm{d}\alpha,$$

由于

$$\frac{\partial D_3}{\partial\theta}=2\sin^2\xi\frac{\sin 2\theta-2\theta\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta},$$

$$\therefore\quad\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial D_3}{\partial\theta}=0.$$

易知

$$\lim_{\theta\to 0}D_3=\sin^2\xi,\ \lim_{\theta\to 0}F(3,\ -2,1,D_4)=1.$$

由于

$$\frac{\partial D_4}{\partial\theta}=\frac{\alpha\cos(\alpha\theta)\sin(\theta-\alpha\theta)+(1-\alpha)\cos(\theta-\alpha\theta)\sin(\alpha\theta)}{\sin\xi\ \sin(\xi-\theta+2\theta\alpha)}$$
$$-2\alpha D_4\cot(\xi-\theta+2\alpha\theta),$$

易见

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial D_4}{\partial\theta}=0.$$

综上所述,所以有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial u}{\partial\theta}=\sin^2\xi f'(\xi)\int_0^1(-1+2\alpha)\mathrm{d}\alpha=0.$$

2. 当 $n>4$ 时.

1°.

$$v(x,y)=\frac{2\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_y^x f_*\left[\lambda_2+\int_{2y_0-x-y}^{-x+y}\lambda_3\frac{\partial F(n-1,-n+2,1,\tau_2)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}y_0,$$

其中

$$f_*=\frac{f_1(2y_0)}{(\sin 2y_0)^{n-2}},\ \lambda_2,\lambda_3,\tau_2\ \text{见}(5.1.7).$$

注意到 $\lambda_0|_{y_0=x}=0$,我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{2\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}&\left\{\int_y^x f_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\lambda_2+\int_{2y_0-x-y}^{-x+y}\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}y_0\right.\\&+f_*(2x)\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x-y}^{-x+y}\left.\left(\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\right|_{y_0=x}\mathrm{d}\eta\right]\\&\left.-f_*(2y)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2+\int_{2y_0-x-y}^{x+y}\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta\right)\right]\right|_{y_0=y}\right\}.\end{aligned}\quad(5.1.14)$$

$$\begin{aligned}\because\ &\left.\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2+\int_{2y_0-x-y}^{-x+y}\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta\right)\right]\right|_{y_0=y}\\&=\left[\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}+\int_{2y_0-x-y}^{-x+y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\eta-\left.\left(\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\right|_{\eta=-x+y}\right.\\&\quad\left.\left.+\left.\left(\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\right|_{\eta=2y_0-x-y}\right]\right|_{y_0=y}\equiv 0\end{aligned}$$

($\because$ 当 $y_0=y$ 时,右端积分的上下限合二为一,故此积分$=0$,而$\left.\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\right|_{y_0=y}=0$是显然的,又 $\because$ $\lambda_3|_{\eta=-x+y}=0$,$(\lambda_3|_{\eta=2y_0-x-y})|_{y_0=y}=0$,故上式后二项也为零).又因

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x-y}^{-x+y}\left.\left(\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\right|_{y_0=x}\mathrm{d}\eta\right]\\&=\int_{x-y}^{(x-y)}\left[\frac{\partial\lambda_3}{\partial y}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial\eta}\right|_{y_0=x}\right)+\lambda_3\frac{\partial}{\partial y}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial\eta}\right|_{y_0=x}\right)\right]\mathrm{d}\eta\\&\quad+\left.\left[\lambda_3\left(\left.\frac{\partial F}{\partial\eta}\right|_{y_0=x}\right)\right]\right|_{\eta=-x+y}+\left.\left[\lambda_3\left(\left.\frac{\partial F}{\partial\eta}\right|_{y_0=x}\right)\right]\right|_{\eta=x-y}=0.\end{aligned}$$

这是因为等式右端后二项显然为零,而第一项的被积函数是 η 的奇函数,其积分值为零(易见 λ_3 是 η 的偶函数,同样 $\frac{\partial\lambda_3}{\partial y}$ 也是 η 的偶函数.易见

$$\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{y_0=x}=\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\tau_2}\Big|_{y_0=x}\right)\frac{\sin\eta}{2\sin(x+y)\sin 2x}$$

是 η 的奇函数,同样 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{y_0=x}\right)$ 也是 η 的奇函数.故被积函数是 η 的奇函数).因此在(5.1.14)右端只留下第一项.

容易验证

$$\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x\partial y}=-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2(x-y)}\lambda_2.$$

令

$$V=\int_{2y_0-x-y}^{x+y}\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta,$$

则由引理 4 知

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=\left[\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2(x+y)}-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2(x-y)}\right]V+\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2(x+y)}\lambda_2,$$

因此(5.1.14)就变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{2\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_y^x\left[\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2(x+y)}-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2(x-y)}\right]f_1[\lambda_2+V]\mathrm{d}y_0$$

$$-\left[\frac{(n-1)(n-2)}{\sin^2(x+y)}-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2(x-y)}\right]v.$$

这表明 $v(x,y)$ 适合(5.1.5).

2°. 令 $y_0=y+(x-y)\alpha$, $\eta=y-x+2(x-y)\alpha\beta$,则

$$u(x,y)=\frac{2\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left[\int_0^1(f_1\lambda_1\lambda_2)\Big|_{y_0=y+(x-y)\alpha}(x-y)\mathrm{d}\alpha\right.$$

$$\left.+\int_0^1 f_1 2\alpha\mathrm{d}\alpha\int_1^0\left(\lambda_1\lambda_3\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\Big|_{\substack{y_0=y+(x-y)\alpha\\ \eta=y-x+2(x-y)\alpha\beta}}(x-y)^2\mathrm{d}\beta\right].$$

由于

$$\frac{\partial F}{\partial\eta}=F'\frac{\partial\tau_2}{\partial\eta}=F'\frac{\sin\eta}{\sin(x+y)\sin 2y_0},$$

$$(x-y)^2(\lambda_1\lambda_3)\Big|_{\substack{y_0=y+(x-y)\alpha\\ \eta=y-x+2(x-y)\alpha\beta}}$$

$$=\left[\frac{\sin^2(x+y)\sin(2(x-y)\alpha\beta)\sin(2(x-y)(1-\alpha\beta))}{\sin^2 2(x-y)\sin^2(2y+2(x-y)\alpha)}\right]^{\frac{n-4}{2}}$$

$$\cdot \frac{\sin^2(x+y)(x-y)^2}{\sin 2(x-y)\sin^2(2y+2(x-y)\alpha)},$$

由此易见当 $x\to y$ 时，$u(x,y)$的表达式中第二个积分等于零. 由于

$$(\lambda_1\lambda_2)\Big|_{y_0=y+(x-y)\alpha}=\left[\frac{\sin^2(x+y)\sin(2(x-y)(1-\alpha))\sin(2\alpha(x-y))}{\sin^2 2(x-y)\sin^2(2y+2(x-y)\alpha)}\right]^{\frac{n-4}{2}}$$

$$\cdot\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)\sin^2(2y+2(x-y)\alpha)},$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to y}(\lambda_1\lambda_2)\Big|_{y_0=y+(x-y)\alpha}(x-y)=\frac{1}{2}\alpha^{\frac{n-4}{2}}(1-\alpha)^{\frac{n-4}{2}}.$$

$$\therefore\quad u(x,y)\Big|_{x=y}=\frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_0^1 f_1(2y)\alpha^{\frac{n-4}{2}}(1-\alpha)^{\frac{n-4}{2}}\mathrm{d}\alpha$$

$$=\frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}B\left(\frac{n-2}{2},\frac{n-2}{2}\right)f_1(2y)=f_1(2y).$$

3°. 作变换 $\xi=x+y,\theta=x-y$,此时

$$u=\frac{2\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left[\int_0^1 f_* z_1\mathrm{d}\alpha+\int_0^1\mathrm{d}\alpha\int_1^0 f_* z_2\frac{\partial F(\tau_1)}{\partial\eta}\mathrm{d}\beta\right]$$

$$=\frac{2\Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}[V_1+V_2],$$

其中

$$f_*=\frac{f_1(\xi-\theta+2\theta\alpha)\sin^{n-2}\xi}{[\sin(\xi-\theta+2\theta\alpha)]^{n-2}},$$

$$z_1=\left[\frac{\sin(2\theta(1-\alpha))\sin(2\theta\alpha)}{\sin^2 2\theta}\right]^{\frac{n-4}{2}}\frac{\theta}{\sin 2\theta},$$

$$z_2=\left[\frac{\sin(2\theta(1-\alpha\beta))\sin(2\alpha\beta\theta)}{\sin^2 2\theta}\right]^{\frac{n-4}{2}}\frac{2\alpha\theta^2}{\sin 2\theta},$$

$$\tau_1=\frac{\sin(\theta(1-\alpha+\alpha\beta))\sin(\theta(\alpha-\alpha\beta))}{\sin\xi\,\sin(\xi-\theta+2\alpha\theta)}.$$

因此，为了验证

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x=y}=0,$$

只需验证

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}=0,$$

由于

$$\frac{\partial V_2}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}=\int_0^1\mathrm{d}\alpha\int_1^0\left[\frac{\partial(f_*F_*)}{\partial\theta}z_2\tau_*+f_*F_*\frac{\partial(z_2\tau_*)}{\partial\theta}\right]\Big|_{\theta=0}\mathrm{d}\beta,$$

其中

$$F_* = \frac{F'(\tau_1)}{\sin\xi\,\sin(\xi - \theta + 2\alpha\theta)},$$

$$\tau_* = \sin(\theta(2\alpha\beta - 1)),$$

且有

$$\frac{\partial F(\tau_1)}{\partial \eta} = F_*\tau_*.$$

又 ∵ $f_*, \frac{\partial f_*}{\partial \theta}, F_*, \frac{\partial F_*}{\partial \theta}$ 当 $\theta \to 0$ 时都存在确定的极限,易见$(z_2\tau_*)|_{\theta=0}=0$. $(z_2\tau_*)$又是 θ 的偶函数,∴ $\theta=0$ 至少是 $z_2\tau_*$ 的二阶零点.因此

$$\left.\frac{\partial(z_2\tau_*)}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0.$$

∴ 有

$$\left.\frac{\partial V_2}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0.$$

由

$$\frac{\partial V_1}{\partial \theta} = \int_0^1 \left[\frac{\partial f_*}{\partial \theta} z_1 + f_* \frac{\partial z_1}{\partial \theta}\right] \mathrm{d}\alpha,$$

易见

$$\lim_{\theta \to 0} z_1 = \frac{1}{2}\alpha^{\frac{n-4}{2}}(1-\alpha)^{\frac{n-4}{2}},$$

又 z_1 是 θ 的偶函数,因此必有

$$\left.\frac{\partial z_1}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0.$$

由于

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\partial f_*}{\partial \theta} = f_1'(\xi)(2\alpha - 1) - (n+2)f_1(\xi)\cot\xi(2\alpha - 1),$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \left.\frac{\partial V_1}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} &= [f_1'(\xi) - (n+2)f_1(\xi)\cot\xi]\int_0^1 (2\alpha - 1)\frac{\alpha^{\frac{n-4}{2}}(1-\alpha)^{\frac{n-4}{2}}}{2}\mathrm{d}\alpha \\
&= [f_1'(\xi) - (n+2)f_1(\xi)\cot\xi]\left[B\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}\right) - \frac{1}{2}B\left(\frac{n-2}{2}, \frac{n-2}{2}\right)\right] = 0.
\end{aligned}$$

∴ 有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0.$$

3. 当 $n=3$ 时.

$$\because \quad \frac{\partial F(2,\ 1,1,\tau_2)}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\eta}(1-2\tau_2)=\quad 2\frac{\partial\tau_2}{\partial\eta}$$
$$=\frac{-\sin\ \eta}{\sin(x+y)\sin 2y_0}.$$

又

$$\int_{2y_0-x-y}^{-x+y}\left[\frac{\sin 2(x-y)}{\sin(x-y+\eta)\sin(x-y-\eta)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{-\sin\ \eta}{\sin(x+y)\sin 2y_0}\mathrm{d}\eta=\lambda\Lambda \tag{5.1.15}$$

其中 λ、Λ 与引理 3 中的相同

$(\because\quad \sin(x-y+\eta)\sin(x-y-\eta)=\cos^2\eta-\cos^2(x-y))$.

因此,把与 η 无关的因子提到积分号外,(5.1.15)的被积函数就是

$$-[\cos^2\eta-\cos^2(x-y)]^{-\frac{1}{2}}\sin\ \eta.$$

这是容易积分的,因而不难验证(5.1.15 成立).

$$\therefore\qquad \int_{2y_0-x-y}^{-x+y}A_2\frac{\partial F(2,-1,1,\tau_2)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta=\frac{\Lambda}{\sin^2 2y_0},$$

$\therefore$ 当 $x>y$ 时有

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_y^x f_1(2y_0)\left[A_1+\frac{\Lambda}{\sin^2 2y_0}\right]\mathrm{d}y_0,$$
$$v(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_y^x f_*(2y_0)[\tau+\lambda\Lambda]\mathrm{d}y_0, \tag{5.1.16}$$

其中 $f_*=f_1(2y_0)(\sin 2y_0)^{-1}$,$\tau$、$\lambda$、$\Lambda$ 与引理 3 同,A_1 见(5.1.7).

1°. 记

$$T=[\sin 2(x-y_0)\sin 2(y_0-y)]^{\frac{1}{2}},\quad Q=\frac{[\sin 2(x-y)]^{\frac{1}{2}}}{\sin 2(x+y-2y_0)},$$
$$v_1=\int_y^x f_*\tau\mathrm{d}y_0,\quad v_2=\int_y^x f_*\lambda\Lambda\mathrm{d}y_0, \tag{5.1.17}$$

则

$$v_1=\int_y^x f_*Q\mathrm{d}T=-\int_y^x T\frac{\partial}{\partial y_0}(f_*Q)\mathrm{d}y_0.$$

易知

$$\left[T\frac{\partial}{\partial y_0}(f_*Q)\right]\bigg|_{y_0=x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[T\frac{\partial}{\partial y_0}(f_*Q)\right]\right)\bigg|_{y_0=y}=0,$$

$$\therefore\qquad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}=-\int_y^x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[T\frac{\partial}{\partial y_0}(f_*Q)\right]\mathrm{d}y_0.$$

记

$$Q_1=\frac{[\sin 2(x-y)\cos 2(x+y-2y_0)]^{\frac{1}{2}}}{[\sin 2(x+y-2y_0)]^{2}},$$

则

$$\frac{\partial}{\partial y_0}(f_* Q)=\frac{\partial f_*}{\partial y_0}Q+4f_* Q_1,$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}=-\int_y^x\left[\frac{\partial f_*}{\partial y_0}\frac{\partial^2(TQ)}{\partial x\partial y}+4f_*\frac{\partial^2(TQ_1)}{\partial x\partial y}\right]\mathrm{d}y_0$$

$$=\left(f_*\frac{\partial^2(TQ)}{\partial x\partial y}\right)\Big|_y^x+\int_y^x\left[f_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial(TQ)}{\partial y_0}\right)-4f_*\frac{\partial^2(TQ_1)}{\partial x\partial y}\right]\mathrm{d}y_0.$$

$$\because\quad \frac{\partial(TQ)}{\partial y_0}=4TQ+\tau,$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}=-\left(f_*\frac{\partial^2(TQ)}{\partial x\partial y}\right)\Big|_y^x+\int_y^x f_*\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y_0.$$

记

$$H_1=\frac{\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x-y_0)\sin 2(x+y-2y_0)}+\frac{\sin 4(y-y_0)}{\sin 2(x-y)\sin 2(x+y-2y_0)},$$

$$H_2=-\frac{\sin 2(x-y_0)}{\sin 2(y-y_0)\sin 2(x+y-2y_0)}-\frac{\sin 4(x-y_0)}{\sin 2(x-y)\sin 2(x+y-2y_0)},$$

则

$$\frac{\partial(TQ)}{\partial x}=TQH_1,$$

$$\frac{\partial^2(TQ)}{\partial x\partial y}=TQ\left[H_1H_2+\frac{2}{\sin^2 2(x-y)}+\frac{4}{\sin^2 2(x+y-2y_0)}\right].$$

$\therefore$ 有

$$\left(f_*\frac{\partial^2(TQ)}{\partial x\partial y}\right)\Big|_y^x=0.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}=\int_y^x f_*\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y_0.$$

由引理 2,可知

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\sin^2 2(x-y)}\tau,$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}=\int_y^x f_*\frac{\tau}{\sin^2 2(x-y)}\mathrm{d}y_0. \tag{5.1.18}$$

容易验证

$$(\lambda\Lambda)\Big|_{y_0=x}=0,\quad \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\Lambda\right)\Big|_{y_0=x}=0.$$

而且

$$\because \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{d\Lambda}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \frac{\cos(2y_0 - x - y)\sin 2(y_0 - y)}{[\sin 2(y_0 - y)\sin 2(x - y_0)]^{-\frac{1}{2}}\cos(x - y)\cos(2y_0 - x - y)},$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right)\Big|_{y_0 = y} = 0.$$

因此

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} = \int_y^x f_* \frac{\partial^2(\lambda \Lambda)}{\partial x \partial y} \mathrm{d}y_0$$

由引理 3 可知

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} = \int_y^x f_* \left\{\left[\frac{2}{\sin^2(x+y)} + \frac{1}{\sin^2 2(x-y)}\right]\lambda\Lambda + \frac{2\tau}{\sin^2(x+y)}\right\}\mathrm{d}y_0. \tag{5.1.19}$$

由(5.1.16)～(5.1.19)可知

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \left[\frac{2}{\sin^2(x+y)} + \frac{1}{\sin^2 2(x-y)}\right]v,$$

这表明当 $x > y$ 时 $v(x, y)$ 适合(5.1.5)，显然当 $x < y$ 时也成立.

2° 令 $y_0 = y + (x - y)\alpha$，当 $x > y$ 时

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 f_1(2y + 2(x-y)\alpha)$$

$$\cdot \left\{\left[\frac{\sin^2(x+y)\csc^2(2y + 2(x-y)\alpha)}{\sin(2(x-y)(1-\alpha))\sin(2\alpha(x-y))}\right]^{\frac{1}{2}}(x-y)\right.$$

$$\left. + \frac{x-y}{\sin^2(2y+2(x-y)\alpha)}\Lambda\Big|_{y_0 = y+(x-y)\alpha}\right\}\mathrm{d}\alpha.$$

易见，当 $x \to y$ 时，花括号内第二项为零. 因此，当 $x \to y^+$ 时，有

$$u(x, y)\big|_{x=y^+} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 f_1(2y)\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}(1-\alpha)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\alpha = f_1(2y).$$

当 $x < y$ 时，$u(x, y)$ 的表达式与 $x > y$ 时的表达式相差一负号，故有

$$u(x, y)\big|_{x=y^-} = f_1(2y).$$

因此，有

$$u(x, y)\big|_{x=y} = f_1(2y).$$

3° 令 $\xi = x + y$，$\theta = x - y$，当 $x > y$ 时($x < y$ 时类似)

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^1 f_*(\xi - \theta + 2\alpha\theta)\sin\xi\left[\frac{\theta^2}{\sin(2\theta(1-\alpha))\sin(2\alpha\theta)}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\alpha$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^1 f_*(\xi - \theta + 2\alpha\theta)\theta\Lambda\Big|_{y_0 = \frac{\xi-\theta}{2}+\alpha\theta}\mathrm{d}\alpha = u_1 + u_2,$$

只需验证

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0}=\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0}+\frac{\partial u_2}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0}=0.$$

记

$$\Lambda_0=\Lambda\,|_{y_0=\left(\frac{\xi-\theta}{2},\,\alpha\theta\right)}=-\ln\frac{1+\sqrt{1-z}}{z_0},\qquad z_0=\frac{\cos\theta}{\cos((1-2\alpha)\theta)},$$

可见 Λ_0 是 θ 的偶函数，且 $\lim\limits_{\theta\to 0}\Lambda_0=0$. 因此，$\theta=0$ 是 Λ_0 的至少二阶零点，是 $\theta\Lambda_0$ 的至少三阶零点. 因此

$$\frac{\partial u_2}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0^+}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\left[f'_*\theta\Lambda_0(-1+2\alpha)+f_*\frac{\partial(\theta\Lambda_0)}{\partial\theta}\right]_{\theta=0^+}\mathrm{d}\alpha=0.$$

记

$$\Lambda_1=\left[\frac{\theta^2}{\sin(2\theta(1-\alpha))\sin(2\alpha\theta)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

则

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\left[\sin\xi f'_*(2\alpha-1)\Lambda_1+f_*\sin\xi\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\theta}\right]\mathrm{d}\alpha,$$

由于

$$\Lambda_1|_{\theta=0}=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}(1-\alpha)^{-\frac{1}{2}},\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\theta}=0.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{\partial u_1}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0}&=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\xi f'_*(\xi)\,\frac{1}{2}(2\alpha-1)\alpha^{\frac{-1}{2}}(1-\alpha)^{\frac{-1}{2}}\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{2}{\pi}\sin\xi f'_*(\xi)\left[B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=0.\end{aligned}$$

所以有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\Big|_{\theta=0^+}=0.$$

同样有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\Big|_{\theta=0^-}=0.$$

因此有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\Big|_{\theta=0}=0.$$

至此，我们完全验证了 $u(x,y)$ 确是问题(Ⅰ)的解.

本节内容取自文[YW42].

Ⅱ. 一个变系数的波动方程的 Cauchy 问题之解

在[LZG]中，曾研究过具有最大对称性的物理时空，现在命之为 $\mathfrak{M}_K$，其中 K 代表曲率. 进一步的问题自然是要研究这些时空的波动方程的解. 当 $K=0$，这是熟知的经典的常系数的波动方程，它的讨论在数学物理微分方程的书中都有. 当 $K\neq 0$ 时，$\mathfrak{M}_K$ 中的波动方程是变系数的，它的 Cauchy 问题的解的具体表达式还未见到过. 由于 $K>0$ 与 $K<0$ 情形的解决方法都是一样的，我们这里仅讨论 $K>0$ 的情形. 在此情形可以经变数的变换化为下面的方程(5.2.5). 这个方程在单位超球内是椭圆型的，它的讨论已包含在[HLu1]中. 此方程在单位超球内外一起而言，是混合型的，当 $n=2$ 时在[Hau2]中曾讨论过. 本文仅讨论在单位超球外部，此方程是双曲型的，但只纯粹从数学的角度讨论，其物理解释，以后有机会时再讨论.

这里所用的方法是经典的 Hadamard 方法[Had, WXi]，但有两处地方稍加变更：第一我们所用的基本解与 Hadamard 所用的有所不同；第二我们的降维方法亦非沿用 Hadamard 的方法. 这是由于我们研究的方程是具体的方程，它的基本解可以从解测地线微分方程及利用空间的最大对称性具体地得出. 降维法也可以不用一般的复杂的方法[Had]. 由于物理上有兴趣的是维数 $n=4$，是偶维，需用降维法处理，其 Cauchy 问题解的具体表达式见本文之末.

我们考虑常曲率劳伦兹空间 $\mathfrak{M}_K$

$$1+K\eta_{pq}x^px^q>0 \tag{5.2.1}$$

中的波动方程

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{|\tilde g|}\,\tilde g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right)=0, \tag{5.2.2}$$

其中，K 为实常数，$(\eta_{pq})=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde g^{jk}=(1+K\eta_{pq}x^px^q)(\eta_{jk}+Kx^jx^k)\\
&\tilde g_{jk}=\frac{\eta_{jk}}{1+K\eta_{pq}x^px^q}-\frac{K\eta_{jp}x^p\eta_{kq}x^q}{(1+K\eta_{pq}x^px^q)^2}\\
&|\tilde g|=|\det(\tilde g_{jk})|=|1+K\eta_{pq}x^px^q|^{-(n+1)}
\end{aligned}\right\}. \tag{5.2.3}$$

这里使用了符号省略.

我们研究方程(5.2.2)的 Cauchy 问题,而且只考虑 $K>0$ 的情形(其他情形与此类似).这时,作变换

$$\bar{x}^i=\sqrt{K}x^i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

在这变换下 $\mathfrak{M}_K$ 与相应的波动方程恰巧变成为在(5.2.1),(5.2.2)及(5.2.3)中令 $K=1$ 的情况.因此,在下面只讨论 $K=1$ 的情形.这时作变换

$$\left.\begin{aligned} &x_i=\frac{x^i}{x^n},\ i=1,2,\cdots,n-1,\\ &x_n=\frac{1}{x^n}. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.4}$$

在这变换下 $\mathfrak{M}_1$ 变成 $\mathfrak{M}$

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2>1.$$

方程(5.2.2)变成

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g|}\,g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0. \tag{5.2.5}$$

其中

$$g^{jk}=(1-|x|^2)(\delta_{jk}-x_jx_k),$$

$$g_{jk}=\frac{x_jx_k}{(|x|^2-1)^2}-\frac{\delta_{jk}}{|x|^2-1},$$

$$|g|=|\det(g_{jk})|=(|x|^2-1)^{-(n+1)}.$$

显然,方程(5.2.5)在空间 $\mathfrak{M}$ 内是正规双曲型.我们研究方程(5.2.5)的 Cauchy 问题

$$\text{I.}\ \begin{cases} \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g|}\,g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0,\\ U\Big|_{x\in S}=U_0(x),\quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}\Big|_{x\in S}=U_1(x). \end{cases}$$

其中 S 为空向曲面,U_0,U_1 是连续 n 次可微函数,$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}$表示函数 u 对于方程(5.2.5)的在曲面 S 上的补法线方向微商(这里所用术语见[LZG]).习知,问题 I 的解存在且惟一.本文目的是把这解具体求出来.众所周知,偏微分方程各种定解问题中,将解用显式表示出来的情形是非常罕见的,也是相当困难的,然而研究微分方程的根本目的却是把解求出来.饶有兴趣的是,对问题 I 我们得到了解的具体表达式.本文,我们首先求出方程(5.2.2)及(5.2.5)的非 Hadamard 意义下的基本解,然后利用它把问题 I 的解用瑕积分的有限部分表示出来,最后对具体给出了的空向曲面我

们把瑕积分的有限部分化成通常的积分.

Ⅱ.1 基 本 解

方程(5.2.2)等价于下列方程

$$(1+\eta_{pq}x^p x^q)\left[(\eta_{jk}+x^j x^k)\frac{\partial^2 u}{\partial x^j\partial x^k}+2x^j\frac{\partial u}{\partial x^j}\right]=0. \qquad (5.2.6)$$

易知,为了求正规双曲型的基本解,必须求出特征锥面,而特征锥面与测地距离有密切关系,因此,我们首先求出空间 $\mathfrak{M}_1$ 中线元为:$ds^2=\tilde{g}_{jk}dx^j dx^k$ 的测地线,此即要解测地线方程

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x^j}{dt^2}+\tilde{\Gamma}^j_{kl}(x)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}=0,\\&x^j(0)=a^j,\ x^j(1)=b^j.\end{aligned} \qquad (5.2.7)$$

其中 $$\tilde{\Gamma}^j_{kl}(x)=\frac{1}{2}\tilde{g}^{jp}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{kp}}{\partial x^l}+\frac{\partial\tilde{g}_{lp}}{\partial x^k}-\frac{\partial\tilde{g}_{kl}}{\partial x^p}\right).$$

经计算 $$\tilde{\Gamma}^j_{kl}(x)=-\frac{(\delta_{lj}\eta_{kr}+\delta_{kj}\eta_{lr})x^r}{1+\eta_{pq}x^p x^q}.$$

于是(5.2.7)可化为

$$\frac{d^2x^j}{dt^2}-\frac{2\eta_{kl}x^k\dfrac{dx^l}{dt}}{1+\eta_{pq}x^p x^q}\frac{dx^j}{dt}=0,$$

即 $$\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{dx^j}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\ln(1+\eta_{pq}x^p x^q)=0.$$

积分之后有 $$\frac{dx^j}{dt}=(1+\eta_{pq}x^p x^q)A^j.$$

其中 A^j 为积分常数,由此有

$$\frac{dx^1}{A^1}=\frac{dx^2}{A^2}=\cdots=\frac{dx^n}{A^n}. \qquad (5.2.8)$$

因而得

定理 空间 $\mathfrak{M}_1$ 的测地线是直线.

当 $A^n\neq 0$ 时,由(5.2.8)积分得到直线方程为

$$x^\alpha=\frac{A^\alpha}{A^n}x^n+B^\alpha,\ \alpha=1,2,\cdots,n-1. \qquad (5.2.9)$$

其中 B^α 为积分常数,要此直线经过 a、b 两点,便要求

$$\frac{A^\alpha}{A^n}=\frac{b^\alpha-a^\alpha}{b^n-a^n},\ B^\alpha=\frac{a^\alpha b^n-b^\alpha a^n}{b^n-a^n} \qquad (5.2.10)$$

先求原点与 c 点之间的测地距离 $\tilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(0,c)$. 当 $c^n\neq 0$ 时,据(5.2.9)、

(5.2.10)，则原点与 c 点之间的测地线能表达为

$$x^{\alpha}=\frac{c^{\alpha}}{c^{n}}x^{n},\ \alpha=1,2,\cdots,n-1.$$

原点与 c 点之间的测地距离定义为

$$\tilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(0,c)=\int_{0}^{1}\left|\tilde{g}_{jk}\frac{\mathrm{d}x^{j}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{k}}{\mathrm{d}t}\right|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\int_{0}^{c^{n}}\left|\tilde{g}_{jk}\frac{\mathrm{d}x^{j}}{\mathrm{d}x^{n}}\frac{\mathrm{d}x^{k}}{\mathrm{d}x^{n}}\right|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x^{n}.$$

由于沿测地线有

$$\frac{\mathrm{d}x^{j}}{\mathrm{d}x^{n}}=\frac{c^{j}}{c^{n}}=\frac{x^{j}}{x^{n}}.$$

所以有

$$\tilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(0,c)=\int_{0}^{c^{n}}\left|\frac{\eta_{jk}c^{j}c^{k}}{1+\eta_{pq}c^{p}c^{q}\left(\frac{x^{n}}{c^{n}}\right)^{2}}-\frac{(\eta_{jk}c^{j}c^{k})^{2}\left(\frac{x^{n}}{c^{n}}\right)^{2}}{\left[1+\eta_{pq}c^{p}c^{q}\left(\frac{x^{n}}{c^{n}}\right)^{2}\right]^{2}}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x^{n}}{c^{n}}$$

$$=\int_{0}^{c^{n}}\frac{|\eta_{jk}c^{j}c^{k}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x^{n}}{c^{n}}\right)}{1+|\eta_{pq}c^{p}c^{q}|\left(\frac{x^{n}}{c^{n}}\right)^{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+|\eta_{jk}c^{j}c^{k}|^{\frac{1}{2}}}{1-|\eta_{jk}c^{j}c^{k}|^{\frac{1}{2}}}.$$

现求任两点 a 与 b 之间的测地距离 $\tilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(a,b)$. 为此，我们指出，下列变换

$$y^{j}=\sqrt{1+\eta_{pq}x^{p}x^{q}}\frac{(x^{k}-a^{k})B_{k}^{j}}{1+\eta_{rs}a^{r}x^{s}},\ j=1,2,\cdots,n. \tag{5.2.11}$$

其中 a^{j} 与 B_{k}^{j} 为常数，适合

$$1+\eta_{pq}a^{p}a^{q}>0,\ \eta_{pq}B_{j}^{p}B_{k}^{q}=\eta_{jk}-\frac{\eta_{jr}\eta_{ks}a^{r}a^{s}}{1+\eta_{pq}a^{p}a^{q}}. \tag{5.2.12}$$

将 $\mathfrak{M}$ 变为 $\mathfrak{M}_{*}$. 参阅[HLu2].

作变换(5.2.11)，此变换将 a 点映为原点，设它把 b 点映为 c 点，则有

$$c^{j}=\sqrt{1+\eta_{pq}a^{p}a^{q}}\frac{(b^{k}-a^{k})B_{k}^{j}}{1+\eta_{pq}a^{p}a^{q}}. \tag{5.2.13}$$

由于测地线及测地距离经 $\mathfrak{M}_{*}$ 的运动群不变，因此有

$$\tilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(a,b)=\tilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(0,c)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+|\eta_{jk}c^{j}c^{k}|^{\frac{1}{2}}}{1-|\eta_{pq}c^{p}c^{q}|^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.2.14}$$

由(5.2.13)式有

$$\eta_{jk}c^{j}c^{k}=(1+\eta_{pq}a^{p}a^{q})\frac{\eta_{jk}(a^{r}-b^{r})(a^{s}-b^{s})B_{r}^{j}B_{s}^{k}}{(1+\eta_{il}a^{i}b^{l})^{2}}.$$

应用(5.2.12)的第二式,有

$$\eta_{jk}c^j c^k = \frac{1+\eta_{pq}a^p a^q}{(1+\eta_{il}a^i b^l)^2}\Big[\eta_{rs}(a^r-b^r)(a^s-b^s)$$

$$-\frac{1}{1+\eta_{\mu\nu}a^\mu a^\nu}\cdot\eta_{rp}\eta_{sq}a^p a^q(a^r-b^r)(a^s-b^s)\Big]$$

$$=\frac{1}{(1+\eta_{il}a^i b^l)^2}\{\eta_{rs}(a^r-b^r)(a^s-b^s)+\eta_{pq}a^p a^q\eta_{rs}b^r b^s-(\eta_{pq}a^p a^q)^2\}.$$

令

$$\varphi(a,b)=\frac{\eta_{rs}(a^r-b^r)(a^s-b^s)+\eta_{pq}a^p a^q\eta_{rs}b^r b^s-(\eta_{pq}a^p a^q)^2}{(1+\eta_{il}a^i b^l)^2}$$

(5.2.15)

由此得出点 a 与点 b 之间测地距离为

$$\tilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(a,b)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+|\tilde{\varphi}(a,b)|^{\frac{1}{2}}}{1-|\tilde{\varphi}(a,b)|^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.2.16}$$

经计算,易知

$$\tilde{\varphi}(a,b)=\left(\frac{1+\eta_{pq}a^p a^q}{1+\eta_{il}a^i b^l}\right)^2\tilde{g}_{rs}(a)(a^r-b^r)(a^s-b^s). \tag{5.2.17}$$

由于 $\tilde{\varphi}(a,b)=\tilde{\varphi}(b,a)$,故有

$$\varphi(a,b)=\left(\frac{1+\eta_{pq}b^p b^q}{1+\eta_{il}a^i b^l}\right)^2 g_{rs}(b)(a^r-b^r)(a^s-b^s). \tag{5.2.18}$$

因此,方程(5.2.6)的特征锥面就是使下式成立的所有 x 的集合所形成的超曲面

$$\tilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(x,a)=0,$$

据(5.2.14)此即 $\quad\tilde{\varphi}(x,a)=0,$

据(5.2.17)此即 $\quad\tilde{g}_{jk}(a)(x^j-a^j)(x^k-a^k)=0. \qquad (5.2.19)$

点 x 与点 a 之间测地距离的平方为

$$\tilde{\Gamma}(x,a)=\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+|\tilde{\varphi}(x,a)|^{\frac{1}{2}}}{1-|\tilde{\varphi}(x,a)|^{\frac{1}{2}}}\right]^2. \tag{5.2.20}$$

在变换(5.2.4)下,$\mathfrak{M}_*$ 变为 $\mathfrak{M}$,方程(5.2.2)变为方程(5.2.5),易知,$\mathfrak{M}$ 中任意点 x 与点 a 之间的测地距离的平方为

$$\Gamma(x,a)=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+|\varphi|^{\frac{1}{2}}}{1-|\varphi|^{\frac{1}{2}}}\right)^2. \tag{5.2.21}$$

此时,以 $ds^2=\sum_{j,k=1}^{n}g_{jk}dx_j dx_k$ 为线元,其中

$$\varphi = \varphi(x,a) = 1 - \frac{(|x|^2-1)(|a|^2-1)}{(ax'-1)^2}. \tag{5.2.22}$$

显然方程(5.2.5)等价于

$$\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + 2(|x|^2-1)\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0. \tag{5.2.23}$$

不难看出方程(5.2.23)的特征锥面为 $\varphi(x,a)=0$. 下面我们求方程(5.2.5)的基本解，令 $u=u(\varphi)$，方程(5.2.23)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right] + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2} - \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} - 2\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right] = 0. \tag{5.2.24}$$

经计算得 $$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{4(|a|^2-1)}{(ax'-1)^2}\varphi(\varphi-1),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2} - \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} - 2\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \frac{2(|a|^2-1)}{(ax'-1)^2}(3\varphi-n).$$

因此(5.2.24)式化为

$$2\varphi(\varphi-1)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + (3\varphi-n)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = 0. \tag{5.2.25}$$

令 $u=\varphi^{\frac{2-n}{2}}W(\varphi)$，方程(5.2.25)化为

$$\varphi(1-\varphi)\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\varphi^2} + \left[\frac{4-n}{2} - \left(\frac{7-2n}{2}\right)\varphi\right]\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{(n-2)(n-3)}{4}W = 0.$$

这是超几何方程，其解为

$$W = F\left(1-\frac{n}{2}, \frac{3}{2}-\frac{n}{2}, 2-\frac{n}{2}, \varphi\right).$$

当 n 为偶数时，此解无意义. 因此，当 n 为奇数 $2m+1$ 时，我们得到(5.2.25)式的解为

$$u = \varphi^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)}F\left(-m+\frac{1}{2}, -m+1, -m+\frac{3}{2}, \varphi\right).$$

当 n 为偶数 $2m$ 时，直接从(5.2.25)式，用递推方法，求得其解为

$$u(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k(2m-3)!!(m-k-1)!}{2^{k-1}(2m-2k-1)!!(m-1)!}\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^{m-k} + (-1)^{m-1}\frac{(2m-3)!!}{2^{m-1}(m-1)!}\ln\frac{\varphi}{(1+\sqrt{1-\varphi})^2}.$$

因此，方程(5.2.5)的基本解如下

当 $n=2m+1$ 时，

$$v(x,a)=\varphi^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)}F\left(-m+\frac{1}{2},-m+1,-m+\frac{3}{2},\varphi\right).$$

(5.2.26)

当 $n=2m$ 时,

$$v(x,a)=\frac{1}{\sqrt{1-\varphi}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k(2m-3)!!(m-k-1)!}{2^{k-1}(2m-2k-1)!!(m-1)!}\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^{m-k}$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{(2m-3)!!}{2^{m-1}(m-1)!}\ln\frac{\varphi}{(1+\sqrt{1-\varphi})^2}.\quad(5.2.27)$$

Ⅱ.2 Cauchy 问题的解

设正规双曲型微分算子

$$L(u)=\sum_{j,k=1}^{n}A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}B_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+Cu.$$

其共轭算子为

$$M(v)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2(A_{jk}v)}{\partial x_j\partial x_k}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(B_jv)+Cv.$$

习知,当 $n=2m+1$(奇数)时,$M(v)=0$ 的 Hadamard 意义下的基本解有如下形状

$$\tilde{v}(x,a)=\frac{V}{\tilde{\Gamma}^{m-\frac{1}{2}}}.$$

其中

1. $\tilde{\Gamma}(x,a)$ 是以 $ds^2=\sum_{j,k=1}^{n}B_{jk}dx_jdx_k$ 为线元的空间中,点 x 与点 a 之间的测地距离的平方,这里 $(B_{jk})=(A_{jk})^{-1}$.

2. 当 $x=a$ 时,$V|_{x=a}=|\Delta_a|^{-\frac{1}{2}}$,这里 $\Delta_a=\det(A_{jk})|_{x=a}$.

当基本解求得时,方程 $L(u)=f$ 的 Cauchy 问题解的表达式 Hadamard 已经在[Had]中求出.

但是我们现在所得到的方程(5.2.5)(自共轭的)的基本解(5.2.26)并不是 Hadamard 意义下的基本解,因为形如(5.2.26)的基本解 $v(x,a)$ 显然不满足上述两点.因此,对方程(5.2.5)的 Cauchy 问题就不能直接应用 Hadamard 的解的表达公式,下面,我们从形如(5.2.26)的基本解出发,导出问题Ⅰ的解的具体表达式.

设以 a 为顶点的特征锥面 $\Gamma(x,a)=0$(即 $\varphi(x,a)=0$)与空间曲面 S 形成一封闭曲面,如是得一闭域 T.其界面为 $\varphi=0$ 及 S_0,在 T 内挖去一个以 a 为中心的小球,设此球面与 T 交于一小块曲面为 $\sum$,余下部

分为 T'.

由于方程(5.2.5)是自共轭的齐次方程,设 u 是问题 I 的解,则形如(5.2.26)的基本解 $v(x,a)$ 也是方程(5.2.5)的共轭方程(即(5.2.5)自己)的基本解.在 T' 上,应用基本公式,我们就得到

$$\iint_{\Sigma+\Gamma+S_0}\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right)\mathrm{d}s=0 \qquad (5.2.28)$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}$ 是方程(5.2.5)的补法线方向导数(参阅[WXi]第三册第 42 页),而且有

$$\iint_{\Gamma}\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right)\mathrm{d}s=0.$$

(参阅[WXi]第三册第 43 页)

当 Σ 趋向于 a 时,有

$$\lim_{\Sigma\to a}\iint_{\Sigma}v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}s=0,\ \lim_{\Sigma\to a}\iint_{\Sigma}\frac{u\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\nu}}{\varphi^{m-\frac{1}{2}}}\mathrm{d}s=0.$$

(参阅[WXi]第三册第 43 页).

因此,(5.2.28)式就化为

$$\iint_{S_0}\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right)\mathrm{d}s+\frac{2m-1}{2}\iint_{\Sigma}\frac{uF\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu}}{\varphi^{m+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}s=0. \quad (5.2.29)$$

由(5.2.21)可见

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\varphi}=\Gamma^{\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}(1-\varphi)^{-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\Gamma}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\nu}=\Gamma^{-\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(1-\varphi)\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\nu}.$$

由定义

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\nu}=\sqrt{|g|}\sum_{j,k=1}^{n}g^{jk}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_k}\pi_j=\sqrt{|g|}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\nu_1}.$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu_1}$ 为方程(5.2.23)的补法线方向导数,$\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_n)$ 是曲面上点 x 处的单位法向量,而 $\Gamma(x,a)$ 是以 $\mathrm{d}s^2=\sum_{j,k=1}^{n}g_{jk}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k$ 为线元的点 x 与点 a 之间的测地距离的平方,而且当 $\varphi\to0$ 时,有 $\lim_{\varphi\to0}\frac{\Gamma}{\varphi}=1$.因此,当 $\Sigma\to a$(即 $\varphi\to0$)时,有

$$\lim_{\Sigma\to a}\sqrt{|g|}uF\varphi^{\frac{1}{2}}\Gamma^{-\frac{1}{2}}(1-\varphi)=\sqrt{|g(a)|}u(a),$$

$$\lim_{\Sigma\to a}\iint_{\Sigma}\frac{\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\nu_1}\mathrm{d}s}{\varphi^{m+\frac{1}{2}}}=\lim_{\Sigma\to a}\iint_{\Sigma}\frac{\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\nu_1}\mathrm{d}s}{\Gamma^{m+\frac{1}{2}}}=\frac{(-1)^m 2\Pi\Omega_{2m-2}}{(2m-1)\sqrt{|D_a|}}.$$

其中$|D_a|=|\det(g_{jk}(a))|=|g(a)|$，$\Omega_{2m-2}$是$2m-2$维单位超球的面积.这样，(5.2.29)式变为

$$\iint_{S_0}\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right)\mathrm{d}s+(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=0,$$

即

$$(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=\iint_{S_0}\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}-v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}\right)\mathrm{d}s=\iint_{S_0}\left(u_0\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}-vu_1\right)\mathrm{d}s. \tag{5.2.30}$$

仿照[WXi]中第三册第46页到第48页，可以验证(5.2.30)确是问题Ⅰ的解.因此我们得到了方程(5.2.5)的Cauchy问题，即问题Ⅰ的解的具体表达式(5.2.30).这是当$n=2m+1$(奇数)时的情形，当$n=2m$为偶数时，利用降维法.

此时，Cauchy问题为

$$\text{Ⅱ}.\begin{cases}\displaystyle\sum_{j,k=1}^{2m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g|}g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0,\\ u\Big|_{x\in S}=u_0,\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}\Big|_{x\in S}=u_1.\end{cases}$$

其中S为空向曲面，设其方程为$G(x_1,\cdots,x_{2m})=0$，很显然，问题Ⅱ的解也必然为如下问题的解

$$\text{Ⅲ}.\begin{cases}\displaystyle\sum_{j,k=1}^{2m+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g|}g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0,\\ u\Big|_{x\in S'}=u_0(x_1,\cdots,x_{2m}),\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}\Big|_{x\in S'}=u_1(x_1,\cdots,x_{2m}).\end{cases}$$

其中S'为如下方程所表示的曲面

$$\begin{cases}G(x_1,x_2,\cdots,x_{2m})=0,\\ x_{2m+1}\text{任意},\end{cases}$$

这是$2m+1$维空间中的一个柱面.

由上可知，问题Ⅲ的解可以由(5.2.30)表示，而问题Ⅲ的解是惟一的，因此由(5.2.30)所表示的解也就是问题Ⅱ的解，而且此解与最后一个变量无关，因此.我们对$n=2m$的情况得到问题Ⅱ的解的如下表达式

$$(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=\iint_{S_0}\left(u_0\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}-u_1v\right)\mathrm{d}s. \tag{5.2.31}$$

其中 a 是 $2m$ 维空间中的点，$v(x,a)$是方程(5.2.5)的基本解具有(5.2.26)的形式，但其中 $a=(a_1,\cdots,a_{2m},0)$. S_0'是 $\Gamma(x,a)=0$ 与 S'之交在S'上所范围的一部分曲面.

这样，我们对于方程(5.2.5)的 Cauchy 问题给出了它的解的具体表达形式(5.2.30)及(5.2.31)，式中的积分都是 Hadamard 意义下的瑕积分的有限部分.当空向曲面 S 具体给出时，可以把这种瑕积分的有限部分化为通常的积分.下面，当我们取 S 为超球面时，给出(5.2.30)及(5.2.31)的通常积分的表达式.

Ⅱ.3 Cauchy 问题的解(续)

1. 设 n 为奇数，即当 $n=2m+1$ 时，S 为超球面

$$x_1^2+\cdots+x_{2m+1}^2=r^2,\ r>1.$$

下面我们把(5.2.30)式化为通常积分.

因 $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu}=\left[-\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F+\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}\right]\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu}.$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu}=\sum_{j,k=1}^{n}\sqrt{g}g^{jk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\pi_j=-(|x|^2-1)^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\delta_{jk}-x_jx_k)\pi_j$$
$$=-(|x|^2-1)^{-\frac{n-1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(I-x'x)\pi'.$$

其中 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}=\left[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F-\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x}(I-x'x)\pi'(|x|^2-1)^{-m}.$$

其中 $\pi=|x|^{-1}(x_1,\cdots,x_{2m+1})$.我们作变换

$$y=xQ,$$

使得 Q 满足条件

$$QQ'=I^{(n)},\ aQ=(|a|,0,\cdots,0).\tag{5.2.32}$$

这是绕原点的一个旋转，它把 a 点转到$(|a|,0,\cdots,0)$，在这旋转下，超球面上的面积元素不变，而且有

$$\varphi=1-(|a|y_1-1)^{-2}(|a|^2-1)(|y|^2-1),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(I-x'x)\pi'(|x|^2-1)^{-m}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(I-y'y)y'|y|^{-1}(|y|^2-1)^{-m},$$
$$u_0=u_0(yQ'),\ u_1=u_1(yQ').$$

以此代入(5.2.30)，并将 y 仍记为 x，则(5.2.30)变为

$$(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a)=\iint_{S_0}\left\{u_0(xQ')\left[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F-\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}\right]\right.$$

$$\cdot (|x|^2-1)^{-m}|x|^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(I - x'x)x' - u_1(xQ')\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}F\Big\}\mathrm{d}s. \tag{5.2.33}$$

其中 Q 满足(5.2.32)，

$$\varphi = 1-(|a|x_1-1)^{-2}(|a|^2-1)(|x|^2-1). \tag{5.2.34}$$

S_0 是超球面 S 的一部分，其边界是此超球面与以$(|a|,0,\cdots,0)$为顶点的特征锥面的交集.

作变换 $x_1 = \left(r^2 - \sum_{i=1}^{2m}\lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, x_j = \lambda_{j-1}, j = 2,\cdots,2m+1.$

记 $\lambda_0 = \left(r^2 - \sum_{i=1}^{2m}\lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，由(5.2.34)式可知

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{2(|a|^2-1)(r^2-1)}{(|a|\lambda_0-1)^3}|a| - \frac{2(|a|^2-1)}{(|a|\lambda_0-1)^2}\lambda_0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\frac{2(|a|^2-1)}{(|a|\lambda_0-1)^2}\lambda_{i-1}, i=2,3,\cdots,2m+1.$$

在这变换下，经计算，(5.2.33)变为

$$(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a) = \iint\limits_{\sum_{i=1}^{2m}\lambda_i^2\leqslant\rho_0^2}\Big\{u_0(\lambda Q')\Big[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F - \varphi^{-\frac{2m-1}{2}}$$
$$\cdot\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{2m-1}{2}F\right) + \varphi^{-\frac{2m-3}{2}}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}\Big](r^2-1)^{-m}\frac{2(|a|\lambda_0-r^2)}{\lambda_0(|a|\lambda_0-1)}$$
$$- u_1(\lambda Q')v\frac{r}{\lambda_0}\Big\}\mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_{2m}. \tag{5.2.35}$$

其中 $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{2m}), \varphi = 1-(|a|\lambda_0-1)^{-2}(|a|^2-1)(r^2-1)$.

令
$$\rho_0 = \begin{cases} |a|^{-1}(\sqrt{|a|^2-1}-\sqrt{r^2-1}), & \text{当}|a|>r>1\text{时}, \\ |a|^{-1}(\sqrt{r^2-1}-\sqrt{|a|^2-1}), & \text{当}1<|a|<r\text{时}, \end{cases} \tag{5.2.36}$$

作极坐标变换

$$\begin{cases} \lambda_1 = \rho\cos\theta_1, \\ \lambda_2 = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{2m-1} = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2m-2}\cos\theta_{2m-1}, \\ \lambda_{2m} = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2m-2}\sin\theta_{2m-1}. \end{cases}$$

其中 $0<\rho\leqslant\rho_0, 0\leqslant\theta_{2m-1}\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta_i\leqslant\pi, i=1,2,\cdots,2m-2$. 在此变换下

$$u_0 = u_0((\rho,\theta)Q'),\ u_1 = u_1((\rho,\theta)Q'),$$

$$d\lambda_1\cdots d\lambda_{2m}=\rho^{2m-1}d\rho\dot{\Omega}_{2m-2}.$$

其中 $\dot{\Omega}_{2m-2}=\sin^{2m-2}\theta_1\sin^{2m-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{2m-2}\,\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{2m-1}$. 这是 $2m-1$ 维空间中的单位超球面 Ω_{2m-2} 的面积元素,这时(5.2.35)式变为:

$$(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a)=\int_{\Omega_{2m-2}}\dot{\Omega}_{2m-2}\int_0^{\rho_0}\left\{u_0\left[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F-\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}+\frac{2m-1}{2}F\right)+\varphi^{-\frac{2m-3}{2}}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}\right](r^2-1)^{-m}\frac{2(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-r^2)}{\sqrt{r^2-\rho^2}(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1)}\rho^{2m-1}$$

$$\left.-u_1\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}F\frac{r\rho^{2m-1}}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\right\}\mathrm{d}\rho. \qquad (5.2.37)$$

其中 $\varphi=(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1)^{-2}[(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1)^2-(|a|^2-1)(r^2-1)]$.

再作变数代换, $t=|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1$ 并记

$$\alpha_1=|a|r-1,\beta_1=\sqrt{(|a|^2-1)(r^2-1)}. \qquad (5.2.38)$$

在这变换下

$$\varphi=t^{-2}(t^2-\beta_1^2),\ \frac{2(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-r^2)(r^2-1)^{-m}}{\sqrt{r^2-\rho^2}(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1)}$$

$$=\frac{2|a|(t-r^2+1)(r^2-1)^{-m}}{t(t+1)},$$

$$\rho^{2m-1}\mathrm{d}\rho=-|a|^{-2m}(t+1)(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}=\frac{|a|r}{t+1}.$$

并令

$$\left.\begin{aligned}
F_1&=\frac{(2m-1)(t-r^2+1)(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}t^{2m}F}{|a|^{2m-1}(r^2-1)^m(t+\beta_1)^{\frac{2m+1}{2}}},\\
F_2&=-\frac{2(t-r^2+1)(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}}{|a|^{2m-1}(r^2-1)^m(t+\beta_1)^{\frac{2m-1}{2}}}t^{2m-2}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}+\frac{2m-1}{2}F\right),\\
F_3&=\frac{2(t-r^2+1)(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}}{|a|^{2m-1}(r^2-1)^m(t+\beta_1)^{\frac{2m-3}{2}}}t^{2m-4}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi},\\
F_4&=\frac{r(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}}{|a|^{2m-1}(t+\beta_1)^{\frac{2m-1}{2}}}t^{2m-1}F.
\end{aligned}\right\}$$

$$(5.2.39)$$

这样,易见(5.2.37)式化为

$$(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a)=\int_{\Omega_{2m-2}}\dot{\Omega}_{2m-2}\int_{\beta_1}^{\alpha_1}\left[\frac{u_0F_1}{(t-\beta_1)^{\frac{2m+1}{2}}}+\frac{(u_0F_2+u_1F_4)}{(t-\beta_1)^{\frac{2m-1}{2}}}\right.$$

$$+\frac{u_0F_3}{(t-\beta_1)^{\frac{2m-3}{2}}}\Bigg]\mathrm{d}t. \tag{5.2.40}$$

由于有

$$\int_{\beta_1}^{\alpha_1}\frac{A(t)\mathrm{d}t}{(t-\beta_1)^{p+\frac{1}{2}}}=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{A^{(i)}(\beta_1)(\alpha_1-\beta_1)^{i-p-\frac{1}{2}}}{i!\left(i-p+\frac{1}{2}\right)}+\int_{\beta_1}^{\alpha_1}\frac{\widetilde{A}(t)\mathrm{d}t}{(t-\beta_1)^{p+\frac{1}{2}}}, \tag{5.2.41}$$

其中 $\widetilde{A}(t)=A(t)-\sum\limits_{i=0}^{p-1}\frac{A^{(i)}(\beta_1)(t-\beta_1)^i}{i!}$.

所以(5.2.40)式都可按照(5.2.41)式化为通常积分.

2. 当 $n=2m$ 偶数时,取 S'为如下柱面

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2m}^2=r^2>1,\\ x_{2m+1}\text{任意}.\end{cases}$$

下面我们把表达式(5.2.31)化为通常的积分.由于在(5.2.31)中 $a=(a_1,\cdots,a_{2m},0)$.我们取 Q_1 满足

$$Q_1Q_1'=I,\ (a_1,a_2,\cdots,a_{2m})Q_1=(|a|,0,\cdots,0).$$

从而与1一样,可以假设在(5.2.31)的右端 $a=(|a|,0,\cdots,0)$.这时

$$u_0=u_0((x_1,\cdots,x_{2m})Q_1'),\ u_1=u_1((x_1,\cdots,x_{2m})Q_1').$$

此时,(5.2.31)化为

$$(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a)=\iint\limits_{S_0'}\left[u_0\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}-u_1v\right]\mathrm{d}s. \tag{5.2.42}$$

其中 u_0,u_1 如上述,$\varphi=(|a|x_1-1)^{-2}[(|a|x_1-1)^2-(|a|^2-1)(|x|^2-1)]$,$S_0'$为 $\varphi=0$ 在 S'上所范围的曲面.

由于 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}=-(|x|^2-1)^{-m}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(I-x'x)\psi'$,

其中 $\psi=(\sum\limits_{i=1}^{2m}x_i^2)^{-\frac{1}{2}}(x_1,x_2,\cdots,x_{2m},0)$.

作圆柱坐标

$$\begin{aligned}x_1&=r\cos\theta_1,\\ x_2&=r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\ &\cdots\cdots\\ x_{2m-1}&=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2m-2}\cos\theta_{2m-1},\\ x_{2m}&=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2m-2}\sin\theta_{2m-1},\\ x_{2m+1}&=t.\end{aligned}$$

这时,(5.2.42)式化为

$$(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a)=\int_{\Omega_{2m-3}}\Omega_{2m-3}\int_0^{\theta_0}r^{2m-1}\sin^{2m-2}\theta_1\mathrm{d}\theta_1\int_0^{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{4u_0(|a|\cos\theta_1-r)}{(|a|r\cos\theta_1-1)}\right.$$

$$\cdot (t^2 + r^2 - 1)^{-m}(1 - \varphi)\left[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F - \varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi}\right]$$

$$- u_1 v\}\mathrm{d}t. \tag{5.2.43}$$

其中 u_0, u_1 与 t 无关,而且

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{(|a|r\cos\theta_1 - 1)^2 - (|a|^2 - 1)(r^2 - 1)}{|a|^2 - 1}},$$

$$\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{1 + (|a|^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(r^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{|a|r}\right).$$

记 $\beta = \frac{|a|^2 - 1}{(|a|r\cos\theta_1 - 1)^2}$,则 φ 可写为 $\varphi = \beta(\alpha - t^2)$. 由于

$$F = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\varphi^i$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\beta^i(\alpha - t^2)^i,$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i}\beta^i(\alpha - t^2)^i,$$

这样,(5.2.43)化为

$$(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a) = \int_{\Omega_{2m-3}}\Omega_{2m-3}\int_0^{\theta_0}r^{2m-1}\sin^{2m-2}\theta_1\mathrm{d}\theta_1$$

$$\cdot\int_0^{\sqrt{\alpha}}\left\{\frac{4u_0(|a|\cos\theta_1 - r)(t^2 + r^2 - 1)^{-m}}{(|a|r\cos\theta_1 - 1)(\alpha - t)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\cdot\left[\frac{2m-1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m+1}{2}}(\alpha - t^2)^{i-m}\right.$$

$$-\frac{2m-1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m+1}{2}}(\alpha - t^2)^{i-m+2}$$

$$+\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}(\alpha - t^2)^{i-m+1}$$

$$
-\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m+1}{2}}(\alpha-t^2)^{i-m+2}\Bigg]
$$

$$
-\frac{u_1}{(\alpha-t^2)^{\frac{1}{2}}}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m+1}{2}}(\alpha-t^2)^{i-m+1}\Bigg\}\mathrm{d}t.
\tag{5.2.44}
$$

其中 $(N)_0=1,(N)_i=N(N+1)\cdots(N+i-1),(i>0)$.

根据 Hadanard 所定义的瑕积分的有限部分的性质,若已知

$$
\int_0^{\sqrt{\alpha}}(t^2+r^2-1)^{-m}(\alpha-t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=f(\alpha,r^2-1).
\tag{5.2.45}
$$

则有

$$
\int_0^{\sqrt{\alpha}}\frac{(t^2+r^2-1)^{-m}(\alpha-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{(\alpha-t^2)^k}\mathrm{d}t=(-1)^k\frac{2^k\partial^k f}{(2k-1)!!\,\partial\alpha^k}.
\tag{5.2.46}
$$

下面我们就来求(5.2.45)式中积分之值.作变换

$$
s=\frac{t}{\sqrt{\alpha-t^2}},
$$

并记 $l=r^2-1$,则有

$$
\int_0^{\sqrt{\alpha}}(t^2+r^2-1)^{-m}(\alpha-t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{(1+s^2)^{m-1}}{[(\alpha+l)s^2+l]^m}\mathrm{d}s.
$$

根据 Hermitian 方法,我们求得

$$
\int_0^{\infty}\frac{(1+s^2)^{m-1}}{[(\alpha+l)s^2+l]^m}\mathrm{d}s=\frac{\Pi b_0}{2l\sqrt{l+\alpha}}
=\frac{\Pi b_0}{2(r^2-1)\sqrt{r^2+\alpha-1}}=f.
$$

其中 $b_0=\dfrac{\det A_0}{\det A}$,

$$
A=\begin{bmatrix}
l^{m-1} & c_{m-1}^1 l^{m-2}(\alpha+l) & \cdots & c_{m-1}^i l^{m-1-i}(\alpha+l)^i & \cdots & c_{m-1}^{m-2} l(\alpha+l)^{m-2} & (\alpha+l)^{m-1}\\
l & (-2m+3)(\alpha+l) & & & & & \mathbf{0}\\
 & 3l & \ddots & & & & \\
 & & \ddots & (-2m+1+2i)(\alpha+l) & & & \\
 & & & (2i+2)l & \ddots & & \\
 & \mathbf{0} & & & \ddots & -3(\alpha+l) & \\
 & & & & & (2m-3)l & -(\alpha+l)
\end{bmatrix}
$$

即 A 的第一行元素一般式是 $c_{m-1}^k l^{m-1-k}(\alpha+l)^k,(k=0,1,2,\cdots,$

$m-1$). A 的主对角线上的元素除了第一个元素外，其余元素一般式是 $(-2m+1+2i)(\alpha+l)$，$(i=1,2,\cdots,m-1)$，A 的次对角线元素一般式是 $(2i+1)l$，$(i=0,1,2,\cdots,m-2)$. A 的其余位置是零. A_0 是 A 的第一列元素依次换为 $c_{m-1}^{i}(i=0,1,2,\cdots,m-1)$ 之后而成的方阵. 因此，(5.2.44)式变为

$$
\begin{aligned}
&(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a)=\int_{\Omega_{2m-3}}\dot{\Omega}_{2m-3}\int_0^{\theta_0}r^{2m-1}\sin^{2m-2}\theta_1\Bigg\{\frac{4u_0(|a|\cos\theta_1-r)}{|a|r\cos\theta_1-1}\\
&\cdot\Bigg[\frac{2m-1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i(-1)^{m-i}2^{m-i}}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(2m-2i-1)!!}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}\frac{\partial^{(m-i)}f}{\partial\alpha^{(m-i)}}\\
&-\frac{2m-1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i(-1)^{m-i-1}2^{m-i-1}}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(2m-2i-3)!!}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}\frac{\partial^{(m-i-1)}f}{\partial\alpha^{(m-i-1)}}\\
&+\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i(-1)^{m-i-1}2^{m-i-1}}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i(2m-2i-3)!!}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}\frac{\partial^{(m-i-1)}f}{\partial\alpha^{(m-i-1)}}\\
&-\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i(-1)^{m-i-2}2^{m-i-2}}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i(2m-2i-5)!!}\beta^{i-\frac{2m-3}{2}}\frac{\partial^{(m-i-2)}f}{\partial\alpha^{(m-i-2)}}\Bigg]\\
&-u_1\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_{m-1}(-m+1)_{m-1}}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_{m-1}}\frac{\pi}{2}\beta^{-\frac{1}{2}}\Bigg\}\mathrm{d}\theta_1.
\end{aligned}
$$

其中 $\beta=\dfrac{|a|^2-1}{(|a|r\cos\theta_1-1)^2}$，$\alpha=\dfrac{(|a|r\cos\theta_1-1)^2-(|a|^2-1)(r^2-1)}{|a|^2-1}$，

$$
f=\frac{\pi}{2(r^2-1)\sqrt{r^2+\alpha-1}}\frac{\det A_0}{\det A},
$$

$$
\theta_0=\cos^{-1}\left(\frac{1+(|a|^2-1)^{\frac{1}{2}}(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}{|a|r}\right),
$$

$$
u_0=u_0(r,\theta)(Q_1'),\ u_1=u_1(r,\theta)(Q_1'),
$$

$$
Q_1Q_1'=I,\ (a_1,\cdots,a_{2m})Q_1=(|a|,0,\cdots,0).
$$

当 $m=2$ 时，

$$
\begin{aligned}
\pi\Omega_2u(a)=\int_{\Omega_1}\dot{\Omega}_1\int_0^{\theta_0}\Bigg\{&\frac{4\pi u_0r^3(|a|\cos\theta_1-r)}{(|a|r\cos\theta_1-1)(r^2-1)^2}\sin^2\theta_1\cdot\\
&\left[\frac{3}{4}\beta^{-\frac{1}{2}}(r^2+\alpha-1)^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}\beta^{-\frac{5}{2}}(r^2+\alpha-1)^{-\frac{5}{2}}\right.\\
&\left.-\frac{3}{2}\beta^{-\frac{3}{2}}(r^2+\alpha-1)^{-\frac{3}{2}}\right]+\frac{3}{2}\pi u_1r^3\sin^2\theta_1\beta^{-\frac{1}{2}}\Bigg\}\mathrm{d}\theta_1.
\end{aligned}
$$

以上不论 1 与 2 都是关于当 $|a|>r>1$ 时的情况，当 $r>|a|>1$ 时，含有 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}$ 的一式与上述含有 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}$ 的一式相差一负号，其余相同.

本节内容取自文[LY].

Ⅲ. 一类奇异双曲型方程的 Riemann 函数

$$(r^2-1)\frac{\partial^2\mu}{\partial r^2}+2rS\frac{\partial^2\mu}{\partial r\partial S}+(S^2-1)\frac{\partial^2\mu}{\partial S^2}+\frac{2r^2-K+2}{r}\frac{\partial\mu}{\partial r}$$
$$+\frac{2S^2-K+2}{S}\frac{\partial\mu}{\partial S}=0 \tag{5.3.1}$$

在单位圆内是椭圆型、在单位圆外是双曲型，单位圆是变型线. 其中 K 为大于 2 的实数.

本文考虑单位圆外的情况，即双曲型的情形. 我们求出了它的 Riemann 函数. 众所周知，利用 Riemann 函数就可求得双曲型方程 Cauchy 问题以及第三、第四问题的解[WXi]. 但由于我们所考虑的双曲型方程是奇异的，不能直接利用 Riemann 公式，因此对 Cauchy 等问题的求解带来不少麻烦. 这部分的工作我们将另文给出[YW42]，本文仅给出它的 Riemann 函数.

1. 令 $r=\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$, $S=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$.

方程(5.3.1)化为：

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}-(K-2)[\cot(x+y)+\cot 2(x-y)]\frac{\partial\mu}{\partial x}$$
$$(K-2)[\cot(x+y)-\cot 2(x-y)]\frac{\partial\mu}{\partial y}=0. \tag{5.3.2}$$

令 $\mu=\lambda u$, $\lambda=\left[\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right]^{\frac{K-2}{2}}$,

(5.3.2)式化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left[\frac{(K-1)(K-2)}{\sin^2(x+y)}-\frac{(K-2)(K-4)}{\sin^2 2(x-y)}\right]u. \tag{5.3.3}$$

因此，问题归结为求方程(5.3.3)的 Riemann 函数.

下面，我们分别求出下列两方程的 Riemann 函数：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{(K-1)(K-2)}{\sin^2(x+y)}u, \tag{5.3.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{(K-2)(K-4)}{\sin^2 2(x-y)}u, \tag{5.3.5}$$

然后利用 M. H. Олевский 的一个结果，求出方程(5.3.3)的 Riemann 函

数.

2. 方程(5.3.4)的 Riemann 函数就是下列问题的解：

$$
\mathrm{I}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{(K-1)(K-2)}{\sin^2(x+y)}u,\\ u(x_0,y)=u(x,y_0)=1.\end{cases}
$$

令 $u=F(\sigma_1)$， $\sigma_1=-\dfrac{\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)}{\sin(x_0+y_0)\sin(x+y)}$. (5.3.6)

问题 I 化为：

$$
\begin{cases}F''(\sigma_1)\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial x}\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial y}+F'(\sigma_1)\dfrac{\partial^2\sigma_1}{\partial x\partial y}=\dfrac{(K-1)(K-2)}{\sin^2(x+y)}F(\sigma_1)\\ F(0)=1.\end{cases}
$$

$$
\because\quad \frac{\partial\sigma_1}{\partial x}=\sigma_1[-\cot(x_0-x)-\cot(x+y)]
$$

$$
=-\sigma_1\frac{\sin(x_0+y)}{\sin(x+y)\sin(x_0-x)}.
$$

$$
\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}=\sigma_1[\cot(y-y_0)-\cot(x+y)]=\sigma_1\frac{\sin(x+y_0)}{\sin(x+y)\sin(y-y_0)}.
$$

$$
\therefore\quad \frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}=\frac{\sin(x+y_0)\sin(x_0+y)\sigma_1^2}{\sin^2(x+y)\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)}
$$

$$
=-\frac{\sin(x+y_0)\sin(x_0+y)}{\sin^3(x+y)\sin(x_0+y_0)}\sigma_1.
$$

$$
\because\quad \sin(x_0+y)\sin(x+y_0)=\sin(x+y)\sin(x_0+y_0)
$$

$$
+\sin(x-x_0)\sin(y-y_0).
$$

$$
\therefore\quad \frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}=\sigma_1\left[\frac{-1}{\sin^2(x+y)}+\frac{\sigma_1}{\sin^2(x+y)}\right]=-\frac{\sigma_1(1-\sigma_1)}{\sin^2(x+y)}.
$$

由于：

$$
\frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}=-\frac{\sin(x_0+y)}{\sin(x+y)\sin(x_0-x)}.
$$

两端都对 y 求微商得：

$$
-\frac{1}{\sigma_1^2}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}+\frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\sin^2(x+y)}.
$$

$$
\therefore\quad \frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x\partial y}=\frac{\sigma_1}{\sin^2(x+y)}-\frac{1}{\sigma_1}\frac{\sigma_1(1-\sigma_1)}{\sin^2(x+y)}=\frac{2\sigma_1-1}{\sin^2(x+y)}.
$$

因而问题 I 化为：

$$
\begin{cases}\sigma_1(1-\sigma_1)F''(\sigma_1)+(1-2\sigma_1)F'(\sigma_1)+(K-1)(K-2)F(\sigma_1)=0,\\ F(0)=1.\end{cases}
$$

其解为 $F(K-1,\ -K+2,1,\sigma_1)$，这是超几何函数.因此方程(5.3.4)的

Riemann 函数为：

$$R_1(x,y;x_0,y_0)=F(K-1,\ -K+2,1,\sigma_1). \tag{5.3.7}$$

其中 σ_1 的表达式见(5.3.6)。

3. 方程(5.3.5)的 Riemann 函数就是下列问题的解：

$$\text{II}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{(K-2)(K-4)}{\sin^2 2(x-y)}u\\ u(x_0,y)=u(x,y_0)=1.\end{cases}$$

令 $u=F(\sigma_2)$, $\quad \sigma_2=\dfrac{\sin 2(x-x_0)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)\sin 2(x-y)}$, $\qquad$ (5.3.8)

则问题 II 化为：

$$\begin{cases}F''(\sigma_2)\dfrac{\partial\sigma_2}{\partial x}\dfrac{\partial\sigma_2}{\partial y}+F'(\sigma_2)\dfrac{\partial^2\sigma_2}{\partial x\partial y}=-\dfrac{(K-2)(K-4)}{\sin^2 2(x-y)}F(\sigma_2),\\ F(0)=1.\end{cases}$$

$$\because\quad \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}=\sigma_2[2\cot 2(x-x_0)-2\cot 2(x-y)]$$

$$=\sigma_2\frac{2\sin 2(x_0-y)}{\sin 2(x-x_0)\sin 2(x-y)},$$

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}=\sigma_2[2\cot 2(y-y_0)+2\cot 2(x-y)]$$

$$=\sigma_2\frac{2\sin 2(x-y_0)}{\sin 2(y-y_0)\sin 2(x-y)}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}=\frac{4\sin 2(x_0-y)\sin 2(x-y_0)\sigma_2^2}{\sin^2 2(x-y)\sin 2(x-x_0)\sin 2(y-y_0)}$$

$$=\frac{4\sin 2(x_0-y)\sin 2(x-y_0)}{\sin^3 2(x-y)\sin 2(x_0-y_0)}\sigma_2.$$

由于

$$\sin 2(x_0-y)\sin 2(x-y_0)=\sin 2(x-y)\sin 2(x_0-y_0)$$
$$-\sin 2(x-x_0)\sin 2(y-y_0).$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}=4\sigma_2\left[\frac{1}{\sin^2 2(x-y)}-\frac{\sigma_2}{\sin^2 2(x-y)}\right]=\frac{4\sigma_2(1-\sigma_2)}{\sin^2 2(x-y)}.$$

由于

$$\frac{1}{\sigma_2}\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}=\frac{2\sin 2(x_0-y)}{\sin 2(x-x_0)\sin 2(x-y)}.$$

两端对 y 求导数，得：

$$-\frac{1}{\sigma_2^2}\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}+\frac{1}{\sigma_2}\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x\partial y}=\frac{-4}{\sin^2 2(x-y)}.$$

$$\therefore\qquad \frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x\partial y}=\frac{4(1-2\sigma_2)}{\sin^2 2(x-y)}.$$

因此，问题Ⅱ化为：

$$
\begin{cases}
\sigma_2(1-\sigma_2)F''(\sigma_2)+(1-2\sigma_2)F'(\sigma_2)+\dfrac{(K-2)(K-4)}{4}F(\sigma_2)=0,\\
F(0)=1.
\end{cases}
$$

这问题的解是超几何函数 $F\left(\dfrac{K-2}{2},\dfrac{4-K}{2},1,\sigma_2\right)$.

因此，方程(5.3.5)的 Riemann 函数为：

$$
R_2(x,y;x_0,y_0)=F\left(\frac{K-2}{2},\frac{4-K}{2},1,\sigma_2\right). \tag{5.3.9}
$$

其中 σ_2 的表达式见(5.3.8)

4. 根据 M. H. Олевский 结果[Док. Акад. Наук. СССР. 87, 337—340(1952)]：若 $R_1(x,t;x_0,t_0)$ 及 $R_2(x,t;x_0,t_0)$ 分别是方程式

$$
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho_1(x)u=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho_2(t)u=0
$$

的 Riemann 函数，则方程式

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+[\rho_1(x)+\rho_2(t)]u=0
$$

的 Riemann 函数为：

$$
\begin{aligned}
R(x,t;x_0,t_0) &= R_1(x,t;x_0,t_0)+\int_{t-t_0}^{x-x_0}R_1(x,\xi;x_0,0)\frac{\partial R_2(\xi,t;0,t_0)}{\partial\xi}d\xi\\
&= R_2(x,t;x_0,t_0)+\int_{t-\tau_0}^{t-t_0}R_2(\xi,t;0,t_0)\frac{\partial R_1(x,\xi;x_0,0)}{\partial\xi}d\xi.
\end{aligned}
$$

不难得到以下推论：

推论：若 $V_1(r,S;r_0,S_0)$ 及 $V_2(r,S;r_0,S_0)$ 分别是方程

$$
\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial S}+\rho_1(r+S)u=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial r\partial S}+\rho_2(r-S)u-0
$$

的 Riemann 函数，则方程

$$
\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial S}[\rho_1(r+S)+\rho_2(r-S)]u=0
$$

的 Riemann 函数为：

$$
\begin{aligned}
V(r,S;r_0,S_0) &= V_1(r,S;r_0,S_0)\\
&\quad+\int_{r-S-r_0+S_0}^{r+S-r_0-S_0}V_1\left(\frac{r+S+\xi}{2},\frac{r+S-\xi}{2},\frac{r_0+S_0}{2},\frac{r_0+S_0}{2}\right)\\
&\quad\times\frac{\partial V_2\left(\dfrac{\xi+r-S}{2},\dfrac{\xi-r+S}{2},\dfrac{r_0-S_0}{2},\dfrac{S_0-r_0}{2}\right)}{\partial\xi}d\xi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= V_2(r,s;r_0,s_0) \\
&\quad + \int_{r+S-r_0-S_0}^{r-S-r_0+S_0} V_2\left(\frac{\xi+r-S}{2},\frac{\xi-r+S}{2},\frac{r_0-S_0}{2},\frac{S_0-r_0}{2}\right) \\
&\quad \times \frac{\partial V_1\left(\dfrac{r+S+\xi}{2},\dfrac{r+S-\xi}{2},\dfrac{r_0+S_0}{2},\dfrac{r_0+S_0}{2}\right)}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}
$$

出此,不难求得方程(5.3.3)的 Riemann 函数为:

$$
\begin{aligned}
R(x,y;x_0,y_0) &= F(K-1,-K+2,1,\sigma_1) \\
&\quad + \int_{x-y-x_0+y_0}^{x+y-x_0-y_0} F(K-1,-K+2,1,\dot{\sigma}_1) \\
&\quad \cdot \frac{\partial F\left(\dfrac{K-2}{2},\dfrac{-K+4}{2},1,\sigma_2\right)}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \cdot F\left(\frac{K-2}{2},\frac{4-K}{2},1,\sigma_2\right) \\
&\quad + \int_{x+y-x_0-y_0}^{x-y-x_0+y_0} F\left(\frac{K-2}{2},\frac{-K+4}{2},1,\dot{\sigma}_2\right)\frac{\partial F(K-1,-K+2,1,\dot{\sigma}_1)}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

其中,σ_1 见(5.3.6),σ_2 见(5.3.8),

$$
\dot{\sigma}_1 = \frac{\sin\left(\dfrac{x+y+\eta}{2}-\dfrac{x_0+y_0}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x+y-\eta}{2}-\dfrac{x_0+y_0}{2}\right)}{\sin(x_0+y_0)\sin(x+y)},
$$

$$
\dot{\sigma}_2 = \frac{\sin(\eta+x-y-x_0+y_0)\sin(\eta-x+y+x_0-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)\sin 2(x-y)}.
$$

习知,若 $V(x,y;x_0,y_0)$ 是方程:

$$
\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+g(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial y}+C(x,y)\phi=0
$$

的 Riemann 函数,令 $\phi=w(x,y)\Phi$,又若 $W(x,y;x_0,y_0)$ 是 Φ 所满足的微分方程的 Riemann 函数,即有[Mac]:

$$
W(x,y;x_0,y_0)=\frac{w(x,y)}{w(x_0,y_0)}V(x,y;x_0,y_0).
$$

据此,容易验证方程(5.3.2)的 Riemann 函数为:

$$
\left[\frac{\sin^2(x_0+y_0)\sin 2(x-y)}{\sin 2(x_0-y_0)\sin^2(x+y)}\right]^{\frac{K-2}{2}} R(x,y;x_0,y_0).
$$

本节内容取自文[YW43].

IV. 非自共轭锥上的 Gamma 函数(1)

Siegel C. L. 首先把 Gamma 函数推广到由 n 阶正定实对称矩阵所形成的自共轭锥,并引进及研究了以他名字命名的 Siegel 积分.[Sie1]钟家

庆在 n 阶正定 Hermitian 矩阵所形成的锥上研究并讨论了 Gamma 函数与 Siegel 积分[ZhJ1].他们都是在自共轭锥上讨论的.1981 年,钟家庆和殷慰萍引进了三大类非自共轭锥[ZJY].在殷慰萍的工作和指导下,出现了在非自共轭锥上研究 Gamma 函数及 Siegel 积分的工作[YW44,YLZ,YGD,MaL],但都属于非自共轭锥的若干特殊类型.本文则在第Ⅰ类非自共轭锥的最一般情形下进行讨论,所得结果使[YGD,MaL]的结果成为其特例.第 1 小节给出与第Ⅰ类非自共轭锥 $V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 相共轭的锥 $V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$.第 2 小节给出 V_{I} 与 V_{I}^* 的不变体积元素并由此得到相应的 Gamma 函数与 Siegel 积分.第 3 小节则给出以 V_{I} 和 V_{I}^* 为底的第一类 Siegel 域(管状域)的 Cauchy-Szegö 核和形式 Poisson 核.

Ⅳ.1 $V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 之共轭锥及运动群

1. 考虑 m 阶 Hermite 矩阵 H.分块如下:

$$H=\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{s1} & H_{s2} & \cdots & H_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix},\quad H=\overline{H}',\ m=\sum_{i=1}^{s} m_i \qquad (5.4.1)$$
$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{matrix}$$

$$H_{ij}=0\quad (i\neq k_1,k_2,\cdots,k_l;\ j>i)$$

其中 $k_i(i=1,2,\cdots,l)$ 为正整数,$1=k_1<k_2<\cdots<k_l=s$.这样的 Hermite 方阵的集合记为 $H\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$.锥 $V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}=\left\{H>0 \mid H\in H\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}\right\}$,当 $l<s$ 时是非自共轭锥.当 $l=s$ 特别当 $s=2$ 时是自共轭锥[ZJY].由[ZJY]可知,$V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 在运动群 $\{H\to AH\overline{A}'\}$ 下是可递的.其中

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ & \ddots & * \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix},\qquad A_{ii}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(ii)} & \cdots & a_{1m_i}^{(ii)} \\ & \ddots & * \\ 0 & & a_{m_im_i}^{(ii)} \end{pmatrix},\ i=1,\cdots,s$$
$$\begin{matrix} m_1 & \cdots & m_s \end{matrix}$$

$$A_{ij}=0 \quad (i\neq k_1,k_2,\cdots,k_l;\ j>i) \tag{5.4.2}$$

如果限制 A_{ii}的对角线元素全为正数,就得到一个单可递的运动群.

2. 考虑 $V_{\rm I}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$的共轭锥 $V_{\rm I}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$. 显然

$$\dim V_{\rm I}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{s} m_i^2 + 2\sum_{i=1}^{l-1} m_{k_i}\sum_{j=k_i+1}^{s} m_j = N$$

根据共轭锥的定义,$V_{\rm I}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集并满足条件

$$V_{\rm I}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix} = \Bigg\{ x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbf{R}^N \mid (x,h)>0,$$

$$\forall\, h=(h_1,\cdots,h_N)\in \overline{V}_{\rm I}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}\setminus\{0\}\Bigg\},$$

其中(x,h)是 $\mathbf{R}^N$ 中点 x 与 h 的某一内积. 将 $V_{\rm I}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$中的点写为如下形式的矩阵

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix} = \overline{X}',\quad X_{ij}=0\ (i\neq k_1,k_2,\cdots,k_l;\ j>i),$$
$$\qquad\ \ m_1 \qquad m_2 \quad \cdots \quad m_s$$

$$X_{jj}=\begin{pmatrix} x_{11}^{(jj)} & \frac{1}{2}x_{12}^{(jj)} & \cdots & \frac{1}{2}x_{1m_j}^{(jj)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}\bar{x}_{1m_j}^{(jj)} & \frac{1}{2}x_{2m_j}^{(jj)} & \cdots & x_{m_jm_j}^{(jj)} \end{pmatrix},\quad j=1,\cdots,s.$$

$$X_{ij}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_{11}^{(ij)} & x_{12}^{(ij)} & \cdots & x_{1m_j}^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m_i1}^{(ij)} & x_{m_i2}^{(ij)} & \cdots & x_{m_im_j}^{(ij)} \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} j=i+1,\cdots,s. \\ i=k_1,k_2,\cdots,k_{l-1}. \end{matrix} \tag{5.4.3}$$

它也可记为向量形式的点 x,若 $\overline{V}_{\rm I}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$中的点 H 的向量形式为 h. 则可定义内积(x,h)为$(x,h)=\operatorname{tr}(X\overline{H}')$. 考虑

$$\operatorname{tr}(X\overline{H}') = \sum_{j=1}^{s}\operatorname{tr}(X_{jj}\overline{H}'_{jj}) + 2\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{s}\operatorname{tr}(X_{k_ij}\overline{H}'_{k_ij}) > 0. \tag{5.4.4}$$

由[ZJY]可知，对 $H\in V_1\begin{pmatrix}m_1,\cdots,m_s\\k_1,\cdots,k_l\end{pmatrix}$，存在形如(5.4.2)的 P 使得 $H=P\bar{P}'$，因而

$$\operatorname{tr}(X\bar{H}')=\operatorname{tr}(XP\bar{P}')=\operatorname{tr}(\bar{P}'XP)=\operatorname{tr}(\bar{P}'_{11}X_{11}P_{11})+\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}}$$

$$\cdot\operatorname{tr}\left\{(\bar{P}'_{1j},\bar{P}'_{k_2j}\cdots\bar{P}'_{k_ij}P'_{jj})\begin{pmatrix}X_{11} & X_{1k_2} & \cdots & X_{1k_i} & X_{1j}\\ \bar{X}'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & \cdots & X_{k_2k_i} & X_{k_2j}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \bar{X}'_{1k_i} & \bar{X}'_{k_2k_i} & \cdots & X_{k_ik_i} & X_{k_ij}\\ \bar{X}'_{1j} & \bar{X}'_{k_2j} & \cdots & \bar{X}'_{k_ij} & X_{jj}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{1j}\\P_{k_2j}\\ \vdots\\P_{k_ij}\\P_{jj}\end{pmatrix}\right\}>0$$

对任何具(5.4.2)形式的 P 都适合，任意固定 j，令 $P_{rr}\to 0(r\neq j)$，$P_{k_ir}\to 0(r\neq j)$，$i=1,\cdots,l-1$，可得到

$$\begin{pmatrix}X_{11} & X_{1k_2} & \cdots & X_{1k_i} & X_{1j}\\ \bar{X}'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & \cdots & X_{k_2k_i} & X_{k_2j}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \bar{X}'_{1k_i} & \bar{X}'_{k_2k_i} & \cdots & X_{k_ik_i} & X_{k_ij}\\ \bar{X}'_{1j} & \bar{X}'_{k_2j} & \cdots & \bar{X}'_{k_ij} & X_{jj}\end{pmatrix}\geqslant 0,\quad \begin{matrix}j=k_i+1,\cdots,k_{i+1}\\ i=1,\cdots,l-1\end{matrix}$$

取其内点，有

$$X_1=X_{11}>0;\ X_j=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{1j}\\ \bar{X}'_{1j} & X_{jj}\end{pmatrix}>0,\ j=2,\cdots,k_2;$$

$$X_j=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{1k_2} & X_{1j}\\ X'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & X_{k_2j}\\ \bar{X}'_{1j} & X'_{k_2j} & X_{jj}\end{pmatrix}>0,\ j=k_2+1,\cdots,k_3;$$

$$X_j=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{1k_2} & X_{1k_3} & X_{1j}\\ \bar{X}'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & X_{k_2k_3} & X_{k_2j}\\ X'_{1k_3} & X'_{k_2k_3} & X_{k_3k_3} & X_{k_3j}\\ X'_{1j} & \bar{X}'_{k_2j} & \bar{X}'_{k_3j} & X_{jj}\end{pmatrix}>0,\ j=k_3+1,\cdots,k_4;\cdots;$$

$$X_j=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{1k_2} & X_{1k_3} & \cdots & X_{1k_{l-1}} & X_{1j} \\ \bar{X}'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & X_{k_2k_3} & \cdots & X_{k_2k_{l-1}} & X_{k_2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \bar{X}'_{1k_{l-1}} & \bar{X}'_{k_2k_{l-1}} & \bar{X}'_{k_3k_{l-1}} & \cdots & X_{k_{l-1}k_{l-1}} & X_{k_{l-1}j} \\ \bar{X}'_{1j} & \bar{X}'_{k_2j} & \bar{X}'_{k_3j} & \cdots & X'_{k_{l-1}j} & X_{jj} \end{pmatrix}>0,j=k_{l-1}+1,\cdots,s. \tag{5.4.5}$$

这表明,满足(5.4.4)的点也满足(5.4.5). 反之,不难看出,满足(5.4.5)的点也满足(5.4.4). 所以

$$V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}=\left\{X\in H\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}\middle| X_j>0.\ X_j \text{ 如 } (5.4.5)\text{所示},\ j=2,\cdots,s\right\} \tag{5.4.6}$$

其中 $X_{jj}(j=1,\cdots,s)$, $X_{ij}(j=i+1,\cdots,s,\ i=k_1,k_2,\cdots,k_{l-1})$有(5.4.3)的形式. 如果 X 的元素被视为一般意义下的变量,则

$$V_{\mathrm{I}}^*\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}=\left\{X\in H\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}\middle| X_j>0.\ X_j \text{ 如}(5.4.5)\text{所示},j=2,\cdots,s\right\}. \tag{5.4.7}$$

3. $V_{\mathrm{I}}^*\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}$的运动群为

$$X_j\to A_jX_j\bar{A}'_j,\quad j=2,\cdots,s. \tag{5.4.8}$$

其中

$$A_j=\begin{pmatrix} A_{11} & & & & 0 \\ A_{k_21} & A_{k_2k_2} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ A_{k_i1} & A_{k_ik_2} & \cdots & A_{k_ik_i} & \\ A_{j1} & A_{jk_2} & \cdots & A_{jk_i} & A_{jj} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_{k_2} \\ \vdots \\ m_{k_i} \\ m_j \end{matrix},\quad \begin{matrix} j=k_i+1,\cdots,k_{i+1}, \\ i=1,\cdots,l-1. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m_1 & m_{k_2} & \cdots & m_{k_i} & m_j \end{matrix}$$

它是可递的. 事实上, $\forall X\in V_{\mathrm{I}}^*\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}$,因为 $X_j>0(j=2,\cdots,s)$,所以分别存在惟一的对角线元素为正值的下三角矩阵

$$T_j=\begin{pmatrix} T_{11} & & & & \\ T_{k_21} & T_{k_2k_2} & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ T_{k_i1} & T_{k_ik_2} & \cdots & T_{k_ik_i} & \\ T_{j1} & T_{jk_2} & \cdots & T_{jk_i} & T_{jj} \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} j=k_i+1,\cdots,k_{i+1}, \\ i=1,\cdots,l-1. \end{matrix} \tag{5.4.9}$$

使得 $X_j=T_j\overline{T}_j'$，$j=2,\cdots,s$．即

$$X_{11}=T_{11}\overline{T}_{11}',\quad X_{jj}=T_{j1}\overline{T}_{j1}'+T_{jk_2}\overline{T}_{jk_2}'+\cdots+T_{jk_i}\overline{T}_{jk_i}'+T_{jj}\overline{T}_{jj}',$$

$$j=k_i+1,\cdots,k_{i+1},i=2,\cdots,l-1. \tag{5.4.10}$$

$$X_{k_ij}=T_{k_i1}\overline{T}_{j1}'+T_{k_ik_2}\overline{T}_{jk_2}'+\cdots+T_{k_ik_i}\overline{T}_{jk_i}',j=k_i+1,\cdots s,i=1,\cdots,l-1.$$

取 $A_j=T_j^{-1}$，则 X 在映射 $X_j\to A_jX_j\overline{A}_j'$ $(j=2,\cdots,s)$下的像为 I．

定义 设 W 是 m 阶 Hermite 矩阵

$$W=\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1s} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{s1} & W_{s2} & \cdots & W_{ss} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix}=\overline{W}',\quad m=\sum_{i=1}^{s}m_i.$$
$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{matrix}$$

那么，在 W 中令 $W_{ij}=0(i\neq k_1,k_2,\cdots,k_l,j>i)$，所得矩阵称为空间 $\mathbf{R}^N$ 中 $V_{\mathrm{I}}\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$ 上的一个投影，记为 W_{I}．

如果 T 是如下形式：

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & & & 0 \\ T_{21} & T_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ T_{s1} & T_{s2} & \cdots & T_{ss} \end{pmatrix},T_{ij}=0\quad(j\neq k_1,\cdots,k_l;i>j). \tag{5.4.11}$$

用(5.4.10)表示矩阵 X，则 X 可写为

$$X=(T\overline{T}')_{_},$$

从而 $V_{\mathrm{I}}^*\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}$ 的运动群可表示为

$$X\to(AXA')_{_}. \tag{5.4.12}$$

其中 A 形如(5.4.11)所示．它与(5.4.8)是相同的．

4．$V_{\mathrm{I}}^*\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$ 也可如下定义

$$V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix} = \left\{X \mid X=(H^{-1})_{\perp}, H\in V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}\right\}.$$

事实上，$\forall\, H_0\in V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$. 存在形如(5.4.2)的上三角矩阵 P_0 使得 $H_0=P_0\bar{P}_0'$，于是，$H_0^{-1}=(P_0^{-1})'P_0^{-1}$. 因为 P_0^{-1} 也是一个上三角矩阵，并且

$$H\to P_0^{-1}H(\overline{P_0^{-1}})'$$

是 $V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$ 的一个同构，所以对每个 $H\in V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$.

$$\mathrm{tr}[P_0^{-1}H(\overline{P_0^{-1}})']>0,$$

因而

$$\mathrm{tr}[(H_0^{-1})_{\perp}H]=\mathrm{tr}(H_0^{-1}H)=\mathrm{tr}[P_0^{-1}H(\bar{P}_0^{-1})']>0,$$

故对每个 $H_0\in V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$，$(H^{-1})_{\perp}\in V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$. 另一方面，$\forall\, X\in V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$. 由于 $X_j>0\ (j=2,\cdots,s)$，所以存在形如(5.4.9)的对角线元素为正值的下三角矩阵 T_j 使得

$$X_j=T_j\bar{T}_j',\ j=2,\cdots,s.$$

设 T 形如(5.4.11)，则

$$X=(T\bar{T}')_{\mathrm{I}}=[(\bar{T}'^{-1}T^{-1})^{-1}]_{-}.$$

其中 T'^{-1}是对角线元素为正值的上三角矩阵. 设 $H_0=\bar{T}'^{-1}T^{-1}$. 则 $H_0\in V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$，$X=(H_0^{-1})_{-}$.

IV.2 $V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$，$V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$ 上的 Gamma 函数及 Siegel 积分

1. 设

$$\mathrm{Aut}\,V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix} = \{H\to AH\bar{A}' \mid A \text{ 如(5.4.11)所示}\}.$$

现在考虑在 $\mathrm{Aut}\,V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$下，$V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$的不变体积元素. 设

$$H_{jj}=\begin{pmatrix} h_{11}^{(jj)} & \cdots & h_{1m_j}^{(jj)} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m_j1}^{(jj)} & \cdots & h_{m_jm_j}^{(jj)} \end{pmatrix}=\overline{H}'_{jj}, j=1,\cdots,s,$$

$$H_{ij}=\begin{pmatrix} h_{11}^{(ij)} & \cdots & h_{1m_j}^{(ij)} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m_i1}^{(ij)} & \cdots & h_{m_im_j}^{(ij)} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} j=i+1,\cdots,s \\ i=k_1,\cdots,k_{l-1} \end{matrix},$$

$$\delta H_{jj}=\prod_{r=1}^{m_j}\mathrm{d}h_{rr}^{(jj)}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant m_j}\mathrm{d}(\mathrm{Re}h_{\alpha\beta}^{(jj)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}h_{\alpha\beta}^{(jj)}), j=1,\cdots,s.$$

$$\delta H_{ij}=\prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{\beta=1}^{m_j}\mathrm{d}(\mathrm{Re}h_{\alpha\beta}^{(ij)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}h_{\alpha\beta}^{(ij)}), j=i+1,\cdots,s \quad i=k_1,\cdots,k_{l-1}.$$

$V_{\mathrm{I}}\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$上的 Riemann 度量是

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{tr}(\mathrm{d}H\,\overline{\mathrm{d}H'}),$$

其体积元素

$$\delta H=2^{N-m}\prod_{j=1}^{s}\delta H_{jj}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\delta H_{k_ij},$$

显然 $\mathrm{d}s^2$ 和 δH 在映射 $H\to\Gamma H\overline{\Gamma}'$ 下是不变的，其中 Γ 是如下形式的 m 阶酉矩阵

$$\Gamma=\begin{pmatrix} \Gamma_1^{(m_1)} & & & 0 \\ & \Gamma_2^{(m_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Gamma_s^{(m_s)} \end{pmatrix} \tag{5.4.13}$$

另一方面，对 $H\in V_{\mathrm{I}}\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}$，存在一个对角线元素为正值的上三角矩阵 T 使得 $H=T\overline{T}'$. T 形如(5.4.2). 设

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1s} \\ & T_{22} & \cdots & T_{2s} \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & T_{ss} \end{pmatrix}, T_{ij}=0(i\neq k_1,\cdots,k_l,j>i),$$

$$T_{jj}=\begin{pmatrix} t_{11}^{(jj)} & t_{12}^{(jj)} & \cdots & t_{1m_j}^{(jj)} \\ & t_{22}^{(jj)} & \cdots & t_{2m_j}^{(jj)} \\ & & \ddots{}^{*} & \vdots \\ 0 & & & t_{m_jm_j}^{(jj)} \end{pmatrix},\ j=1,\cdots,s,$$

$$T_{ij}=\begin{pmatrix} t_{11}^{(ij)} & \cdots & t_{1m_j}^{(ij)} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m_i1}^{(ij)} & \cdots & t_{m_im_j}^{(ij)} \end{pmatrix} j=i+1,\cdots,s,\ i=k_1,\cdots,k_{l-1}, \tag{5.4.14}$$

$$\mathrm{d}T_{jj}=\prod_{r=1}^{m_j}\mathrm{d}t_{rr}^{(jj)}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant m_j}\mathrm{d}(\mathrm{Re}\,t_{\alpha\beta}^{(jj)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,t_{\alpha\beta}^{(jj)}),\ j=1,\cdots,s,$$

$$\mathrm{d}T_{ij}=\prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{\beta=1}^{m_j}\mathrm{d}(\mathrm{Re}\,t_{\alpha\beta}^{(ij)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,t_{\alpha\beta}^{(ij)}),\ j=i+1,\cdots,s,\ i=k_1,\cdots,k_{l-1}$$

$$\mathrm{d}T=\prod_{j=1}^{s}\mathrm{d}T_{jj}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\mathrm{d}T_{k_ij}.$$

由[Lu3]第 344 页(4)可求得

$$\delta H=2^N\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}(\det T_{jj})^{2m_{k_i}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(t_{jj}^{(ii)})^{2j-1}\mathrm{d}T. \tag{5.4.15}$$

定理 1. 设

$$V_{\mathrm{I}}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}=\left\{H\mid H>0, H\in H\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}\right\},$$

则在 $\mathrm{Aut}V_{\mathrm{I}}\begin{Bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{Bmatrix}$ 下, $V_{\mathrm{I}}\begin{Bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{Bmatrix}$ 的不变体积元素

$$\dot{H}=|H|^{-m}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|H_{jj}|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}|H_{(k_i)}|^{-\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}\delta H, \tag{5.4.16}$$

其中 $|H|=\det H$, $|H_{jj}|=\det H_{jj}$, $|H_{(k_i)}|=\det H_{(k_i)}$,

$$H_{(r)}=\begin{pmatrix} H_{rr} & H_{r\,r+1} & \cdots & H_{rs} \\ \overline{H}'_{r\,r+1} & H_{r+1\,r+1} & \cdots & H_{r+1\,s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{H}'_{rs} & \overline{H}'_{r+1\,s} & \cdots & H_{ss} \end{pmatrix},\quad \begin{array}{l} H_{ij}=0(i\neq k_2,\cdots,k_l;j>i) \\ r=k_2,k_3,\cdots,k_l \end{array}$$

为 H 中位于 r 行至 s 行及 r 列至 s 列的子矩阵.

当 $s=2$ 时,这就是[ZhJ1]命题 1.

证:如果 A 是形如(5.4.13)的酉矩阵,显然(5.4.16)是不变的.所以只需考虑 A 是上三角矩阵且对角线元素为正值的情形.设 $TT'=H$,T 如(5.4.14)所示.这时

$$AH\bar{A}'=(AT)(\overline{AT})'.$$

由(5.4.15)

$$\begin{aligned}\delta(AH\bar{A}')&=\delta[(AT)(\overline{AT})']\\&=2^N\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}}|A_{jj}T_{jj}|^{2m_{k_i}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(a_{jj}^{(i)}t_{jj}^{(i)})^{2j-1}\mathrm{d}(AT)\end{aligned}$$

可求得

$$\mathrm{d}(AT)=\prod_{i=1}^{l-1}|A_{k_ik_i}|^{2(m-\sum_{r=1}^{k_i}m_r)}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(a_{jj}^{(i)})^{2(m_i-j)+1}\mathrm{d}T,$$

所以

$$\delta(AH\bar{A}')=|A|^{2m}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|A_{jj}|^{2(m_j-m+\sum_{r=1}^{k_i}m_r)}\prod_{i=2}^{l}|A_{(k_i)}|^{-2\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i}m_r}\delta H,$$

其中 $A_{(r)}(r=k_2,\cdots,k_l)$的意义与 $H_{(r)}$相同.因为

$$|AH\bar{A}'|=|A|^2|H|,$$

$$|A_{jj}H_{jj}\bar{A}'_{jj}|=|A_{jj}|^2|H_{jj}|,\ 2\leqslant j\leqslant s,\ j\neq k_2,\cdots,k_{l-1},$$

$$|A_{(r)}H_{(r)}\bar{A}'_{(r)}|=|A_{(r)}|^2|H_{(r)}|,\ r=k_2,\cdots,k_l.$$

所以

$$\begin{aligned}|AH\bar{A}'|^{-m}&\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|A_{jj}H_{jj}\bar{A}'_{jj}|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\\&\prod_{i=2}^{l}|A_{(k_i)}H_{(k_i)}\bar{A}'_{(k_i)}|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i}m_r}\delta(AH\bar{A}')\\&=|H|^{-m}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|H_{jj}|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}|H_{(k_i)}|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i}m_r}\delta H.\end{aligned}$$

(5.4.17)

2. $V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}=\left\{X\,|\,X=(H^{-1})_\perp,H\in V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}\right\}$,
$V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$的运动群是

$$\mathrm{Aut}\,V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}=\{X\to(AX\bar{A}')_\perp\,|\,A\text{ 形如(5.4.11)}\}$$

容易看出,映射

$$X\to(AX\bar{A}')_\perp$$

与映射

$$X_j \to A_j X_j \overline{A}'_j, j=2,\cdots,s$$

是等价的，其中 X_j，A_j 分别由(5.4.7)及(5.4.8)所示. 下面考虑在 $\mathrm{Aut}\, V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{pmatrix}$ 下，$V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{pmatrix}$ 的不变体积元素. 设

$$X_{jj} = \begin{pmatrix} x_{11}^{(jj)} & \cdots & x_{1m_j}^{(jj)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m_j1}^{(jj)} & \cdots & x_{m_jm_j}^{(jj)} \end{pmatrix} = \overline{X}'_{jj},\ j=1,\cdots,s, \tag{5.4.18}$$

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11}^{(ij)} & \cdots & x_{1m_j}^{(ij)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m_i1}^{(ij)} & \cdots & x_{m_im_j}^{(ij)} \end{pmatrix},\ j=i+1,\cdots,s,\ i=k_1,\cdots,k_{l-1}$$

$$\delta X_{jj} = \prod_{r=1}^{m_j} \mathrm{d}x_{rr}^{(jj)} \prod_{1\le\alpha<\beta\le m_j} \mathrm{d}(\mathrm{Re}\,x_{\alpha\beta}^{(jj)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,x_{\alpha\beta}^{(jj)}),\ j=1,\cdots,s.$$

$$\delta X_{ij} = \prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{\beta=1}^{m_j} \mathrm{d}(\mathrm{Re}\,x_{\alpha\beta}^{(ij)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,x_{\alpha\beta}^{(ij)}),\ j=i+1,\cdots,s,\ i=k_1,\cdots,$$

k_{l-1},

$V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{pmatrix}$ 上的 Riemann 度量是

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{d}X\,\overline{\mathrm{d}X}'),$$

体积元素

$$\delta X = 2^{N-m}\prod_{j=1}^{s}\delta X_{jj}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{k_i+1}^{s}\delta X_{k_ij}.$$

如果 Γ 是形如(5.4.13)的酉矩阵，则 $\mathrm{d}S^2$ 和 δX 在映射 $X\to\Gamma X\overline{\Gamma}'$ 下是不变的. 另一方面，$\forall X\in V_{\mathrm{I}}^*\begin{pmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{pmatrix}$ 有

$$X_j>0,\ j=2,\cdots,s$$

所以存在对角线元素为正值的下三角矩阵 T_j 使得 $X_j=T_j\overline{T}'_j$ $(j=2,\cdots,s)$，即有(5.4.10)成立，且 $X=(T\overline{T}')_{\mathrm{L}}$. 其中 T_j，T 分别如(5.4.9)，(5.4.11)所示. 设

$$T_{jj} = \begin{pmatrix} t^{(jj)} & & & 0 \\ t_{21}^{(jj)} & t_{22}^{(jj)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{m_j1}^{(jj)} & t_{m_j2}^{(jj)} & \cdots & t_{m_jm_j}^{(jj)} \end{pmatrix},\ j=1,\cdots,s. \tag{5.4.19}$$

$$T_{ji}=\begin{pmatrix} t_{11}^{(ji)} & \cdots & x_{1m_i}^{(ji)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m_j1}^{(ji)} & \cdots & t_{m_jm_i}^{(ji)} \end{pmatrix},\ j=i+1,\cdots,s,\ i=k_1,\cdots,k_{l-1}.$$

$$\mathrm{d}T_{jj}=\prod_{r=1}^{m_j}\mathrm{d}t_{rr}^{(jj)}\prod_{1\leqslant\beta<\alpha\leqslant m_j}\mathrm{d}(\mathrm{Re}t_{\alpha\beta}^{(jj)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}t_{\alpha\beta}^{(jj)}),\ j=1,\cdots,s.$$

$$\mathrm{d}T_{ji}=\prod_{\alpha=1}^{m_j}\prod_{\beta=1}^{m_i}\mathrm{d}(\mathrm{Re}t_{\alpha\beta}^{(ji)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}t_{\alpha\beta}^{(ji)}),j=i+1,\cdots,s,i=k_1,\cdots,k_{l-1}.$$

$$\mathrm{d}T=\prod_{j=1}^{s}\mathrm{d}T_{jj}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\mathrm{d}T_{jk_i}$$

则

$$\delta X=\delta(T\overline{T}')_{\perp}2^N\prod_{i=1}^{l-1}|T_{k_ik_i}|^{2\left(m-\sum\limits_{r=1}^{k_i}m_r\right)}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(t_{jj}^{(ii)})^{2(m_i-j)+1}\mathrm{d}T. \tag{5.4.20}$$

定理 2. 设

$$V_{\mathrm{I}}^*\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}=\left\{X\mid X=(H^{-1})_{\perp},H\in V_{\mathrm{I}}\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}\right\},$$

则在 $\mathrm{Aut}\,V_{\mathrm{I}}^*\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}$ 下,$V_{\mathrm{I}}^*\begin{bmatrix} m_1,\cdots,m_s \\ k_1,\cdots,k_l \end{bmatrix}$ 的不变体积元素

$$\dot{X}=\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|X_j|^{-\left(m_j+\sum\limits_{r=1}^{i}m_{k_r}\right)}\prod_{i=1}^{l}|X_{k_i}|^{(k_{i+1}-1-k_i)\sum\limits_{r=1}^{i}mk_r}\delta X, \tag{5.4.21}$$

其中 $X_j(j=1,\cdots,s)$如(5.4.5)所示,$k_{l+1}=s$.

证:如果 A 是(5.4.13)所示的酉矩阵,显然(5.4.21)是不变的.所以,只需考虑 A 形如(5.4.11)且对角线元素为正值的情形.设

$X=(T\overline{T}')_{\perp}$,

则

$(AX\overline{A}')_{\perp}=[A(T\overline{T}')\overline{A}']_{\perp}=(AT\overline{T}'\overline{A}')_{\perp}=[(AT)(\overline{AT})']_{\perp}$.

由(5.4.20)

$$\delta(AX\overline{A}')_{\perp}=2^N\prod_{i=1}^{l-1}|A_{k_ik_i}T_{k_ik_i}|^{2\left(m-\sum\limits_{r=1}^{k_i}m_r\right)}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(a_{jj}^{(ii)}t_{jj}^{(ii)})^{2(m_i-j)+1}\mathrm{d}(AT)$$

可求得

$$\mathrm{d}(AT)=\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}|A_{jj}|^{2mk_i}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(a_{jj}^{(ii)})^{2j-1}\mathrm{d}X.$$

代入 $\delta(AX\bar{A}')_{-}$ 得

$$\delta(AX\bar{A}')_{-}=\prod_{i=1}^{l}|A_{k_ik_i}|^{2\left(m\sum_{r=1}^{k_i}m_r+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}\right)}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|A_{jj}|^{2\left(m_j+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}\right)}\delta X$$

$$=\prod_{i=1}^{l}(|A_{k_1k_1}||A_{k_2k_2}|\cdots|A_{k_ik_i}|)^{-2(k_{i+1}-1-k_i)\sum_{r=1}^{i}mk_r}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}(|A_{k_1k_1}||A_{k_2k_2}|\cdots|A_{k_ik_i}||A_{jj}|)^{2\left(m_j+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}\right)}\delta X.$$

因为

$|A_{11}X_{11}\bar{A}'_{11}|=|A_{11}|^2|X_{11}|$，记 $A_1=A_{11}$.

$|A_jX_j\bar{A}'_j|=(|A_{k_1k_1}||A_{k_2k_2}|\cdots|A_{k_ik_i}||A_{jj}|)^2|X_j|$.

$j=k_i+1,\cdots,k_{i+1},\ i=2,\cdots,l-1$.

其中 $A_j(j=2,\cdots,s)$ 如(5.4.8)所示，所以

$$\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|A_jX_j\bar{A}'_j|^{-\left(m_j+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}\right)}\prod_{i=1}^{l}|A_{k_i}X_{k_i}\bar{A}'_{k_i}|^{(k_{i+1}-1-k_i)\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}}\delta(AX\bar{A}')_{\perp}$$

$$=\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|X_j|^{\left(m_j+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}\right)}\prod_{i=1}^{l}|X_{k_i}|^{(k_{i+1}-1-k_i)\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}}\delta X.$$

3. **定理 3.** 设

$$I_0=\int_{V_1}e^{-\operatorname{tr}H}|H|^{S_1}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|H_{jj}|^{S_j}\prod_{i=2}^{l}|H_{(k_i)}|^{S_{k_i}}\dot{H},$$

若 $S_1>m-1$；$S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j>m_j-1$，$j=k_i+1,\cdots,k_{i+1}-1$，

$i=1,\cdots,l-1$；$S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}>m-1-\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r$，$i=2,\cdots,l$. 则

$$I_0=(2\sqrt{\pi})^{N-m}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\prod_{r=1}^{m_j}\Gamma(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-(m_j-r))$$

$$\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}\Gamma\left(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-\left(m-j-\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r\right)\right),\qquad(5.4.22)$$

其中 $\sum_{r=1}^{k_1-1}m_r=0$.

证：设 $H=T\bar{T}'$，T 如(5.4.14)所示，$T_{(r)}(r=k_2,\cdots,k_l)$ 的意义同

$H_{(r)}$),则

$$\mathrm{tr}H = \sum_{j=1}^{s}\mathrm{tr}(T_{jj}\bar{T}'_{jj}) + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{s}\mathrm{tr}(T_{k_ij}\bar{T}'_{k_ij}), \quad |H| = |TT'| = \prod_{j=1}^{s}|T_{jj}|^2,$$

$$|H_{(r)}| = |T_{(r)}\bar{T}'_{(r)}| = \prod_{j=r}^{s}|T_{jj}|^2, \quad r = k_2,\cdots,k_l,$$

$$|H_{jj}| = |T_{jj}|^2, \quad 2\leqslant j\leqslant s, j\neq k_2,\cdots,k_{l-1},$$

所以

$$I_0 = 2^N\int_{TT'>0}\exp\left[-\sum_{j=1}^{s}\mathrm{tr}(T_{jj}T'_{jj}) - \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{s}\mathrm{tr}(T_{k_ij}T'_{k_ij})\right]$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|T_{jj}|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-m_j)}\prod_{i=1}^{l}|T_{k_ik_i}|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-m+\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r)}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(t_{jj}^{(ii)})^{2j-1}\mathrm{d}T$$

$$= 2^N\left[\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\int_{T_{k_ij}}e^{-\mathrm{tr}(T_{k_ij}T'_{k_ij})}\mathrm{d}T_{k_ij}\right]$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\int_{T_{jj}>0}e^{-\mathrm{tr}(T_{jj}T'_{jj})}|T_{jj}|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-m_j)}\prod_{r=1}^{m_j}(t_{rr}^{(jj)})^{2r-1}\mathrm{d}T_{jj}\right)$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{l}\int_{T_{k_ik_i}>0}e^{-\mathrm{tr}(T_{k_ik_i}T'_{k_ik_i})}|T_{k_ik_i}|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-m+\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r)}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}(t_{jj}^{(k_ik_i)})^{2j-1}\mathrm{d}T_{k_ik_i}\right).$$

其中$\int_{T_{k_ij}}$表示T_{k_ij}的每一个元素从$-\infty$到$+\infty$积分. 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}, \quad \int_0^{+\infty}e^{-t^2}t^k\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \tag{5.4.23}$$

所以

$$\int_{T_{ij}}e^{-\mathrm{tr}(T_{ij}T'_{ij})}\mathrm{d}T_{ij} = (\sqrt{\pi})^{2m_im_j}, \quad j = i+1,\cdots,s, \ i = k_1,k_2,\cdots,k_{l-1}.$$

$$\int_{T_{jj}>0}e^{-\mathrm{tr}(T_{jj}T'_{jj})}|T_{jj}|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-m_j)}\prod_{r=1}^{m_j}(t_{rr}^{(jj)})^{2r-1}\mathrm{d}T_{jj}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m_j}(\sqrt{\pi})^{m_j(m_j-1)}\prod_{r=1}^{m_j}\Gamma(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-(m_j-r)).$$

$j = k_i+1,\cdots,k_{i+1}-1, \ i = 1,\cdots,l-1$

$$\int_{T_{k_ik_i}>0}e^{-\mathrm{tr}(T_{k_ik_i}T'_{k_ik_i})}|T_{k_ik_i}|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-m+\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r)}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}(t_{jj}^{(k_ik_i)})^{2j-1}\mathrm{d}T_{k_ik_i}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{k_i}} (\sqrt{\pi})^{m_{k_i}(m_{k_i}-1)} \prod_{j=1}^{m_{k_i}} \Gamma\left(S_{k_1} + S_{k_2} + \cdots + S_{k_i} - \left(m - j - \sum_{r=1}^{k_i-1} m_r\right)\right),$$

$i = 1, \cdots, l.$

将上述各结果代入 I_0 可得(5.4.22).

定理 4. 设 $X \in V_{\mathrm{I}}^{*}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$,则

$$I(X) = \int_{V_I} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(XH)} |H|^{S_1} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |H_{jj}|^{S_j} \prod_{i=2}^{l} |H_{(k_i)}|^{S_{k_i}} \dot{H}$$

$$= I_0 \prod_{i=1}^{l} |X_{K_i}|^{(k_{i+1}-1-k_i)(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i})+\sum_{r=k_i+1}^{k_{i+1}} S_r} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |X_j|^{-(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j)},$$

(5.4.24)

其中 $k_{l+1} = s, \sum_{r=k_l+1}^{s} S_r = 0.$

证: 因为 $X \in V_{\mathrm{I}}^{*}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$,所以存在形如(5.4.11)的矩阵 T 使得 $X = (T\bar{T}')_{\mathrm{I}}$,由于

$$\mathrm{tr}(XH) = \mathrm{tr}[(T\bar{T}')_{\mathrm{I}} H] = \mathrm{tr}(T\bar{T}'H) = \mathrm{tr}(T'HT),$$

所以,若设

$$\widetilde{H} = \bar{T}'HT,$$

则映射 $H \to \widetilde{H}$ 属于 $\mathrm{Aut}\, V_{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$,因而

$$\dot{\widetilde{H}} = \dot{H}.$$

因为

$$|\widetilde{H}| = |T|^2 |H|,$$

$$|\widetilde{H}_{jj}| = |T_{jj}|^2 |H_{jj}|, \quad 2 \leqslant j \leqslant s, j \neq k_2, k_3, \cdots, k_{l-1},$$

$$|\widetilde{H}_{(r)}| = |T_{(r)}|^2 |H_{(r)}|, \quad r = k_2, k_3, \cdots, k_l,$$

其中 $T_{(r)}$ 的意义与 $H_{(r)}$ 相同.所以

$$I(X) = \int_{V_I} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\widetilde{H}} |\widetilde{H}|^{S_1} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |\widetilde{H}_{jj}|^{S_j} \prod_{i=2}^{l} |\widetilde{H}_{(k_i)}|^{S_{k_i}} |T|^{-2S_1}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |T_{jj}|^{-2S_j} \prod_{i=2}^{l} |T_{(k_i)}|^{-2S_{k_i}} \dot{\widetilde{H}}$$

$$= I_0 |T|^{-2S_1} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |T_{jj}|^{-2S_j} \prod_{i=2}^{l} |T_{(k_i)}|^{-2S_{k_i}}.$$

又因为

$$|T| = |T_{11}|\cdots|T_{ss}|,\ |T_{(r)}| = |T_{rr}|\cdots|T_{ss}|,\ r = k_2, k_3, \cdots k_l,$$
$$|X_{11}| = |T_{11}|^2 (\because\ X_{11} = T_{11}\overline{T}'_{11})$$
$$|X_j| = |T_{k_1k_1}|^2 |T_{k_2k_2}|^2 \cdots |T_{k_ik_i}|^2 |T_{jj}|^2 (\because\ X_j = T_j\overline{T}'_j),$$
$$j = k_i + 1, \cdots, k_{i+1}, i = 1, \cdots, l-1.$$

将上述各式代入 $I(X)$ 可得(5.4.24).

定理 3 中的 I_0 称为 $V_I\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}$ 上的 Gamma 函数. 定理 4 中的 $I(X)$ 称为 $V_l\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}$ 上的 Siegel 积分. 定理 3 与定理 4 分别是 Gamma 函数及 Siegel 积分在非自共轭锥 $V_l\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}$ 上的锥广. 若 $s=2, S_2=0$, 便与自共轭锥 $V=\{H \mid H=\overline{H}', H>0\}$ 的情形一致, 即得到[ZhJ1]的命题 2 和命题 3.

4. 定理 5 设

$$I_0^* = \int_{V_l^*} e^{-\mathrm{tr}X} |X_{11}|^{S_1} \prod_{j=2}^{s} |X_j|^{S_j} \dot{X},$$

若 $S_j > m_{k_1} + m_{k_2} + \cdots + m_{k_i} + m_j - 1, j = k_i + 1, \cdots, k_{i+1} - 1, i = 1, \cdots l-1$; $S_{k_i} > m_{k_1} + m_{k_2} + \cdots + m_{k_i} - 1 - \sum_{r=k_i+1}^{s} S_r, i = 1, \cdots l$. 其中 $\sum_{r=k_l+1}^{s} S_r = 0$. 则

$$I_0^* = (2\sqrt{\pi})^{N-m} \prod_{j=1}^{m_1} \Gamma\Big(\sum_{r=1}^{s} S_r - (j-1)\Big) \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \prod_{r=1}^{m_j} \Gamma(S_j - (r - 1 + m_{k_1}$$
$$+ m_{k_2} + \cdots + m_{k_i})) \cdot \prod_{i=2}^{l} \prod_{j=1}^{m_{k_i}} \Gamma\Big(\sum_{r=k_i}^{s} S_r - (j - 1 + m_{k_1} + m_{k_2} + \cdots + m_{k_{i-1}})\Big)$$

(5.4.25)

证: 设 $X = (T\overline{T}')_-$. T 如(5.4.11)及(5.4.19)所示, 则

$$\mathrm{tr}X = \mathrm{tr}(T\overline{T}')_- = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{tr}(T_{jj}\overline{T}'_{jj}) + \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=k_i+1}^{s} \mathrm{tr}(T_{jk_i}\overline{T}'_{jk_i}),$$
$$|X_{11}| = |T_{11}|^2, \ |X_j| = |T_{k_1k_1}|^2 |T_{k_2k_2}|^2 \cdots |T_{k_ik_i}|^2 |T_{jj}|^2,$$
$$j = k_i + 1, \cdots, k_{i+1}, i = 1, \cdots, l-1.$$

将(5.4.20)、(5.4.21)及上述各式代入 I_0^* 可得

$$I_0^* = 2^N\int_{V_1^*}\exp\left[-\sum_{j=1}^{s}\operatorname{tr}(T_{jj}\bar{T}'_{jj})+\sum_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\operatorname{tr}(T_{jk_i}\bar{T}'_{jk_i})\right]$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|T_{jj}|^{2S_j-2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}+m_j)}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{l}|T_{k_ik_i}|^{2\sum_{r=k_i}^{s}S_r-2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(t_{jj}^{(ii)})^{2(m_i-j)+1}\mathrm{d}T$$

$$=2^N\left(\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\int_{T_jk_i}\mathrm{e}^{-\operatorname{tr}(T_jk_iT'jk_i)}\mathrm{d}T_jk_i\right)$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\int_{T_{jj}>0}\mathrm{e}^{-\operatorname{tr}(T_{jj}\bar{T}'_{jj})}|T_{jj}|^{2S_j-2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}+m_j)}\right.$$

$$\left.\cdot\prod_{r=1}^{m_j}(t_{rr}^{(jj)})^{2(m_j-r)+1}\mathrm{d}T_{jj}\right)$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{l}\int_{T_{k_ik_i}>0}\mathrm{e}^{-\operatorname{tr}(T_{k_ik_i}\bar{T}'_{k_ik_i})}|T_{k_ik_i}|^{2\sum_{r=k_i}^{s}S_r-2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})}\right.$$

$$\left.\cdot\prod_{j=1}^{m_{k_i}}(t_{jj}^{(k_ik_i)})^{2(m_{k_i}-j)+1}\mathrm{d}T_{k_ik_i}\right).$$

应用(5.4.23)于上式便可得到(2.4.25).

定理 6. 设 $H\in V_I\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s,\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$,则

$$I^*(H)=\int_{V_1^*}\mathrm{e}^{-\operatorname{tr}(XH)}|X_{11}|^{S_1}\prod_{j=2}^{s}|X_j|^{S_j}\dot{X}$$

$$=I_0^*|H|^{-\sum_{r=1}^{s}S_r}\prod_{i=2}^{l}|H_{(k_i)}|^{\sum_{r=k_{i-1}}^{k_i-1}S_r}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|H_{jj}|^{\sum_{r=k_i}^{s}S_r-S_j}.\quad(5.4.26)$$

证: 因为 $H\in V_I\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$,所以存在一个如(5.4.14)所示的上三角矩阵 T 使得 $H=T\bar{T}'$. 因为

$$\operatorname{tr}(XH)=\operatorname{tr}(XT\bar{T}')=\operatorname{tr}(\bar{T}'XT)=\operatorname{tr}(\bar{T}'XT)_\perp,$$

所以若设 $\tilde{X}=(T'XT)_\perp$,则映射 $X\to\tilde{X}$ 属于 $\operatorname{Aut}V_1^*\begin{Bmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{Bmatrix}$,因而

$$\dot{\tilde{X}}=\dot{X},$$

因为

$$|\widetilde{X}_{11}| = |T_{11}|^2|X_{11}|, |\widetilde{X}_j| = |T_j|^2|X_j|, j=2,\cdots,s,$$

$$|T_j| = |T_{k_ik_i}||T_{k_ik_i}|\cdots||T_{k_ik_i}||T_{jj}|, j=k_i+1,\cdots,k_{i+1}, i=1,\cdots l-1,$$

其中 $X_j(j=2,\cdots,s)$如(5.4.5)所示，$\widetilde{X}_j, T_j(j=2,\cdots s)$的意义同 X_j. 所以

$$I^*(H) = \int_{V_l^*} e^{-\operatorname{tr}\widetilde{X}} |\widetilde{X}_{11}|^{S_1}\prod_{j=2}^{s}|\widetilde{X}_j|^{S_j}|T_{11}|^{2S_1}\prod_{j=2}^{s}|T_j|^{2S_j}\dot{\widetilde{X}}$$

$$= I_0^*\prod_{i=1}^{l}|T_{k_ik_i}|^{2\sum_{r=k_i}^{s}S_r}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|T_{jj}|^{2S_j}.$$

由于

$|H| = |T_{11}|^2\cdots|T_{ss}|^2, |H_{(r)}| = |T_{rr}|^2\cdots|T_{ss}|^2, r=k_2,k_3,\cdots k_l,$

$|H_{jj}| = |T_{jj}|^2, 2\leqslant j\leqslant s, j\neq k_2,k_3,\cdots k_{l-1}.$

将上述各式代入 $I^*(H)$可得(5.4.26).

定理 5 与定理 6 分别是 Gamma 函数与 Siegel 积分在非自共轭锥 $V_l^*\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$上的推广. 其特殊情形 $s=2, S_1=0$ 便是[ZhJ1]的命题 2 与命题 3.

Ⅳ.3 Siegel 积分的应用

本节将利用 Siegel 积分(5.4.24)和(5.4.26)分别得到第一类非对称齐性 Siegel 域 $D(V_l)$和 $D(V_l^*)$(也分别称为 $V_l\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$和 $V_l^*\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$上的 tube 域)的 Cauchy-Szego 核及形式 Poisson 核.

根据 Bochner 的理论[Boc]，如果 V 和 V^* 是共轭锥且是正则锥，对于 $y=(y_1,\cdots,y_n)\in V, X=(x_1\cdots x_n)\in V^*$，积分

$$K(y) = \int_{V^*} e^{-xy}\,dx$$

存在，设 $D(V)=\{Z\in \mathbf{C}^n | \operatorname{Im} Z\in V\}$，则 $K(\sqrt{-1}(Z-X))$(X 属于 $D(V)$的特征流形)是域 $D(V)$的 Cauchy-Szegö 核.

为了得到 $D(V_l)$和 $D(V_l^*)$的 Cauchy-Szego 核，只需计算下面的积分

$$K(H) = \int_{V_l^*} e^{-\operatorname{tr}(XH)}dX, \quad \left\{H\in V_l\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}\right\}, \tag{5.4.27}$$

$$K^*(X) = \int_{V_l} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(XH)}\mathrm{d}H, \quad \left\{X \in V_l^*\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_l \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}\right\}. \qquad (5.4.28)$$

为此，在积分(5.4.24)中令

$$S_1 = m; S_{k_i} = -\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1} m_r, \ i=2,\cdots,l.$$

$$S_j = m_j + \sum_{r=1}^{k_i} m_r - m, \ j = k_i+1,\cdots k_{i+1}-1, i=1,\cdots,l-1,$$

可得

$$\int_{V_l} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(XH)}\delta H = (2\sqrt{\pi})^{N-m}\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(j)\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\prod_{r=1}^{m_j}\Gamma(r+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})$$

$$\cdot\prod_{i=2}^{l}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}\Gamma(j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_{i-1}})\prod_{i=1}^{l}|X_{k_i}|^{-(k_{i+1}-1-k_i)(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|X_j|^{-(m_j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})}$$

设

$$C_0 = (2\sqrt{\pi})^{N-m}\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(j)\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\prod_{r=1}^{m_j}\Gamma(r+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})$$

$$\cdot\prod_{i=2}^{l}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}\Gamma(j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_{i-1}}).$$

$$\mathrm{d}H = 2^{m-N}\delta H,$$

得到

$$K^*(X) = 2^{m-N}C_0\prod_{i=1}^{l}|X_{k_i}|^{-(k_{i+1}-1-k_i)(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|X_j|^{-(m_j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})}$$

同理，在(5.4.26)中令

$$S_j = m_j + \sum_{r=1}^{i} m_{k_r}, \ j = k_i+1,\cdots,k_{i+1}-1, \ i = 1,\cdots,l-1.$$

$$S_{k_i} = -(k_{i+1}-1-k_i)\sum_{r=1}^{i} m_{k_r}, \ i = 1,\cdots l.$$

并设

$$C_0^* = (2\sqrt{\pi})^{N-m}\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(m-j+1)\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\prod_{r=1}^{m_j}\Gamma(m_j+r+1)$$

$$\cdot\prod_{i=2}^{l}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}\Gamma\left(m-j+1-\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r\right),$$

$$\mathrm{d}X = 2^{m-N}\delta X,$$

可得

$$K(H) = 2^{m-N}C_0^*\,|H|^{-m}\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|H_{jj}|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}|H_{(k_i)}|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}.$$

如果 $D(V_I)$和 $D(V_I^*)$的 Cauchy－Szegö 核分别由 $H(Z,U)$和 $H^*(Z,U)$表示,那么

$$H(Z,U) = C\,\frac{\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|Z_{jj}-U_{jj}|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}|Z_{(k_i)}-U_{(k_i)}|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}}{|Z-U|^{m}}. \tag{5.4.29}$$

其中 $C=(\sqrt{-1})^{-N}2^{m-N}C_0^*$.

$$H^*(Z,U) = C^*\,\frac{\prod_{i=1}^{l}|Z_{k_i}-U_{k_i}|^{(k_{i+1}-1-k_i)(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})}}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|Z_j-U_j|^{m_j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}}}, \tag{5.4.30}$$

其中 $C^*=(\sqrt{-1})^{-N}2^{m-N}C_0$, $Z_1=Z_{11}$, $U_1=U_{11}$.

我们知道,$\mathbf{C}^n$ 中有界齐性域 D 的形式 Poisson 核 $P(z,\xi)$可由 D 的 Cauchy-Szegö 核 $h(z,\xi)$得到[Hua], $P(z,\xi)=|h(z,\xi)|^2/h(z,\bar z)$, 因此差一个常数因子,$D(V_I)$和 $D(V_I^*)$的形式 Poisson 核分别是

$$P(Z,U)=\frac{\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|Z_{jj}-U_{jj}\right|^{2(m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r)}\prod_{i=2}^{l}\left|Z_{(k_i)}-U_{(k_i)}\right|^{2\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}\left|Z-\bar Z\right|^{m}}{\left|Z-U\right|^{2m}\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|Z_{jj}-\bar Z_{jj}\right|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}\left|Z_{(k_i)}-\bar Z_{(k_i)}\right|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}},$$

$$P^*(Z,U)=\frac{\prod_{i=1}^{l}\left|Z_{k_i}-U_{k_i}\right|^{2(k_{i+1}-1-k_i)\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}}\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|Z_j-\bar Z_j\right|^{m_j+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}}}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|Z_j-U_j\right|^{2(m_j+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r})}\prod_{i=1}^{l}\left|Z_{k_i}-\bar Z_{k_i}\right|^{(k_{i+1}-1-k_i)\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}}}$$

本节内容取自文献[LGY,YGD,YW46].

V. 非自共轭锥上的 Gamma 函数(2)

现在讨论第Ⅲ类非自共轭锥的最一般的情形. 第 V.1 节给出第Ⅲ类非自共轭锥 V_{III} 相共轭的锥 V_{III}^* 及其运动群. 第 V.2 节给出 V_{III} 及 V_{III}^* 的

不变体积元素及相应的 Gamma 函数和 Siegel 积分，第 V.3 节则给出以 V_{III} 和 V_{III}^{*} 为底的第一类 Siegel 域（管状域）的 Cauchy-Szego 核和形式 Poisson 核．至于第 II 类·非自共轭锥的情形，方法相似，可参阅［Lin］．

V.1 $V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 的共轭锥及它们的运动群

1．考虑 $2m$ 阶 Hermite 矩阵 H 和斜对称方阵 J：

$$H=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{s1} & H_{s2} & \cdots & H_{ss} \end{bmatrix}\begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix},\ H=\overline{H}',\ M=\sum_{i=1}^{s} m_i,$$
$$\quad 2m_1 \quad 2m_2 \quad \cdots \quad 2m_s$$

$$H_{ij}=0(i\neq k_1,k_2,\cdots,k_l;j>i), \tag{5.5.1}$$

$$J=\begin{bmatrix} J_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_s} \end{bmatrix},J_{m_i}=\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}_{2m_i\times 2m_i}$$

$$JH=\bar{H}J,$$

其中 $k_i(i=1,2,\cdots,l)$ 为正整数，$1=k_1<k_2<\cdots<k_l=s$．这样的 Hermite 方阵的集合记为 $J\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$．锥

$$V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}=\left\{H>0 \mid H\in J\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}\right\}.$$

当 $l<s$ 时是非自共轭锥，当 $l=s$ 特别当 $s=2$ 时是自共轭锥［ZJY］．由［ZJY］可知，$V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 在运动群 $\{H\to AH\overline{A}'\}$ 下是可递的．其中

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ & \ddots & * \\ 0 & & A_{ss} \end{bmatrix}\begin{matrix} 2m_1 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix},A_{ii}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(ii)} & \cdots & a_{12m_i}^{(ii)} \\ & \ddots & * \\ 0 & & a_{2m_i2m_i}^{(ii)} \end{bmatrix},i=1,\cdots,s,$$
$$\quad 2m_1 \quad \cdots \quad 2m_s$$

$$A_{ij}=0(i\neq k_1,k_2,\cdots,k_l;j>i),$$
$$JA=\overline{A}J. \tag{5.5.2}$$

如果限制 A_{ii} 的对角线元素全为正数，就得到一个单可递的运动群.

2. 考虑 $V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 的共轭锥 $V_{\mathrm{III}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$. 易知

$$\dim V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{s}(2m_j^2 - m_j) + 4\sum_{i=1}^{l-1} m_{k_i}\sum_{j=k_i+1}^{s} m_j = N,$$

根据共轭锥的定义，$V_{\mathrm{III}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集并满足条件：

$$V_{\mathrm{III}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix} = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid (x, h) > 0, \ \forall h = (h_1, \cdots, h_N) \in \overline{V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}} \setminus \{0\} \right\},$$

其中 (x, h) 是 $\mathbf{R}^N$ 中点 x 与 h 的某一个内积.

将 $V_{\mathrm{III}}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 中的点写为如下形式的矩阵

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix}, \quad \begin{matrix} X = X', X_{ij} = 0 (i \neq k_1, k_2, \cdots, k_l; j > i), \\ JX = \bar{X}J. \end{matrix}$$
$$\qquad\ \ 2m_1 \quad 2m_2 \quad \cdots \quad 2m_s$$

$$X_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_{11}^{(jj)} & \frac{1}{4}x_{12}^{(jj)} & \cdots & \frac{1}{4}x_{1,2m_j}^{(jj)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{4}x_{1,2m_j}^{(jj)} & \frac{1}{4}x_{2,2m_j}^{(jj)} & \cdots & \frac{1}{2}x_{2m_j,2m_j}^{(jj)} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \cdots, s,$$

$$X_{ij} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_{11}^{(ij)} & x_{12}^{(ij)} & \cdots & x_{1,2m_j}^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2m_i,1}^{(ij)} & x_{2m_i,2}^{(ij)} & \cdots & x_{2m_i,2m_j}^{(ij)} \end{bmatrix}, \begin{matrix} j = i+1, \cdots, s, \\ i = k_1, k_2, \cdots, k_{l-1}. \end{matrix} \tag{5.5.3}$$

它也可记为向量形式的点 x，若 $\overline{V_{\mathrm{III}}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 中的点 H 的向量形式为 h，则可定义内积 (x, h) 为 $(x, h) = \mathrm{tr}(XH')$. 考虑

$$\mathrm{tr}(X\bar{H}') = \sum_{j=1}^{s}\mathrm{tr}(X_{jj}\bar{H}'_{jj}) + 2\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{s}\mathrm{tr}(X_{k_i j}\bar{H}'_{k_i j}) > 0. \tag{5.5.4}$$

由[ZJY]可知，对 $H \in V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$，存在形如(5.5.2)的 P 使得

$H = PP'$,因而

$$\operatorname{tr}(X\bar{H}') = \operatorname{tr}(XP\bar{P}') = \operatorname{tr}(\bar{P}'XP) = \operatorname{tr}\bar{P}'_{11}X_{11}P_{11} + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}}$$

$$\cdot \operatorname{tr}\left[(P'_{1j}\bar{P}'_{k_2j}\cdots\bar{P}'_{k_ij}\bar{P}'_{jj})\begin{bmatrix} X_{11} & X_{1k_2} & \cdots & X_{1k_i} & X_{1j} \\ \bar{X}'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & \cdots & X_{k_2k_i} & X_{k_2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{X}'_{1k_i} & \bar{X}'_{k_2k_i} & \cdots & X_{k_ik_i} & X_{k_ij} \\ X'_{1j} & \bar{X}'_{k_2j} & \cdots & \bar{X}'_{k_ij} & X_{jj} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{1j} \\ P_{k_2j} \\ \vdots \\ P_{k_ij} \\ P_{jj} \end{bmatrix}\right] > 0$$

对任何具(5.5.2)形式的 P 都适合,任意固定 j,令 $P_{rr}\to 0(r\neq j)$,$P_{k_ir}\to 0(r\neq j)$,$i=1,\cdots,l-1$.可得到

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{1k_2} & \cdots & X_{1k_i} & X_{1j} \\ X'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & \cdots & X_{k_2k_i} & X_{k_2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{X}'_{1k_i} & \bar{X}'_{k_2k_i} & \cdots & X_{k_ik_i} & X_{k_ij} \\ X'_{1j} & X'_{k_2j} & \cdots & X'_{k_ij} & X_{jj} \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{array}{l} j = k_i+1,\cdots,k_{i+1}, \\ i = 1,\cdots,l-1. \end{array}$$

取其内点,有

$$X_1 = X_{11} > 0;\ X_j = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{1j} \\ X'_{1j} & X_{jj} \end{bmatrix} > 0,\ j = 2,\cdots,k_2;$$

$$X_j = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{1k_2} & X_{1j} \\ \bar{X}'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & X_{k_2j} \\ X'_{1j} & \bar{X}'_{k_2j} & X_{jj} \end{bmatrix} > 0,\ j = k_2+1,\cdots,k_3;$$

$$X_j = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{1k_2} & X_{1k_3} & X_{1j} \\ \bar{X}'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & X_{k_2k_3} & X_{k_2j} \\ X'_{1k_3} & \bar{X}'_{k_2k_3} & X_{k_3k_3} & X_{k_3j} \\ X'_{1j} & \bar{X}'_{k_2j} & X'_{k_3j} & X_{jj} \end{bmatrix} > 0,\ j = k_3+1,\cdots,k_4;\cdots;$$

$$X_j = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{1k_2} & X_{1k_3} & \cdots & X_{1k_{l-1}} & X_{1j} \\ \bar{X}'_{1k_2} & X_{k_2k_2} & X_{k_2k_3} & \cdots & X_{k_2k_{l-1}} & X_{k_2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{X}'_{1k_{l-1}} & X'_{k_2k_{l-1}} & X'_{k_3k_{l-1}} & \cdots & X_{k_{l-1}k_{l-1}} & X_{k_{l-1}j} \\ \bar{X}'_{1j} & X'_{k_2j} & \bar{X}'_{k_3j} & \cdots & X'_{k_{l-1}j} & X_{jj} \end{bmatrix} > 0, \qquad (5.5.5)$$

$j=k_{l-1}+1,\cdots,s$

这表明,满足(5.5.4)的点也满足(5.5.5).反之,不难看出,满足(5.5.5)的点也满足(5.5.4).所以

$$V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}=\left\{X\in J\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}\middle| X_j>0,\right.$$

$$\left. X_j \text{ 如(5.5.5)所示}, j=2,\cdots,s\right\}, \qquad (5.5.6)$$

其中 $X_{jj}(j=1,\cdots,s)$, $X_{ij}(j=i+1,\cdots,s, i=k_1,k_2,\cdots,k_{l-1})$有(5.5.3)的形式.如果 X 的元素被视为一般意义下的变量,则

$$V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}=\left\{X\in J\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}\middle| X_j>0,\right.$$

$$\left. X_j \text{ 如(5.5.5)所示}, j=2,\cdots,s\right\}. \qquad (5.5.7)$$

3. $V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}$的运动群为

$$X_j \to A_j X_j \bar{A}_j', \quad j=2,\cdots,s, \qquad (5.5.8)$$

其中

$$A_j=\begin{bmatrix} A_{11} & & & & \\ A_{k_2 1} & A_{k_2 k_2} & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ A_{k_i 1} & A_{k_i k_2} & \cdots & A_{k_i k_i} & \\ A_{j1} & A_{jk_2} & \cdots & A_{jk_i} & A_{jj} \end{bmatrix}\begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_{k_2} \\ \vdots \\ 2m_{k_i} \\ 2m_j \end{matrix}, \quad \begin{matrix} j=k_i+1,\cdots,k_{i+1}, \\ i=1,\cdots,l-1. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2m_1 & 2m_{k_2} & \cdots & 2m_{k_i} & 2m_j \end{matrix}$$

$J_j A_j=\bar{A}_j J_j$, $j=2,\cdots,s$.

$$J_j=\begin{bmatrix} J_{m_1} & & & & \\ & J_{m_{k_2}} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & J_{m_{k_i}} & \\ & & & & J_{m_j} \end{bmatrix}.$$

它是可递的.事实上,$\forall X\in V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}$,因为 $X_j>0$ 且 $J_j X_j=\bar{X}_j J_j(j=2,\cdots,s)$,所以分别存在惟一的对角线元素为正值的下三角矩阵

$$T_j = \begin{bmatrix} T_{11} & & & & \\ T_{k_2 1} & T_{k_2 k_2} & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ T_{k_i 1} & T_{k_i k_2} & \cdots & T_{k_i k_i} & \\ T_{j1} & T_{jk_2} & \cdots & T_{jk_i} & T_{jj} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} j = k_i + 1, \cdots, k_{i+1}, \\ i = 1, \cdots, l-1. \end{array} \tag{5.5.9}$$

$$J_j T_j = \overline{T}_j J_j, \; j = 2, \cdots, s.$$

使得 $X_j = T_j \overline{T}_j'$，$j = 2, \cdots, s$. 即

$$\begin{aligned} &X_{11} = T_{11} \overline{T}_{11}', \\ &X_{jj} = T_{j1} \overline{T}_{j1}' + T_{jk_2} \overline{T}_{jk_2}' + \cdots + T_{jk_i} \overline{T}_{jk_i}' + T_{jj} \overline{T}_{jj}', \\ &\qquad j = k_i + 1, \cdots, k_{i+1}, i = 2, \cdots, l-1. \\ &X_{k_i j} = T_{k_i 1} \overline{T}_{j1}' + T_{k_i k_2} \overline{T}_{jk_2}' + \cdots + T_{k_i k_i} \overline{T}_{jk_i}', j = k_i + 1, \cdots, s, i = 1, \cdots, l-1. \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

取 $A_j = T_j^{-1}$，则 X 在映射 $X_j \to A_j X_j \overline{A}_j'$ $(j = 2, \cdots, s)$ 下的像为 I.

定义 设 W 是 $2m$ 阶 Hermite 矩阵

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1s} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{s1} & W_{s2} & \cdots & W_{ss} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2m_1 \\ 2m_2 \\ \vdots \\ 2m_s \end{matrix} = \overline{W}', \quad \begin{array}{l} m = \sum_{i=1}^{s} m_i, \\ JW = \overline{W}J \end{array}$$

$$\begin{matrix} \quad 2m_1 & 2m_2 & \cdots & 2m_s \end{matrix}$$

那么，在 W 中令 $W_{ij} = 0(i \neq k_1, k_2, \cdots, k_l; j > i)$，所得矩阵称为空间 $\mathbf{R}^N$ 中

$$V_{\mathrm{III}} \begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$$

上的一个投影，记为 $W_{\perp}$.

如果 T 是如下形式

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & & & \\ T_{21} & T_{22} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ T_{s1} & T_{s2} & \cdots & T_{ss} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} T_{ij} = 0(j \neq k_1, \cdots, k_l; i > j) \\ JT = \overline{T}J, \end{array} \tag{5.5.11}$$

用(5.5.10)表示矩阵 X，则 X 可写为

$$X = (T\overline{T}')_{\perp},$$

从而 $V_{Ⅲ}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$ 的运动群可表示为

$$X\to(AX\bar{A}')_{\perp},\tag{5.5.12}$$

其中 A 形如(5.5.11)所示. 它与(5.5.8)是相同的.

4. $V_{Ⅲ}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$ 也可如下定义

$$V_{Ⅲ}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}=\left\{X \mid X=(H^{-1})_{\perp}, H\in V_{Ⅲ}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}\right\}.$$

事实上, $\forall H\in V_{Ⅲ}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$, 存在形如(5.5.2)的上三角矩阵 P_0 使得 $H_0=P_0\bar{P}_0'$, 于是, $H_0^{-1}=(\bar{P}_0^{-1})'P_0^{-1}$. 因为 P_0^{-1} 也是一个上三角矩阵, 并且

$$H\to P_0^{-1}H(\overline{P_0^{-1}})'$$

是 $V_{Ⅲ}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$ 的一个同构, 所以对每个 $H\in V_{Ⅲ}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$

$$\mathrm{tr}[P_0^{-1}H(\overline{P_0^{-1}})']>0,$$

因而

$$\mathrm{tr}[(H_0^{-1})_{\perp}H]=\mathrm{tr}(H_0^{-1}H)=\mathrm{tr}[P_0^{-1}H(\overline{P_0^{-1}})']>0.$$

又因为

$$\begin{aligned}J(H_0^{-1})_{\perp}&=[J(\bar{P}_0^{-1})'P_0^{-1}]_{\perp}=[(-\bar{P}_0^{-1}J)'P_0^{-1}]_{\perp}=[(-JP_0^{-1})'P_0^{-1}]_{\perp}\\&=[(P_0^{-1})'JP_0^{-1}]_{\perp}=[(P_0^{-1})'\bar{P}_0^{-1}J]_{\perp}=[(\overline{H_0^{-1}})_{\perp}J],\end{aligned}$$

所以对每个 $H_0\in V_{Ⅲ}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$, $(H_0^{-1})_{\perp}\in V_{Ⅲ}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$. 另一方面, $\forall X\in V_{Ⅲ}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$, 由于 $X_j>0$, $J_jX_j=\bar{X}_jJ_j$ $(j=2,\cdots,s)$, 所以存在形如(5.5.9)的对角线元素为正值的下三角矩阵 T_j 使得

$$X_j=T_j\bar{T}_j',\quad j=2,\cdots,s.$$

设 T 形如(5.5.11), 则

$$X=(T\bar{T}')_{\perp}=[(\bar{T}'^{-1}T^{-1})^{-1}]_{\perp},$$

其中 $\bar{T}'^{-1}$ 是对角线元素为正值的上三角矩阵. 设 $H_0=\bar{T}'^{-1}T^{-1}$, 那么, $JH_0=J(\bar{T}^{-1})'T^{-1}=(T\bar{T}'J^{-1})^{-1}=[T(J\bar{T})']^{-1}=[T(TJ)']^{-1}=[-TJT']^{-1}=[-J\bar{T}T']^{-1}=\bar{T}'^{-1}T^{-1}J=H_0J$. 故 $H_0\in V_{Ⅲ}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$,

$X = (H_0^{\ 1})_{_}$.

V.2 $V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}, V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{pmatrix} m_1, \cdots, m_s \\ k_1, \cdots, k_l \end{pmatrix}$ 上的 Gamma 函数及 Siegel 积分

1．设

$$\operatorname{Aut} V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix} = \{H \to AH\bar{A}' \mid A \text{ 如(5.5.2)所示}\}.$$

现在考虑在 $\operatorname{Aut} V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 下，$V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 的不变体积元素．设 $H_{jj} = [H_{jj}^{(1)}, H_{jj}^{(2)}]$ 则

$$H_{jj}^{(1)} = \begin{pmatrix}
h_{11}^{(jj)} & 0 & h_{13}^{(jj)} & h_{14}^{(jj)} & h_{15}^{(jj)} & h_{16}^{(jj)} \\
0 & h_{11}^{(jj)} & \bar{h}_{14}^{(jj)} & \bar{h}_{13}^{(jj)} & h_{16}^{(jj)} & h_{15}^{(jj)} \\
h_{13}^{(jj)} & \cdot h_{14}^{(jj)} & h_{22}^{(jj)} & 0 & h_{25}^{(jj)} & h_{26}^{(jj)} \\
\bar{h}_{14}^{(jj)} & h_{13}^{(jj)} & 0 & h_{22}^{(jj)} & \bar{h}_{26}^{(jj)} & h_{25}^{(jj)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\bar{h}_{12m_j\ 3}^{(jj)} & h_{12m_j\ 2}^{(jj)} & h_{22m_j-3}^{(jj)} & -h_{22m_j\ 2}^{(jj)} & h_{32m_j\ 3}^{(jj)} & -h_{32m_j-2}^{(jj)} \\
\bar{h}_{12m_j\ 2}^{(jj)} & h_{12m_j\ 3}^{(jj)} & \bar{h}_{22m_j\ 2}^{(jj)} & h_{22m_j\ 3}^{(jj)} & h_{32m_j-2}^{(jj)} & h_{32m_j-3}^{(jj)} \\
\bar{h}_{12m_j-1}^{(jj)} & h_{12m_j}^{(jj)} & h_{22m_j\ 1}^{(jj)} & -h_{22m_j}^{(jj)} & \bar{h}_{32m_j\ 1}^{(jj)} & -h_{32m_j}^{(jj)} \\
\bar{h}_{12m_j}^{(jj)} & h_{12m_j\ 1}^{(jj)} & \bar{h}_{22m_j}^{(jj)} & h_{22m_j-1}^{(jj)} & \bar{h}_{32m_j}^{(jj)} & h_{32m_j\ 1}^{(jj)}
\end{pmatrix},$$

$$H_{jj}^{(2)} = \begin{pmatrix}
\cdots & h_{12m_j\ 3}^{(jj)} & h_{12m_j\ 2}^{(jj)} & h_{12m_j\ 1}^{(jj)} & h_{12m_j}^{(jj)} \\
\cdots & -\bar{h}_{12m_j\ 2}^{(jj)} & h_{12m_j-3}^{(jj)} & -\bar{h}_{12m_j}^{(jj)} & h_{12m_j\ 1}^{(jj)} \\
\cdots & h_{22m_j\ 3}^{(jj)} & h_{22m_j\ 2}^{(jj)} & h_{22m_j\ 1}^{(jj)} & h_{22m_j}^{(jj)} \\
\cdots & -\bar{h}_{22m_j\ 2}^{(jj)} & \bar{h}_{22m_j\ 3}^{(jj)} & -\bar{h}_{22m_j}^{(jj)} & h_{22m_j\ 1}^{(jj)} \\
\cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & h_{m_j\ 1m_j-1}^{(jj)} & 0 & h_{m_j\ 12m_j-1}^{(jj)} & h_{m_j\ 12m_j}^{(jj)} \\
\cdots & 0 & h_{m_j\ 1m_j\ 1}^{(jj)} & \bar{h}_{m_j\ 12m_j}^{(jj)} & \bar{h}_{m_j\ 12m_j\ 1}^{(jj)} \\
\cdots & \bar{h}_{m_j\ 12m_j\ 1}^{(jj)} & -h_{m_j\ 12m_j}^{(jj)} & h_{m_jm_j}^{(jj)} & 0 \\
\cdots & \bar{h}_{m_j\ 12m_j}^{(jj)} & h_{m_j-12m_j\ 1}^{(jj)} & 0 & h_{m_jm_j}^{(jj)}
\end{pmatrix},$$

$$j = 1, \cdots, s$$

再设

$$H_{ij}=\begin{bmatrix} h_{11}^{(ij)} & h_{12}^{(ij)} & h_{13}^{(ij)} & h_{14}^{(ij)} & \cdots & h_{1\,2m_j-1}^{(ij)} & h_{1\,2m_j}^{(ij)} \\ -\bar h_{12}^{(ij)} & \bar h_{11}^{(ij)} & -\bar h_{14}^{(ij)} & \bar h_{13}^{(ij)} & \cdots & -\bar h_{1\,2m_j}^{(ij)} & \bar h_{1\,2m_j-1}^{(ij)} \\ h_{21}^{(ij)} & h_{22}^{(ij)} & h_{23}^{(ij)} & h_{24}^{(ij)} & \cdots & h_{2\,2m_j-1}^{(ij)} & h_{2\,2m_j}^{(ij)} \\ -\bar h_{22}^{(ij)} & \bar h_{21}^{(ij)} & -\bar h_{24}^{(ij)} & \bar h_{23}^{(ij)} & \cdots & -\bar h_{2\,2m_j}^{(ij)} & \bar h_{2\,2m_j-1}^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_{m_i1}^{(ij)} & h_{m_i2}^{(ij)} & h_{m_i3}^{(ij)} & h_{m_i4}^{(ij)} & \cdots & h_{m_i\,2m_j-1}^{(ij)} & h_{m_i\,2m_j}^{(ij)} \\ -\bar h_{m_i2}^{(ij)} & \bar h_{m_i1}^{(ij)} & -\bar h_{m_i4}^{(ij)} & \bar h_{m_i3}^{(ij)} & \cdots & -\bar h_{m_i\,2m_j}^{(ij)} & \bar h_{m_i\,2m_j-1}^{(ij)} \end{bmatrix},$$

$$j=i+1,\cdots,s;\ i=k_1,k_2,\cdots,k_{l-1},$$

$$\delta H_{ii}=\prod_{r=1}^{m_i}\mathrm{d}h_{rr}^{(ii)}\prod_{\alpha=1}^{m_i-1}\prod_{\beta=2\alpha+1}^{2m_i}\mathrm{d}(\mathrm{Re}h_{\alpha\beta}^{(ii)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}h_{\alpha\beta}^{(ii)}),\ i=1,\cdots,s,$$

$$\delta H_{ij}=\prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{\beta=1}^{2m_j}\mathrm{d}(\mathrm{Re}h_{\alpha\beta}^{(ij)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}h_{\alpha\beta}^{(ij)}),\ j=i+1,\cdots,s,\ i=k_1,\cdots,k_{l-1}.$$

$V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$上的 Riemann 度量是

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{tr}(\mathrm{d}H\,\overline{\mathrm{d}H}'),$$

体积元素是

$$\delta H=2^{2N-m}\prod_{i=1}^{s}\delta H_{ii}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\delta H_{k_ij},$$

显然,$\mathrm{d}s^2$ 和 δH 在映射$H\to \Gamma H\bar\Gamma'$ 下是不变的,其中 Γ 是如下形式的 $2m$ 阶酉矩阵

$$\Gamma=\begin{bmatrix} \Gamma_1^{(2m_1)} & & & 0 \\ & \Gamma_2^{(2m_2)} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \Gamma_s^{(2m_s)} \end{bmatrix}. \tag{5.5.13}$$

另一方面,对 $H\in V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$,存在一个对角线元素为正值的上三角矩阵 T 使得$H=T\bar T'$,T 形如(5.5.2).设

$$T=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1s} \\ & T_{22} & \cdots & T_{2s} \\ & & \ddots & * \vdots \\ 0 & & & T_{ss} \end{bmatrix},\quad \begin{matrix} T_{ij}=0(i\neq k_1,\cdots,k_l;j>i), \\ JT=\bar T J, \end{matrix}$$

$$
T_{jj}=\begin{bmatrix}
t_{11}^{(jj)} & 0 & t_{13}^{(jj)} & t_{14}^{(jj)} & \cdots & t_{1\,2m_j-1}^{(jj)} & t_{1\,2m_j}^{(jj)} \\
 & \bar t_{11}^{(jj)} & -\bar t_{14}^{(jj)} & \bar t_{13}^{(jj)} & \cdots & -\bar t_{1\,2m_j}^{(jj)} & \bar t_{1\,2m_j-1}^{(jj)} \\
 & & t_{22}^{(jj)} & 0 & \cdots & t_{2\,2m_j-1}^{(jj)} & t_{2\,2m_j}^{(jj)} \\
 & & & \bar t_{22}^{(jj)} & \cdots & -\bar t_{2\,2m_j}^{(jj)} & \bar t_{2\,2m_j-1}^{(jj)} \\
 & 0 & & & \ddots & * & \\
 & & & & & t_{m_jm_j}^{(jj)} & 0 \\
 & & & & & & \bar t_{m_jm_j}^{(jj)}
\end{bmatrix},\ j=1,\cdots,s,
$$

$$
T_{ij}=\begin{bmatrix}
t_{11}^{(ij)} & t_{12}^{(ij)} & t_{13}^{(ij)} & t_{14}^{(ij)} & \cdots & t_{1\,2m_j-1}^{(ij)} & t_{1\,2m_j}^{(ij)} \\
-\bar t_{12}^{(ij)} & \bar t_{11}^{(ij)} & -\bar t_{14}^{(ij)} & \bar t_{13}^{(ij)} & \cdots & -\bar t_{1\,2m_j}^{(ij)} & \bar t_{1\,2m_j-1}^{(ij)} \\
t_{21}^{(ij)} & t_{22}^{(ij)} & t_{23}^{(ij)} & t_{24}^{(ij)} & \cdots & t_{2\,2m_j-1}^{(ij)} & t_{2\,2m_j}^{(ij)} \\
-\bar t_{22}^{(ij)} & \bar t_{21}^{(ij)} & -\bar t_{24}^{(ij)} & \bar t_{23}^{(ij)} & \cdots & -\bar t_{2\,2m_j}^{(ij)} & \bar t_{2\,2m_j-1}^{(ij)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
t_{m_i1}^{(ij)} & t_{m_i2}^{(ij)} & t_{m_i3}^{(ij)} & t_{m_i4}^{(ij)} & \cdots & t_{m_i\,2m_j-1}^{(ij)} & t_{m_i\,2m_j}^{(ij)} \\
-\bar t_{m_i2}^{(ij)} & \bar t_{m_i1}^{(ij)} & -\bar t_{m_i4}^{(ij)} & \bar t_{m_i3}^{(ij)} & \cdots & -\bar t_{m_i\,2m_j}^{(ij)} & \bar t_{m_i\,2m_j-1}^{(ij)}
\end{bmatrix},
$$

$$
j=i+1,\cdots,s,\quad i=k_1,\cdots,k_{l-1},\tag{5.5.14}
$$

$$
\mathrm{d}T_{jj}=\prod_{r=1}^{m_j}\mathrm{d}t_{rr}^{(jj)}\prod_{\alpha=1}^{m_j-1}\prod_{\beta=2\alpha+1}^{2m_j}\mathrm{d}(\mathrm{Re}\,t_{\alpha\beta}^{(jj)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,t_{\alpha\beta}^{(jj)}),\ j=1,\cdots,s,
$$

$$
\mathrm{d}T_{ij}=\prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{\beta=1}^{2m_j}\mathrm{d}(\mathrm{Re}\,t_{\alpha\beta}^{(ij)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,t_{\alpha\beta}^{(ij)}),\ j=i+1,\cdots,s,\ i=k_1,\cdots,k_{l-1}.
$$

$$
\mathrm{d}T=\prod_{j=1}^{s}\mathrm{d}T_{jj}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\mathrm{d}T_{k_ij}.
$$

由[Lu2]附录 I. 可求得

$$
\delta H=2^{2N}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}(\det T_{jj})^{2m_{k_i}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(t_{jj}^{(ii)})^{4j-3}\mathrm{d}T.\tag{5.5.15}
$$

定理 1. 设

$$
V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}=\left\{H\mid H>0,H\in J\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}\right\},
$$

则在 $\mathrm{Aut}\,V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$ 下,$V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}m_1, & \cdots, & m_s\\ k_1, & \cdots, & k_l\end{pmatrix}$ 的不变体积元素

$$\dot H = |H|^{\frac{1}{2}m}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|H_{jj}|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}|H_{(k_i)}|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}\delta H,$$

(5.5.16)

其中 $|H| = \det H$, $|H_{jj}| = \det H_{jj}$, $|H_{(k_i)}| = \det H_{(k_i)}$,

$$H(r) = \begin{bmatrix} H_{rr} & H_{r,r+1} & \cdots & H_{rs} \\ \bar H'_{r,r+1} & H_{r+1,r+1} & \cdots & H_{r+1,s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar H'_{rs} & \bar H'_{r+1,s} & \cdots & H_{ss} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} H_{ij}=0\,(i\neq k_2,\cdots,k_l;\ j>i), \\ r=k_2,k_3,\cdots,k_l, \end{array}$$

为 H 中位于 r 行至 s 行及 r 列至 s 列的子矩阵.

证:如果 A 是形如(5.5.13)的酉矩阵,显然(5.5.16)是不变的.所以只需考虑 A 是上三角矩阵且对角线元素为正值的情形.设 $T\bar T' = H$,T 如(5.5.14)所示.这时

$$AH\bar A' = (AT)(\overline{AT})'.$$

由(5.5.15)

$$\begin{aligned}\delta(AH\bar A') &= \delta[(AT)(\overline{AT})'] \\ &= 2^{2N}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}}|A_{jj}T_{jj}|^{2m_{k_i}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(a_{jj}^{(i)}t_{jj}^{(i)})^{4j-3}\mathrm{d}(AT)\end{aligned}$$

可求得

$$\mathrm{d}(AT) = \prod_{i=1}^{l-1}|A_{k_ik_i}|^{2(m-\sum_{r=1}^{k_i}m_r)}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(a_{jj}^{(i)})^{4(m_i-j)+1}\mathrm{d}H,$$

所以

$$\delta(AH\bar A') = |A|^{2m-1}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|A_{jj}|^{2(m_j-m+\sum_{r=1}^{k_i}m_r)}\prod_{i=2}^{l}|A_{(k_i)}|^{2\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}\delta H.$$

其中 $A_{(r)}(r=k_2,\cdots,k_l)$的意义与 $H_{(r)}$相同.因为

$$|AH\bar A'| = |A|^2|H|,$$

$$|A_{jj}H_{jj}\bar A'_{jj}| = |A_{jj}|^2|H_{jj}|,\ 2\leqslant j\leqslant s,\ j\neq k_2,\cdots,k_{l-1},$$

$$|A_{(r)}H_{(r)}\bar A'_{(r)}| = |A_{(r)}|^2|H_{(r)}|,\ r=k_2,\cdots,k_l,$$

所以

$$\begin{aligned}&|AH\bar A'|^{\frac12 m}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|A_{jj}H_{jj}\bar A'_{jj}|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}|A_{(k_i)}H_{(k_i)}\bar A'_{(k_i)}|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}\delta(AH\bar A') \\ &= |H|^{\frac12 m}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|H_{jj}|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}|H_{(k_i)}|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}\delta H.\end{aligned}$$

(5.5.17)

推论 1. 设 $V=\{H \mid H>0, H=H', JH=HJ\}$ 为 $2m$ 阶第三类自共轭锥，则在 $\operatorname{Aut}V$ 下，V 的不变体积元素为 $|H|^{\frac{1}{2}-m}\delta H$.

证：在定理 1 中令 $l=s=2$ 即可得证.

2. $V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}=\left\{X \mid X=(H^{-1})_{\perp}, H\in V_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}\right\}$,

$V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 的运动群是

$$\operatorname{Aut}V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}=\{X\to(AX\bar{A}')_{\perp} \mid A \text{ 形如}(5.5.11)\}.$$

容易看出，映射 $X\to(AX\bar{A}')_{\perp}$ 与映射 $X_j\mapsto A_jX_jA_j'$，$j=2,\cdots,s$ 是等价的. 其中 X_j，A_j 分别由(5.5.7)及(5.5.8)所示. 下面考虑在 $\operatorname{Aut}V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 下，$V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 的不变体积元素. 设

$$X_{jj}=\begin{bmatrix}
x_{11}^{(jj)} & 0 & x_{13}^{(jj)} & x_{14}^{(jj)} & x_{15}^{(jj)} & x_{16}^{(jj)} & \cdots & x_{1\,2m_j-1}^{(jj)} & x_{1\,2m_j}^{(jj)} \\
0 & x_{11}^{(jj)} & x_{14}^{(jj)} & x_{13}^{(jj)} & x_{16}^{(jj)} & x_{15}^{(jj)} & \cdots & -x_{1\,2m_j}^{(jj)} & x_{1\,2m_j-1}^{(jj)} \\
x_{13}^{(jj)} & x_{14}^{(jj)} & x_{22}^{(jj)} & 0 & x_{25}^{(jj)} & x_{26}^{(jj)} & \cdots & x_{2\,2m_j-1}^{(jj)} & x_{2\,2m_j}^{(jj)} \\
x_{14}^{(jj)} & x_{13}^{(jj)} & 0 & x_{22}^{(jj)} & -x_{26}^{(jj)} & x_{25}^{(jj)} & \cdots & -x_{2\,2m_j}^{(jj)} & x_{2\,2m_j-1}^{(jj)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{1\,2m_j-1}^{(jj)} & x_{1\,2m_j}^{(jj)} & x_{2\,2m_j-1}^{(jj)} & -x_{2\,2m_j}^{(jj)} & x_{3\,2m_j-1}^{(jj)} & x_{3\,2m_j}^{(jj)} & \cdots & x_{m_j\,2m_j-1}^{(jj)} & 0 \\
x_{1\,2m_j}^{(jj)} & x_{1\,2m_j-1}^{(jj)} & x_{2\,2m_j}^{(jj)} & x_{2\,2m_j-1}^{(jj)} & x_{3\,2m_j}^{(jj)} & x_{3\,2m_j-1}^{(jj)} & \cdots & 0 & x_{m_jm_j}^{(jj)}
\end{bmatrix},$$

$$j=1,\cdots,s,$$

$$X_{ij}=\begin{bmatrix}
x_{11}^{(ij)} & x_{12}^{(ij)} & x_{13}^{(ij)} & x_{14}^{(ij)} & \cdots & x_{1\,2m_j-1}^{(ij)} & x_{1\,2m_j}^{(ij)} \\
\bar{x}_{12}^{(ij)} & \bar{x}_{11}^{(ij)} & x_{14}^{(ij)} & \bar{x}_{13}^{(ij)} & \cdots & -x_{1\,2m_j}^{(ij)} & \bar{x}_{1\,2m_j-1}^{(ij)} \\
x_{21}^{(ij)} & x_{22}^{(ij)} & x_{23}^{(ij)} & x_{24}^{(ij)} & \cdots & x_{2\,2m_j-1}^{(ij)} & x_{2\,2m_j}^{(ij)} \\
\bar{x}_{22}^{(ij)} & x_{21}^{(ij)} & -x_{24}^{(ij)} & \bar{x}_{23}^{(ij)} & \cdots & x_{2\,2m_j}^{(ij)} & x_{2\,2m_j-1}^{(ij)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{m_i1}^{(ij)} & x_{m_i2}^{(ij)} & x_{m_i3}^{(ij)} & x_{m_i4}^{(ij)} & \cdots & x_{m_i\,2m_j-1}^{(ij)} & x_{m_i\,2m_j}^{(ij)} \\
\bar{x}_{m_i2}^{(ij)} & \bar{x}_{m_i1}^{(ij)} & -\bar{x}_{m_i4}^{(ij)} & x_{m_i3}^{(ij)} & \cdots & \bar{x}_{m_i\,2m_j}^{(ij)} & x_{m_i\,2m_j-1}^{(ij)}
\end{bmatrix},$$

$$j=i+1,\cdots,s \quad i=k_1,\cdots,k_{l-1},$$

$$\delta X_{jj}=\prod_{\alpha=1}^{m_j}\mathrm{d}x_{\alpha\alpha}^{(jj)}\prod_{\alpha=1,\beta=2\alpha+1}^{m_j-1,\ 2m_j}\mathrm{d}(\operatorname{Re}x_{\alpha\beta}^{(jj)})\mathrm{d}(\operatorname{Im}x_{\alpha\beta}^{(jj)}),\ j=1,\cdots,s,$$

$$\delta X_{ij}=\prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{\beta=1}^{2m_j}\mathrm{d}(\operatorname{Re}x_{\alpha\beta}^{(ij)})\mathrm{d}(\operatorname{Im}x_{\alpha\beta}^{(ij)}),\ j=i+1,\cdots,s,\ i=k_1,\cdots,k_{l-1}.$$

$V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$ 上的 Riemann 度量是

$$ds^2=\operatorname{tr}(dX\,\overline{dX}'),$$

体积元素

$$\delta X=2^{2N-m}\prod_{j=1}^{s}\delta X_{jj}\prod_{i=1}^{t-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\delta X_{k_i j},$$

如果 Γ 是形如(5.5.13)的酉矩阵,则 ds^2 和 δX 在映射 $X\mapsto \Gamma X\overline{\Gamma}'$ 下是不变的.另一方面,$\forall\, X\in V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_t \end{Bmatrix}$,

$X_j>0,\ J_jX_j=\overline{X}_jJ_j,\ j=2,\cdots,s,$

所以存在对角线元素为正值的下三角矩阵 T_j 使得 $X_j=T_j\overline{T}_j'$ $(j=2,\cdots,s)$,即有(5.5.10)成立,且 $X=(T\overline{T}')_{-}$,其中 T_j, T 分别如(5.5.9),(5.5.11)所示,设

$$T_{jj}=\begin{bmatrix}
t_{11}^{(jj)} & & & & & & & & \\
0 & t_{11}^{(jj)} & & & & & 0 & & \\
t_{41}^{(jj)} & t_{42}^{(jj)} & t_{22}^{(jj)} & & & & & & \\
-\bar t_{42}^{(jj)} & \bar t_{41}^{(jj)} & 0 & t_{22}^{(jj)} & & & & & \\
t_{61}^{(jj)} & t_{62}^{(jj)} & t_{63}^{(jj)} & t_{64}^{(jj)} & t_{33}^{(jj)} & & & & \\
-\bar t_{62}^{(jj)} & \bar t_{61}^{(jj)} & -\bar t_{64}^{(jj)} & \bar t_{63}^{(jj)} & 0 & t_{33}^{(jj)} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
t_{2m_j1}^{(jj)} & t_{2m_j2}^{(jj)} & t_{2m_j3}^{(jj)} & t_{2m_j4}^{(jj)} & t_{2m_j5}^{(jj)} & t_{2m_j6}^{(jj)} & \cdots & t_{m_jm_j}^{(jj)} & \\
-\bar t_{2m_j2}^{(jj)} & \bar t_{2m_j1}^{(jj)} & -\bar t_{2m_j4}^{(jj)} & t_{2m_j3}^{(jj)} & -t_{2m_j6}^{(jj)} & t_{2m_j5}^{(jj)} & \cdots & 0 & t_{m_jm_j}^{(jj)}
\end{bmatrix},$$

$j=1,\cdots,s,$

$$T_{ji}=\begin{bmatrix}
t_{21}^{(ji)} & t_{22}^{(ji)} & t_{23}^{(ji)} & t_{24}^{(ji)} & \cdots & t_{22m_i-1}^{(ji)} & t_{22m_i}^{(ji)} \\
-\bar t_{22}^{(ji)} & t_{21}^{(ji)} & -\bar t_{24}^{(ji)} & \bar t_{23}^{(ji)} & \cdots & -\bar t_{22m_i}^{(ji)} & \bar t_{22m_i-1}^{(ji)} \\
t_{41}^{(ji)} & t_{42}^{(ji)} & t_{43}^{(ji)} & t_{44}^{(ji)} & \cdots & t_{42m_i-1}^{(ji)} & t_{42m_i}^{(ji)} \\
-\bar t_{42}^{(ji)} & \bar t_{41}^{(ji)} & -\bar t_{44}^{(ji)} & \bar t_{43}^{(ji)} & \cdots & \bar t_{42m_i}^{(ji)} & t_{42m_i-1}^{(ji)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
t_{2m_j1}^{(ji)} & t_{2m_j2}^{(ji)} & t_{2m_j3}^{(ji)} & t_{2m_j4}^{(ji)} & \cdots & t_{2m_j2m_i-1}^{(ji)} & t_{2m_j2m_i}^{(ji)} \\
-\bar t_{2m_j2}^{(ji)} & \bar t_{2m_j1}^{(ji)} & -\bar t_{2m_j4}^{(ji)} & t_{2m_j3}^{(ji)} & \cdots & -\bar t_{2m_j2m_i}^{(ji)} & \bar t_{2m_j2m_i-1}^{(ji)}
\end{bmatrix},$$

(5.5.18)

$$j = i+1,\cdots,s;\ i = k_1,\cdots,k_{l-1},$$

$$\mathrm{d}T_{jj} = \prod_{r=1}^{m_j}\mathrm{d}t_{rr}^{(jj)}\prod_{\alpha=2}^{m_j}\prod_{\beta=1}^{2\alpha-2}\mathrm{d}(\mathrm{Re}\,t_{2\alpha\beta}^{(jj)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,t_{2\alpha\beta}^{(jj)}),\ j = 1,\cdots,s,$$

$$\mathrm{d}T_{ji} = \prod_{\alpha=1}^{m_j}\prod_{\beta=1}^{2m_i}\mathrm{d}(\mathrm{Re}\,t_{2\alpha\beta}^{(ji)})\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,t_{2\alpha\beta}^{(ji)}),\ j = i+1,\cdots,s,\ i = k_1,\cdots,k_{l-1}.$$

$$\mathrm{d}T = \prod_{j=1}^{s}\mathrm{d}T_{jj}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\mathrm{d}T_{jk_i},$$

则

$$\delta X = \delta(T\bar{T}')_{\perp} = 2^{2N}\prod_{i=1}^{l-1}\left|T_{k_ik_i}\right|^{2(m-\sum_{r=1}^{k_i}m_r)}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(t_{jj}^{(ii)})^{4(m_i-j)+1}\mathrm{d}T. \tag{5.5.19}$$

定理 2. 设

$$V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix} = \left\{X \mid X = (H^{-1})_{\perp}, H \in V_{\mathrm{III}}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}\right\}.$$

则在 $\mathrm{Aut}\,V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}$ 下，$V_{\mathrm{III}}^{*}\begin{Bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{Bmatrix}$ 的不变体积元素

$$\dot{X} = \prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|X_j\right|^{\frac{1}{2}m_j-\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}}\prod_{i=1}^{l}\left|X_{k_i}\right|^{(k_{i+1}-1-k_i)(\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}-\frac{1}{2})}\delta X, \tag{5.5.20}$$

其中 $X_j (j = 1,\cdots,s)$ 如(5.5.5)所示，$k_{l+1} = s$.

证: 如果 A 是(5.5.13)所示的酉矩阵，显然(5.5.20)是不变的. 所以，只需考虑 A 形如(5.5.11)且对角线元素为正值的情形. 设

$$X = (T\bar{T}')_{\perp},$$

则

$$(AX\bar{A}')_{\perp} = [A(T\bar{T}')_{\perp}\bar{A}']_{\perp} = (AT\bar{T}'\bar{A}')_{\perp} = [(AT)(\overline{AT})']_{\perp},$$

由(5.5.19)

$$\delta(AXA')_{\perp}$$

$$= 2^{2N}\prod_{i=1}^{l-1}\left|A_{k_ik_i}T_{k_ik_i}\right|^{2(m-\sum_{r=1}^{k_i}m_r)}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(a_{jj}^{(ii)}t_{jj}^{(ii)})^{4(m_i-j)+1}\mathrm{d}(AT),$$

可求得

$$\mathrm{d}(AT) = \prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{S}\left|A_{jj}\right|^{2m_{k_i}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}(a_{jj}^{(ii)})^{4j-3}\mathrm{d}X,$$

代入 $\delta(AXA')_{\perp}$ 得

$$\delta(AXA') = \prod_{i=1}^{l} \left|A_{k_ik_i}\right|^{2(m-\sum_{r=1}^{k_i} m_r+\sum_{r=1}^{i} m_{k_r})+i-1} \prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \left|A_{jj}\right|^{2(m_j+\sum_{r=1}^{i} m_{k_r})+1} \delta X$$

$$= \prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \left(\left|A_{k_1k_1}\right| \left|A_{k_2k_2}\right| \cdots \left|A_{k_ik_i}\right| \left|A_{jj}\right| \right)^{2(m_j+\sum_{r=1}^{i} m_{k_r})+1}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{l} \left(\left|A_{k_1k_1}\right| \cdot \left|A_{k_2k_2}\right| \cdots \left|A_{k_ik_i}\right| \right)^{2(k_{i+1}-1-k_i)(\sum_{r=1}^{i} m_{k_r}+\frac{1}{2})} \delta X,$$

因为

$$|A_{11}X_{11}\bar{A}'_{11}| = |A_{11}|^2 |X_{11}|, \text{记 } A_1 = A_{11},$$

$$|A_jX_jA'_j| = (|A_{k_1k_1}||A_{k_2k_2}| \cdots |A_{k_ik_i}||A_{jj}|)^2 |X_j|,$$

$$j = k_i+1, \cdots, k_{i+1}, i = 2, \cdots, l-1.$$

其中 $A_j(j=2,\cdots,s)$ 如(5.5.8)所示.所以

$$\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \left|A_jX_jA'_j\right|^{\frac{1}{2}-m_j-\sum_{r=1}^{i} m_{k_r}} \prod_{i=1}^{l} \left|A_{k_i}X_{k_i}A'_{k_i}\right|^{-(k_{i+1}-1-k_i)(\sum_{r=1}^{i} m_{k_r}+\frac{1}{2})} \delta(AXA')$$

$$= \prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \left|X_j\right|^{\frac{1}{2}-m_j-\sum_{r=1}^{i} m_{k_r}} \prod_{i=1}^{l} \left|X_{k_i}\right|^{-(k_{i+1}-1-k_i)(\sum_{r=1}^{i} m_{k_r}+\frac{1}{2})} \delta X.$$

3. **定理3.** 设

$$I_0 = \int_{V_m} e^{-\mathrm{tr}H} \left|H\right|^{S_1} \prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \left|H_{jj}\right|^{S_j} \prod_{i=2}^{l} \left|H_{(k_i)}\right|^{S_{k_i}} \dot{H},$$

若 $S_1 > 2(m-1)$; $S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j > 2(m_j-1)$, $j=k_i+1,\cdots,k_{i+1}-1$, $i=1,\cdots,l-1$; $S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i} > 2(m-1-\sum_{r=1}^{k_i-1} m_r)$, $i=2,\cdots,l$. 则

$$I_0 = 2^{2N-m}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)^{N-m} \prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\prod_{r=1}^{m_j} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-m_j+r)}$$

$$\cdot \Gamma(2(S_{k_1}+\cdots+S_{k_i}+S_j-m_j+r)) \prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{m_{k_i}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(S_{k_1}+\cdots+S_{k_i}-m+j+\sum_{r=1}^{k_i-1} m_r)}$$

$$\cdot \Gamma(2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-m+j+\sum_{r=1}^{k_i-1} m_r)), \qquad (5.5.21)$$

其中 $\sum_{r=1}^{k_1-1} m_r = 0$.

证: 设 $H = T\bar{T}'$, T 如(5.5.14)所示, $T_{(r)}(r=k_2,\cdots,k_l)$ 的意义同 $H_{(r)}$. 则

$$\mathrm{tr}H = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{tr}(T_{jj}\bar{T}'_{jj}) + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{s} \mathrm{tr}(T_{k_ij}\bar{T}'_{k_ij}),$$

$$H = |TT'| = \prod_{j=1}^{s} |T_{jj}|^2,$$

$$|H_{(r)}| = |T_{(r)}\overline{T}'_{(r)}| = \prod_{j=r}^{s} |T_{jj}|^2, r = k_2, \cdots, k_l,$$

$$|H_{jj}| = |T_{jj}|^2, 2 \leqslant j \leqslant s, j \neq k_2, \cdots, k_{l-1},$$

所以

$$I_0 = 2^{2N}\int_{T\overline{T}'>0} \exp[-\sum_{i=1}^{s} \mathrm{tr}(T_{jj}\overline{T}'_{jj}) - \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{s} \mathrm{tr}(T_{k_j}T'_{k_j})]$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |T_{jj}|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-m_j)+1}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{l} \left|T_{k_ik_i}\right|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-m+\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r)+1} \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i} (t_{jj}^{(ii)})^{4j-3}\mathrm{d}T$$

$$= 2^{2N}\left[\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{s}\int_{T_{k_j}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(T_{k_j}\overline{T}'_{k_j})}\mathrm{d}T_{k_j}\right]$$

$$\cdot \left(\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\int_{T_{jj}>0} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(T_{jj}T'_{jj})}\left|T_{jj}\right|^{2S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-m_j)+1}\prod_{r=1}^{m_j}(t_{rr}^{(jj)})^{4r-3}\mathrm{d}T_{jj}\right)$$

$$\cdot \left[\prod_{i=1}^{l}\int_{T_{k_ik_i}>0} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(T_{k_ik_i}T'_{k_ik_i})}\left|T_{k_ik_i}\right|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-m+\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r)+1}\right.$$

$$\left.\cdot \prod_{j=1}^{m_{k_i}} (t_{jj}^{(k_ik_i)})^{4j-3}\mathrm{d}T_{k_ik_i}\right],$$

其中$\int_{T_{k_j}}$ 表示 T_{k_j} 的每一个元素从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分.

因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}, \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}t^k\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \tag{5.5.22}$$

所以

$$\int_{T_{ij}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(T_{ij}T'_{ij})}\mathrm{d}T_{ij} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)^{4m_im_j}, j = i+1, \cdots, s, \; i = k_1, \cdots, k_{l-1},$$

$$\int_{T_{jj}>0} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(T_{jj}T'_{jj})} |T_{jj}|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-m_j)+1} \prod_{r=1}^{m_j} (t_{rr}^{(jj)})^{4r-3}\mathrm{d}T_{jj}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m_j}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)^{2m_j(m_j-1)} \prod_{r=1}^{m_j}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(Sk_1+Sk_2+\cdots+Sk_i+S_j-m_j+r)}$$

$$\cdot \Gamma(2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j-m_j+r)),$$

$j = k_i + 1, \cdots, k_{i+1} - 1, i = 1, \cdots, l - 1,$

$$\int_{T_{k_ik_i}>0} e^{-\mathrm{tr}(T_{k_ik_i}\bar{T}'_{k_ik_i})} |T_{k_ik_i}|^{2(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-m+\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r)+1} \prod_{j=1}^{m_{k_i}} (t_{jj}^{(k_ik_i)})^{4j-3} \mathrm{d}T_{k_ik_i}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{k_i}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)^{2m_{k_i}(m_{k_i}-1)} \prod_{j=1}^{m_{k_i}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-m+j+\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r)}$$

$$\cdot \Gamma\left(2\left(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}-m+j+\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r\right)\right), i = 1, \cdots, l,$$

将上述各结果代入 I_0 可得(5.5.21)

推论 2. 设 $V = \{H \mid H > 0, H = \bar{H}', JH = \bar{H}J\}$ 是 $2m$ 阶第二类自共轭锥，记

$$I_0 = \int_V e^{-\mathrm{tr}H} |H|^S \dot{H},$$

则当 $S > 2(m-1)$ 时，有

$$I_0 = 2^{N-2Sm}(2\sqrt{\pi})^{N-m}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(2(S-m+j)). \quad (5.5.23)$$

证：在定理 3 中令 $l = s = 2, S_2 = 0$ 即可得证.

定理 4. 设 $X \in V_{III}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$，则

$$I(X) = \int_{V_{III}} e^{-\mathrm{tr}(XH)} |H|^{S_1} \prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |H_{jj}|^{S_j} \prod_{i=2}^{l} |H_{(k_i)}|^{S_{k_i}} \dot{H}$$

$$= I_0 \prod_{i=1}^{l} |X_{k_i}|^{-(k_{i+1}-1-k_i)(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i})-\sum_{r=k_i+1}^{k_{i+1}}S_r}$$

$$\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |X_j|^{-(S_{k_1}+S_{k_2}+\cdots+S_{k_i}+S_j)},$$

(5.5.24)

其中 $K_{l+1} = s, \sum_{r=k_l+1}^{s} S_r = 0$.

证：因为 $X \in V_{III}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$，所以存在形如(5.5.11)的矩阵 T 使得 $X = (T\bar{T}')_-$. 由于 $\mathrm{tr}(XH) = \mathrm{tr}[(T\bar{T}')_- H] = \mathrm{tr}(T\bar{T}'H) = \mathrm{tr}(\bar{T}'HT)$，所以，若设 $\tilde{H} = \bar{T}'HT$，则映射 $H \to \tilde{H}$ 属于 $\mathrm{Aut}\, V_{III}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$，因而 $\dot{\tilde{H}} = \dot{H}$. 因为

$|\tilde{H}| = |T|^2 |H|,$

$$|\widetilde{H}_{jj}| = |T_{jj}|^2 |H_{jj}|, 2 \leqslant j \leqslant s, j \neq k_2, k_3, \cdots, k_l,$$

$$|\widetilde{H}_{(r)}| = |T_{(r)}|^2 |H_{(r)}|, r = k_2, k_3, \cdots, k_l,$$

其中 $T_{(r)}$ 的意义与 $H_{(r)}$ 相同.所以

$$I(X) = \int_{V_{\mathrm{Ⅲ}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\widetilde{H}} |\widetilde{H}|^{S_1} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |\widetilde{H}_{jj}|^{S_j} \prod_{i=2}^{l} |\widetilde{H}_{(k_i)}|^{S_{k_i}} |T|^{-2S_1}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |T_{jj}|^{-2S_j} \prod_{i=2}^{l} |T_{(k_i)}|^{-2S_{k_i}} \dot{\widetilde{H}}$$

$$= I_0 |T|^{-2S_1} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |T_{jj}|^{-2S_j} \prod_{i=2}^{l} |T_{(k_i)}|^{-2S_{k_i}}.$$

又因为

$|T| = |T_{11}| \cdots |T_{ss}|, |T_{(r)}| = |T_{rr}| \cdots |T_{ss}|, r = k_2, k_3, \cdots, k_l,$

$|X_{11}| = |T_{11}|^2$(因为 $X_{11} = T_{11} T'_{11}$),

$|X_j| = |T_{k_1 k_1}|^2 |T_{k_2 k_2}|^2 \cdots |T_{k_i k_i}|^2 |T_{jj}|^2$(因为 $X_j = T_j T'_j$),

$j = k_i + 1, \cdots, k_{i+1} - 1, i = 1, \cdots, l - 1,$

将上述各式代入 $I(X)$ 可得(5.5.24).

推论 3. 设 $V = \{H \mid H > 0, H = \overline{H}', JH = \overline{H}J\}$ 是 $2m$ 阶第三类自共轭锥, $X \in V$, 则

$$I(X) = \int_V \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(XH)} |H|^S \dot{H} = I_0 |X|^{-S}, \tag{5.5.25}$$

其中 I_0 如(5.5.13)所示.

证:在定理 4 中令 $l = s = 2, S_2 = 0$ 即可得证.

定理 3 中的 I_0 称为 $V_{\mathrm{Ⅲ}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 上的 Gamma 函数.定理 4 中的 $I(X)$ 称为 $V_{\mathrm{Ⅲ}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 上的 Siegel 积分.定理 3 与定理 4 分别是 Gamma 函数及 Siegel 积分在非自共轭锥 $V_{\mathrm{Ⅲ}}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 上的推广.推论 2,推论 3 分别是 Gamma 函数及 Siegel 积分在第三类自共轭锥上的推广.

4. **定理 5.** 设

$$I_0^* = \int_{V_{\mathrm{Ⅲ}}^*} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}X} |X_{11}|^{S_1} \prod_{j=2}^{s} |X_j|^{S_j} \dot{X},$$

若 $S_j > 2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}+m_j-1)$, $j=k_i+1,\cdots,k_{i+1}-1$, $i=1,\cdots,l-1$; $S_{k_i} > 2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}-1-\sum_{r=k_i+1}^{k}S_r)$, $i=1,\cdots,l$. 其中 $\sum_{r=k_l+1}^{k}S_r=0$. 则

$$I_0^* = 2^{2N-m}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)^{N-m}\prod_{j=1}^{m_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(\sum_{r=1}^{k}S_r-j+1)}\Gamma\left(2\left(1-j+\sum_{r=1}^{k}S_r\right)\right)$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\prod_{r=1}^{m_j}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(S_j-m_{k_1}-m_{k_2}-\cdots-m_{k_i}-r+1)}\Gamma(2(S_j-m_{k_1}-m_{k_2}-\cdots-m_{k_i}-r+1))$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(\sum_{r=k_i}^{k}S_r-m_{k_1}-m_{k_2}-\cdots-m_{k_{i-1}}-j+1)}$$

$$\cdot\Gamma\left(2\left(\sum_{r=k_i}^{k}S_r-m_{k_1}-m_{k_2}-\cdots-m_{k_{i-1}}-j+1\right)\right). \qquad (5.5.26)$$

证:设 $X=(T\bar{T}')_{k}$, T 如(5.5.11)及(5.5.18)所示,则

$$\mathrm{tr}X=\mathrm{tr}(T\bar{T}')_{k}=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}(T_{jj}\bar{T}'_{jj})+\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{k}\mathrm{tr}(T_{jk_i}\bar{T}'_{jk_i}),$$

$$|X_{11}|=|T_{11}|^2,\ |X_j|=|T_{k_1k_1}|^2|T_{k_2k_2}|^2\cdots|T_{k_ik_i}|^2|T_{jj}|^2,$$

$$j=k_i+1,\cdots,k_{i+1},\ i=1,\cdots,l-1.$$

将(5.5.19),(5.5.20)及上述各式代入 I_0^* 可得

$$I_0^*=2^{2N}\int_{V_{\mathrm{III}}^*}\exp\left[-\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}(T_{jj}\bar{T}'_{jj})-\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{k}\mathrm{tr}(T_{jk_i}\bar{T}'_{jk_i})\right]$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|T_{jj}\right|^{2S_j-2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}+m_j)+1}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{l}\left|T_{k_ik_i}\right|^{2\sum_{r=k_i}^{k}S_r-2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})+1}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m_i}(t_{jj}^{(ii)})^{4(m_i-j)+1}\mathrm{d}T$$

$$2^{2N}\left\{\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k}\int_{T_{jk_i}}e^{-\mathrm{tr}(T_{jk_i}\bar{T}'_{jk_i})}\mathrm{d}T_{jk_i}\right\}$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\int_{T_{jj}>0}e^{-\mathrm{tr}(T_{jj}\bar{T}'_{jj})}\left|T_{jj}\right|^{2S_j-2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}+m_j)+1}\prod_{r=1}^{m_j}(t_{rr}^{(jj)})^{4(m_j-r)+1}\mathrm{d}T_{jj}\right)$$

$$\cdot\left\{\prod_{i=1}^{l}\int_{T_{k_ik_i}>0}e^{-\mathrm{tr}(T_{k_ik_i}\bar{T}'_{k_ik_i})}\left|T_{k_ik_i}\right|^{2\sum_{r=k_i}^{k}S_r-2(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})+1}\right.$$

$$\left.\cdot\prod_{j=1}^{m_{k_i}}(t_{jj}^{(k_ik_i)})^{4(m_{k_i}-j)+1}\mathrm{d}T_{k_ik_i}\right).$$

应用(5.5.22)于上式便可得到(5.5.26).

定理 6. 设 $H \in V_{\rm III}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$,则

$$I^*(H) = \int_{V_{\rm III}^*} e^{-\operatorname{tr}(XH)} \left| X_{11} \right|^{S_1} \prod_{j=2}^{s} \left| X_j \right|^{S_j} \dot{X}$$

$$= I_0^* \left| H \right|^{-\sum_{r=1}^{s} S_r} \prod_{i=2}^{l} \left| H_{(k_i)} \right|^{\sum_{r=k_{i-1}}^{k_i-1} S_r} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \left| H_{jj} \right|^{\sum_{r=k_i}^{s} S_r - S_j}. \tag{5.5.27}$$

证: 因为 $H \in V_{\rm III}\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$,所以存在一个如(5.5.14)所示的上三角矩阵 T 使得 $H = T\overline{T}'$. 因为

$$\operatorname{tr}(XH) = \operatorname{tr}(XT\overline{T}') = \operatorname{tr}(\overline{T}'XT) = \operatorname{tr}(\overline{T}'XT)_{\perp},$$

所以,若设 $\widetilde{X} = (\overline{T}'XT)_{\perp}$,则映射 $X \to \widetilde{X}$ 属于 $\operatorname{Aut} V_{\rm III}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$. 因而

$$\dot{\widetilde{X}} = \dot{X},$$

因为

$|\widetilde{X}_{11}| = |T_{11}|^2 |X_{11}|$, $|\widetilde{X}_j| = |T_j|^2 |X_j|$, $j = 2, \cdots, s$

$|T_j| = |T_{k_1k_1}| |T_{k_2k_2}| \cdots |T_{k_ik_i}| |T_{jj}|$,

$j = k_i + 1, \cdots, k_{i+1}$, $i = 1, \cdots, l-1$.

其中 $X_j (j = 2, \cdots, s)$ 如(5.5.5)所示,$\widetilde{X}_j, T_j (j = 2, \cdots, s)$ 的意义同 X_j. 所以

$$I^*(H) = \int_{V_{\rm III}^*} e^{-\operatorname{tr}\widetilde{X}} \left| \widetilde{X}_{11} \right|^{S_1} \prod_{j=2}^{s} \left| \widetilde{X}_j \right|^{S_j} \left| T_{11} \right|^{-2S_1} \prod_{j=2}^{s} \left| T_j \right|^{-2S_j} \dot{\widetilde{X}}$$

$$= I_0^* \prod_{i=1}^{l} \left| T_{k_ik_i} \right|^{-2\sum_{r=k_i}^{s} S_r} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \left| T_{jj} \right|^{-2S_j}.$$

由于

$|H| = |T_{11}|^2 \cdots |T_{ss}|^2$, $|H_{(r)}| = |T_{rr}|^2 \cdots |T_{ss}|^2$, $r = k_2, k_3, \cdots, k_l$,

$|H_{jj}| = |T_{jj}|^2$, $2 \leqslant j \leqslant s$, $j \neq k_2, k_3, \cdots, k_{l-1}$.

将上述各式代入 $I^*(H)$ 可得(5.5.27).

定理 5 与定理 6 分别是 Gamma 函数与 Siegel 积分在非自共轭锥 $V_{\rm III}^*\begin{pmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{pmatrix}$ 上的推广. 其特殊情形 $l = s - 2$, $S_1 = 0$ 便是推论 2

与推论 3.

Ⅴ.3 Siegel 积分的应用

本节将利用 Siegel 积分 (5.5.24) 和 (5.5.27) 分别得到 $V_{\mathrm{III}}\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$ 和 $V_{\mathrm{III}}^*\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}$ 上的 tube 域的 Cauchy-Szegö 核及形式 Poisson 核.

根据 Bochner 的理论[Boc],如果 V 和 V^* 是共轭锥且是正则锥,对于 $h=(h_1,\cdots,h_n)\in V$, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in V^*$,积分

$$K(h)=\int_{V^*}\mathrm{e}^{-xh}\,\mathrm{d}x$$

存在,设 $D(V)=\{Z\in\mathbf{C}^n \mid \mathrm{Im}Z\in V\}$,则 $K(\sqrt{-1}(Z-X))$(X 属于 $D(V)$ 的特征流形)是域 $D(V)$ 的 Cauchy Szegö 核.

为了得到 $\mathrm{D}(\mathrm{V}_{\mathrm{III}})$ 和 $\mathrm{D}(\mathrm{V}_{\mathrm{III}}^*)$ 的 Cauchy-Szegö 核,只需得到下面的积分.

$$K(H)=\int_{V_{\mathrm{III}}^*}\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(XH)}\mathrm{d}X,\ H\in V_{\mathrm{III}}\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}, \qquad (5.5.28),$$

$$K^*(X)=\int_{V_{\mathrm{III}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(XH)}\mathrm{d}H,\ X\in V_{\mathrm{III}}^*\begin{bmatrix} m_1, & \cdots, & m_s \\ k_1, & \cdots, & k_l \end{bmatrix}, \qquad (5.5.29),$$

为此,在积分(5.5.24)中令

$$S_1=m-\frac{1}{2};\ S_{k_i}=-\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r,\ i=2,\cdots,l;$$

$$S_j=m_j+\sum_{r=1}^{k_i}m_r-m,\ j=k_i+1,\cdots,k_{i+1}-1,\ i=1,\cdots,l-1.$$

可得

$$\int_{V_{\mathrm{III}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(XH)}\delta H$$

$$=2^{2N-m}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)^{N-m}\prod_{j=1}^{m_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4j-2}\Gamma(2j-1)\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\prod_{r=1}^{m_j}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(r+m_{k_1}+\cdots+m_{k_i})-2}$$
$$\cdot\Gamma(2(r+m_{k_1}+\cdots+m_{k_i})-1)$$
$$\cdot\prod_{i=2}^{l}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_{i-1}})-2}\Gamma(2(j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_{i-1}})-1).$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{l}|X_i|^{-\left((k_{i+1}-1-k_i)(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})-\frac{1}{2}\right)}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}|X_j|^{-\left(m_j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}-\frac{1}{2}\right)}$$

设

$$C_0 = 2^{2N-m}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)^{N-m}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\prod_{r=1}^{m_j}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(r+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})-2}$$
$$\cdot\Gamma(2(r+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i})-1)$$
$$\cdot\prod_{j=1}^{m_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4j-2}\Gamma(2j-1)\prod_{i=2}^{l}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_{i-1}})-2}$$
$$\cdot\Gamma(2(j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_{i-1}})-1).$$
$$\mathrm{d}H = 2^{m-2N}\delta H,$$

得到

$$K^*(X) = 2^{m-2N}C_0\prod_{i=1}^{l}\left|X_{k_i}\right|^{(k_{i+1}-1-k_i)(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}-\frac{1}{2})}$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|X_j\right|^{-(m_j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}-\frac{1}{2})}.$$

同理,在(5.5.27)中令

$$S_j = m_j+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}-\frac{1}{2}, j = k_i+1,\cdots,k_{i+1}-1, i = 1,\cdots,l-1,$$

$$S_{k_i} = (k_{i+1}-1-k_i)\left(\frac{1}{2}-\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}\right), i = 1,\cdots,l,$$

并设

$$C_0^* = 2^{2N-m}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right)^{N-m}\prod_{j=1}^{m_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(m-j)+2}\Gamma(2(m-j)+1)$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\prod_{r=1}^{m_j}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(m_j+r)+2}\Gamma(2(m_j+r)+1)$$
$$\cdot\prod_{i=2}^{l}\prod_{j=1}^{m_{k_i}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(m-j-\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r)+2}\Gamma\left(2(m-j-\sum_{r=1}^{k_i-1}m_r)+1\right),$$
$$\mathrm{d}X = 2^{m-2N}\delta X,$$

可得

$$K(H) = 2^{m-2N}C_0^*\left|H\right|^{\frac{1}{2}-m}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|H_{jj}\right|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}\left|H_{(k_i)}\right|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}.$$

如果 $D(V_{\mathrm{III}})$ 和 $D(V_{\mathrm{III}}^*)$ 的 Cauchy-Szego 核分别由 $H(Z,U)$ 和 $H^*(Z,U)$ 表示,那么

$$H(Z,U)=C\frac{\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|Z_{jj}-U_{jj}\right|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}\left|Z_{(k_i)}-U_{(k_i)}\right|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}}{|Z-U|^{m-\frac{1}{2}}}. \tag{5.5.30}$$

其中 $C=(\sqrt{-1})^{-N_2m-2N}C_0^*$.

$$H^*(Z,U)=C^*\frac{\prod_{i=1}^{l}\left|Z_{k_i}-U_{k_i}\right|^{(k_{i+1}-1-k_i)(m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}-\frac{1}{2})}}{\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|Z_j-U_j\right|^{m_j+m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_i}-\frac{1}{2}}}, \tag{5.5.31}$$

其中 $C^*=(\sqrt{-1})^{-N_2m-2N}C_0, Z_1=Z_{11}, U_1=U_{11}$.

我们知道,$\mathbf{C}^n$ 中有界齐性域 D 的形式 Poisson 核 $P(z,\xi)$ 可由 D 的 Cauchy-Szegö 核 $h(z,\xi)$ 得到[Hua],即 $P(z,\xi)=|h(z,\xi)|^2/h(z,\bar{z})$. 因此差一个常数因子 $D(V_{\mathrm{III}})$ 和 $D(V_{\mathrm{III}}^*)$ 的形式 Poisson 核分别是

$$P(Z,U)=\frac{\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|\left|Z_{jj}-U_{jj}\right|\right|^{2(m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r)}\prod_{i=2}^{l}\left|\left|Z_{(k_i)}-U_{(k_i)}\right|\right|^{2\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}\left|Z-\bar{Z}\right|^{m-\frac{1}{2}}}{\left|\left|Z-U\right|\right|^{2m-1}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|Z_{jj}-\bar{Z}_{jj}\right|^{m-m_j-\sum_{r=1}^{k_i}m_r}\prod_{i=2}^{l}\left|Z_{(k_i)}-\bar{Z}_{(k_i)}\right|^{\sum_{r=k_{i-1}+1}^{k_i-1}m_r}},$$

$$P^*(Z,U)=\frac{\prod_{i=1}^{l}\left|\left|Z_{k_i}-U_{k_i}\right|\right|^{2(k_{i+1}-1-k_i)(\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}-\frac{1}{2})}\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|Z_j-\bar{Z}_j\right|^{m_j+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}-\frac{1}{2}}}{\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1}\left|\left|Z_j-U_j\right|\right|^{2(m_j+\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}-\frac{1}{2})}\prod_{i=1}^{l}\left|Z_{k_i}-\bar{Z}_{k_i}\right|^{(k_{i+1}-1-k_i)(\sum_{r=1}^{i}m_{k_r}-\frac{1}{2})}},$$

本文内容取自文献[YLG,YW46].

参 考 文 献

[AiT] A.爱尔台曼.高级超越函数(第一册),张致中译.上海:上海科学技术出版社,1957.

[AKF] Apppell P, De Fériet Kamp J. *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques*. Paris: Gauthier Villars, 1926.

[Ar] Aronszajn N. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1950, **68**:337~404.

[Azu] Azukawa K. Bergman metric on a domain of Thullen type. *Math. Rep. Toyama Univ.*, 1984, **7**:41~65.

[AzS] Azukawa K, Suzuki M. The Bergman metric on Thullen domain. *J. of Geometric Analysis*, 1983, **89**:1~11.

[Be] Bergman S. The kernel function and conformal mapping, 2nd ed. 5 Math Surveys, Amer. Math. Soc., 1970.

[Be1] Bergman S. Uber die existenz von reprasentantenhereichen in theirie der Abbildung durch paare von funktionen zweier komplexen veranderlichen. *Math. Ann.*, 1929, **102**:430~446.

[Be2] Bergman S. Zur theorie von pseudokonformen ahhildungen. *Mat Sb* (N.S.), 1936, **1**(1):79~96.

[BeP] Bedford E, Pincbuk S I. Domains in $\mathbf{C}^2$ with oncompact holomorphic automorphism groups. *Mat. Sb.* (N.S.), 1988, **135**(2):147~157.

[BFS] Boas H P, Fu Siqi, Straube E J. The Bergman kernel function: Explicit formulas and zeroes. Proc. of AMS, 1999, **127**(3):805~811.

[Bll] Bell S R. The Bergman kernel function and proper holomorphic mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, **270**:685~691.

[Bld] Bland J. The Einstein-kahler metric on $\{|Z|^2+|W|^{2p}<1\}$. Michigan Math J. 1986, **33**:209~220.

[BnS] Behnke H, Stein K. Der Severische Satz uber analytische Fortsezung von Funktionen mehrerer Veränderlichen und der Kontinuitatssatz. *Ann. Math. Pure Appl.*, 1954, **36**(4):297~313.

[Bo] Boas H. Counterexample to the Lu Qi-keng conjecture. *Proc. of* AMS, 1986, **97**: 374～375.

[Boc] Bochner S. Group invariance of Cauchy's formula in several complex variables. *Ann. Math.*, 1944, **45**(4):686～707.

[Br] Bremermann H. Holomorphic continuation of the kernel and the Bergman metric. In: *Lctures on functions of a complex variable*. Univ. of Michigan Press, 1955: 349～383.

[BS] Bergman S, Schiffer M. Kernel functions and conformal mapping. *Compositio Math.*, 1951, **8**: 205～249.

[CaE] Calahi E, Eckmann B. A class of compact complex manifolds, which are not algebraic. *Ann. Math.*, 1953, **58**:494～500.

[Car] Caratheodory C. Uber die ahhildungen, die durch Systeme von analytischen Functionen von mehreren Veranderlichen erzeugt werden. *Math. Zeit.*, 1932, **34**:758～792.

[CG] Christ M, Geller D. Counterexamples to analytic hypoellipticoty for domains of finite type. *Ann. of Math.*, 1992, **135**:551～566.

[Ch] Christ M. Remarks on the breakdown of analyticity for $\overline{\partial}_b$ and Szego kernels. In: *Harmonic Analysis, ICM 90 Satellite Conference Proceedings*, 1991. Berlin: Springer-Vertag, 1992: 61～78.

[Cha] Chalmers B L. On boundary behavior of the Bergman kernel function and related domain functionals. *Pacific J Math.*, 1969, **29**: 243～250.

[ChH] 陈志鹤.一类非对称域的二阶不变微分算子.中国科学技术大学学报,1987,**17**(2):541～545.

[ChY] Cheng S Y, Yau S T. On the existence of a complex Kahler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1980, **33**:507～544.

[ChZ] 陈伯勇,张锦豪.Bergman 穷竭,完备与稳定性.数学进展,2000,**29**(5):397～410.

[DA] D'Angelo J P. A note on the Bergman kernel. *Duke Math. J.*, 1978, **45**:259～265.

[DA1] D'Angelo J P. An explicit computation of the Bergman kernel function. *J. of Geom. Anal.*, 1994, **4**:23～34.

[DeT] Derridj M, Tartakoff D. Local analyticity for the $\bar{\partial}$-Neumann problem and $\Box_b$-some model domains without maximal estimates. *Duke Math. J.*, 1991,**64**:377～402.

[DiF] Diederich K, Fornaess J E. Comparison of the Bergman and the Kobayashi metric. *Math. Ann.*, 1980,**254**(3):257～262.

[Eg] Egorychev G P. Integral representation and the computation of combinatorial sums. *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. **59**. Providence: AMS, 1984.

[Fac] Jacobson N. *Basic algebra* 1, 2nd ed. W. H. Freeman Company, 1985.

[FH] Francsics G, Hanges N. Explicit formulas for the Szego kernel on certain weakly pseudoconvex domains. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995,**123**:3161～3168.

[FH1] Francsics G, Hanges N. Asymptotic behavior of the Bergman kernel and hypergeometric functions. Contemp Math. In: *Multidimensional Complex Analysis and Partial Differential Equations, Contemporary Mathematics*, Vol. **205**. Providence: AMS, 1997, 79～92.

[FH2] Francsics G, Hanges N. The Bergman kernel and hypergeometric functions. *J. Funct. Anal.*, 1996, **142**(2):494～510.

[FKK] Faraut J, Kaneyuki S, Koranyi A, Lu Qikeng, Roos G. *Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains*. Boston, Basel, Berlin: Birkhuser, 2000.

[GB] 管冰辛. 域 D 上的 Bergman 核与解析自同构最大群. 首都师范大学学报(自然科学版). 1994,**15**(增刊):67～71.

[Gea] Geatti L. Holomorphic automorphisms of a nonsymmetric homogeneous bounded domains. *Rend. Mat.*, 1982,(7)**2**(3):475～497.

[GeK] Greene R E, Krantz S G. Techniques for Studying Automorphisms of Weakly Pseudoconvex Domains. In: Several Complex Variables: Proceedings of the Mittag-Leffler Institute, 1987～1988, Fonaess J E. ed., 389～409. Princeton: Princeton University Press, 1992.

[Gin] Gindikin S G. Analysis in homogeneous domains. *Russian Math. Surveys*. 1984, **19**:1～89.

[Gon] 龚升. 关于 Reinhardt 域(一). 科学通报, 1985 年第 18 期: 1365～

1368.

[GS] Greiner P C, Stein E M. On the solvability of some differential operators of type $\square_b$. In: Proceedings International Conference, Cortona, Italy, 1976～1977. *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa. CI Sci.*, 1978, **4**:106～165.

[GW] Guan Bingxin, Wang An. The Bergman kernel function and full group of holomorphic automorphism on a Reinhardtdomain. *Quarterly of Mathematics*. 1994, **9**(3):82～87.

[GY] 管冰辛,殷慰萍.第四类 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核函数及一种双全纯不变量.厦门大学学报(自然科学版),2000,**39**(5):581～587. MR 2001 e: 32003.

[GZ] 龚升,郑学安.Reinhardt 域的 Bergman 核函数(Ⅰ,Ⅱ)中国科学(A辑),1995,**25**:580～590,683～692.

[GZ1] Gong Sheng, Zheng Xue'an. The Bergman kernel function of some Reinhardt domains. *Transactions of American Mathematical Society*. 1996, **348**(5):1771～1803.

[Had] Hadamard J. Le problem de Cauchy, Paris: Hermann, 1932.

[Han] Hanges N. Explicit formulas for the Szego kernel for some domains in $\mathbf{C}^2$. *J. Funct. Anal.*, 1990, **88**: 153～165.

[HaP] Hahn K T, Pflug P. The Kobayashi and Bergman metrics on generalized Thullen domains. *Proc. of AMS*, 1988, **104**:207～214.

[Has] Haslinger F. Singerlarities of the Szego kernel for certain weakly pseudoconvex domains in $\mathbf{C}^2$. *J. Funct. Anal.* 1995, **129**: 406～427.

[Hei] Heins M. On a class of conformal metrics. *Nagoya Math. J.*, 1962, **21**:1～60.

[Hel] Helgason S. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. New York and London: Academic Press, 1962.

[HLu] 华罗庚,陆启铿.典型域的调和函数论(Ⅰ):矩阵双曲空间的调和函数;典型域的调和函数论(Ⅱ):斜对称方阵双曲空间的调和函数. 数学学报,1958,**8**:531～548;1959,**9**:295～314.

[HLu1] 华罗庚,陆启铿.Theory of harmonic functions in classical domains. Scientia Sinica, 1959, **8**:1031～1094.

[Hua] 华罗庚.多复变函数论中的典型域上的调和分析.北京:科学出版

社,1959.

[Hua1] Hua L. K. On the theory of automorphic functions of several variables. *Ann. Math.*, 1946, **47**:167~191.

[Hua2] 华罗庚.从单位圆谈起.北京:科学出版社,1977.

[IsK] Isaev A V, Krantz S G. Invariant distances and metrics in complex amalysis. *Notices of AMS*, 2000, **47**(5):546~553.

[JaP] Jarnicki M, Pflug P. *Invariant Distances and Metrics in Complex analysis*. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1993.

[Ki] Klingen H. Discontinuierlich Gruppen in symmetrischen Raumen. *Math. Ann.*, 1955, **129**: 345~369.

[Ki1] Klingen H. Uber die analytischen Abbildungen verallgemeinerter Einheitskreise auf sich. *Math. Ann.*, 1956, **132**: 134~144.

[Ko] Kobayashi S. Geometry of bounded domains. *Trans. of Amer. Math. Soc.*, 1959, **92**:267~290.

[Kod] Kodama A. Characterization of certain weakly pseudoconvex domains $E(k,a)$ in $\mathbf{C}^n$. *Tohoku Math. J.*, 1988, **40**(3):343~365.

[Kor] Koraúnyi A. Analytic invariants of bounded symmetric domains. *Proc. AMS*, 1968, **19**: 279~284.

[Kra] Krantz S. G. *Function Theory of Several Complex Variables*. New York:John Wiley and Sons, 1982.

[Kra1] Krantz S. G. What is several complex variables. *American Mathematics Monthly*, 1987(3):236~256.

[LGY] 林萍,管冰辛,殷慰萍.一类非自共轭锥上的 Gamma 函数.数学学报,1998,**41**(5):897~914.MR 2000c:32012.

[Li] Lichnerowicz A. Varietes complexes et tenseur de Bergman. *Ann. Inst. Fourier*, 1965, **15**:345~408.

[Lo] Loos O. Bounded symmetric domains and Jordan pairs. Lecture Notes of Dept. of Math., Univ. of California, Irvine, California, 1977.

[LP] 林萍.关于域 $D=\{(z_1,z_2):|z_1|^2+|z_2|^{3/2}<1\}$ 的 Bergman 核与 Aut(D).厦门大学学报(自然科学版),1993, **33**(1):17~21.

[LP1] 林萍.一种 Reinhardt 域的 Bergman 核与 Aut(D).首都师范大学学报(自然科学版),1994, **15**(增刊):76~82.

[LP2] 林萍.第Ⅱ类非自共轭锥上的 Gamma 函数.数学学报,1999,28

(2):157～168.

[Lu] 陆启铿.关于常曲率的 Kahler 流形.数学学报,1966,**16**:269～281.

[Lu1] Lu Qi-keng. The theory of functions of several complex variables in China from 1949 to 1989. In: *Contemporary Geometry*, Wu H ed. New York, London: Plenum Press, 1991, 408～488.

[Lu2] 陆启铿.典型流形与典型域.上海:上海科学技术出版社,1963.

[Lu3] 陆启铿.典型流形与典型域新篇.上海:上海科学技术出版社,1997.

[Lu4] 陆启铿.多复变函数引论.北京:科学出版社,1961.

[Lu5] 陆启铿.多复变函数与酉几何.数学进展:1956,**2**:567～662.

[Lu6] Lu Qikeng. On the representative domains. *Several Complex Variables* (Proceedings of the 1981 Hongzhou Conference). Boston: Birkhauser, 1984.

[Lu7] 陆启铿.一类齐性的复解析流形.数学学报,1962,**12**:229～249.

[Lu8] Lu Qikeng. Schwarz lemma of several complex variables. *Acta Math. Sinica*, 1957, **7**:370～420.

[LuR] 陆汝钤.一类非对称可递域的调和函数.数学学报,1965,**15**(5):614～650.

[LY] 陆启铿,殷慰萍.一个变系数的波动方程的 Cauchy 问题之解.数学年刊,1980,**1A**(1):115～129.MR 82i:35104;Zbl:439.35038.

[LZG] 陆启铿,邹振隆,郭汉英.典型时空的运动效应和宇宙红移现象.物理学报,1974,**33**:225～238.

[MaL] 马兰.一类非自共轭锥上的 Gamma 函数.中国科学技术大学学报,1991 年数学专辑.

[MaP] Mazur T, Pflug P, Skwarczynski M. The invariant distance related to the Bergman function. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1985, **94**:72～76.

[Me] Meschkowski H. *Hilbertsche Raume mit Kernfunktion*. Berlin: Springer, 1962.

[Mor] Morimoto A. *Proceedings of the Conference on Complex Analysis*. Berlin: Springer Verlag, 1965: 256～272.

[MoY] Mok N, Yau S T. Completeness of the Kahler-Einstein metric on bounded domains and the characterizations of domains of holomorphy by curvature conditions. *Proc. Symposia Pure Math. AMS*,

Providence, RI, 1983, **39**: 41～59.

[MS] Mostow G D, Siu Y-T. A compact Kahler surface of negative curvatrue not covered by the ball. *Ann. of Math.*, 1980, **112**: 321～360.

[Nag] Nagel A. Vector fields and nonisotropic metric. In: Beijing Lecures in Harmonic Analysis, Annals of Mathematical Studies, Vol. **112**, 241～306. Princeton: Princeton University Press, 1989.

[Nar] Narasimhan R. *Several Complex Varaiables*. Chicago: The University of Chicago Press, 1971.

[OPY] Oeljeklaus K, Pflug P, Youssfi E H. The Bergman kernel of the minimal ball and applications. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), 1997, **47**:915～928.

[PfW] Pflug P, Wlodzimierz Z. The Kobayashi metric for non-convex complex ellipsoid. *Complex Variables*, 1996, **29**: 59～71.

[Ros] Roos G. Generalization of an integral of Hua Loo-Keng. 尚未出版.

[Sc] Schiffer M. Stefan Bergman(1895～1977), In: *Memoriam. Annales Polonoci Mathematici*, 1981, **39**:5～9.

[Sha] Pyateckii-Shapiro I I. On a problem of E. Cartan. *DAN*, 1959, **124** (2):272～273.

[Sha1] Pyateckii-Shapiro I I. *Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains*. New Yrok: Gordon and Breach, 1969.

[Sha2] Pyateckii-Shapiro I I. Generalized upper halfplanes in the theory of many complex variables. *Transactions of the Stockholm Mathematical* Congress. 1963.

[Shi] 史济怀.多复变函数论基础.北京:高等教育出版社,1996.

[Sie] Siegel C L. Symplectic geometry. *Amer. J. Math.*, 1943, **65**:1～86.

[Sie1] Siegel C L. Uber die analytische theorie der quadratischen formen. *Ann. Math.*, 1935, **36**(3):527～606.

[Sk] Skwarczynski M. The invariant distance in the theory of pseudoconformal transformations and the Lu Qi-keng conjecture. *Proc. of AMS*, 1969, **22**:305～310.

[Sk1] Skwarczynski M. The Bergman function, bibolomorphic invariants and the Laplace transform. *Annales Universitatis Mariae Curie-*

Sklodowska Lublin-Polonia (*Section A*), 1994, **XLVIII**(11):120 ~161.

[Swk] Skwarczynski M. Biholomorphic invariants related to the Bergman function. *Dissertatioes Math*., 1986, **173**:1~59.

[Tia] Tiao Chieh-hsien. The Bergman kernel on monomial polyhedra. *Michigan Math. J*., 1999, **46**(1):53~69.

[TW] 童武.关于某类 Reinhardt 域的 Bergman 核函数与解析自同构最大群.数学研究.1995,**28**(2):67~75.

[Vin] Vinberg E B. Homogeneous cones. *DAN*, 1960, **133**(1):9~13.

[WB] Wong B. Characterization of the unit ball in $\mathbf{C}^n$ by its automorphism group. *Inventions Math*., 1977, **41**: 253~257.

[Web] Webster S M. Biholomorphic mappings and the Bergman kernel off the diagonal. Iven. Math., 1879, **51**:155~169.

[WT] 王大木.一类 Reinhardt 域的几何性质(1).漳洲师院学报(自然科学版).1989(1):10~28.

[WXi] 吴新谋.数学物理方程.北京:科学出版社,1958 及 1959.

[WY] D. C. Wu, C. N. Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formation of gauge fields. Phys. Rev. D(3),12(1975),No. 12,3845~3857.

[WYC] Wong Y. C. Euclide n-planes in pseudo Euclidean spaces and differential geometry of Cartan domains. *Proc. of the AMS*, 1969, **61**: 409~414.

[XY] Xu Yichao. On the Bergman kernel functions of homogeneous bounded domains. *Sci. Sinica*., 1979, Special Issue II:80~90.

[XY1] 许以超.关于齐性有界域的同构.数学学报.1977,**20**:248~266.

[XY2] 许以超.方型锥的有界实现.中国科学(A 辑),1989,**34**:208~267.

[XY3] Xu Yichao. Automorphism group of exceptional symmetric domains R_V. *Science in China* (Series A), 2000, **43**(4):347~356.

[XY4] Xu Yichao. Automorphism group of exceptional symmetric domains R_{VI}. *Science in China* (Series A), 2000, **43**(10):1035~1045.

[Yau] Yau S. T. The role of partial differential equations in differential geometry. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Helsinki, 1978: 237~250.

[YGD] 殷慰萍,管冰辛,丁莉.一类非自共轭锥上的特殊函数.厦门大学学报(自然科学版).1998,**37**(6):814 - 820.MR 2000g:32025;Zbl:923.43005.

[YiT] 殷慰萍,童武.一类拟凸域的不变 Kahler 度量与曲率.数学学报,1997,**40**(6):831 - 838.MR 99c:32004;Zbl:917.32013.

[YJ] 殷慰萍,钟家庆,斜对称双曲矩阵空间的解析自同胚最大群.北京大学学报(自然科学版),1962(3):226 - 244.

[YL] 殷慰萍,李希宽.一些 Reinhardt 域的 Bergman 核.科学通报(A 辑).1993,**38**(19):1729 - 1732.

[YL1] Yin Weiping, Li Xikuan. On the Bergman kernels of some special Reinhardt domains. *Advanced Mathematics* (China). 1993, **22**(2):166 - 167.

[YLG] 殷慰萍,林萍,管冰辛.第 III 类非自共轭锥上的 Gamma 函数.数学学报,1999,**42**(3):445 - 464.MR 2000i:32041.

[YLZ] Yin Weiping, Lin Ping, Zhao Xiaoxia. The Gamma functions and Siegel integrals on a class of nonselfdual cones. 数学季刊,1999,**14**(1):88 - 101.MR 2000h:32031.

[YN] 殷慰萍,王男.第二类华罗庚域的 Bergman 核函数.中国科技大学学报,2001,**31**(1):7 - 15.

[YSZ] Yin Weiping, Su Jianbing, Zhao Zhengang. Characterization of complete Bounded domain. 数学进展,2003,31(2):185 - 188.

[YW] Yin Weiping. Two problems on Cartan domains. *J. of China Univ. of Sci. and Tech.* 1986, **16**(2):130 - 146.MR 88k:32061.

[YW1] 殷慰萍.4 类超 Cartan 域的 Bergman 核函数.科学通报(A 辑),1999,**44**(13):1391 - 1395.

[YW2] Yin Weiping. The Bergman kernels on Cartan-Hartogs domains. *Chinese Science Bulletin* (Series A),1999, **44**(21):1947 - 1951. MR 2001 g: 32004.

[YW3] 殷慰萍.第 类超 Cartan 域的 Bergman 核函数.中国科学(A 辑).1999,**29**(7):607 - 615. MR 2001 e: 32004.

[YW4] 殷慰萍.第四类超 *Cartan* 域的 *Bergman* 核函数.数学学报,1999,**42**(5):951 - 960. MR 2001 d: 32005.

[YW5] Yin Weiping. The Bergman kernels on super-Cartan domain of the first type. *Science in China* (Series A),2000,**43**(1):13 - 21. MR

2001 e:32004.

[YW6] 殷慰萍. 第二类超 Cartan 域的 Bergman 核函数. 数学年刊, 2000, **21**A(3):331～340.

[YW7] 殷慰萍. 第二类超 Cartan 域的 Bergman 核函数. 数学进展, 2000, **29**(5):425～434.

[YW8] 第一类 Cartan Egg 域的 Bergman 核函数. 数学进展, 2001, **30**(6):533～542.

[YW9] Yin Weiping. The Bergman kernels on Cartan-Egg domain of the first type. *Northeast Mathematics J.*, 2001, **17**(2):210～220.

[YW10] Yin Weiping. The Bergman kernels on Cartan-Hartogs domain. Complex Variables(纪念庄圻泰专集), 2001, **43**(3-4):477～494. MR 2002b: 32004.

[YW11] 殷慰萍. 16 维 Cartan 例外域(II). 首都师范大学学报(自然科学版), 1994, **15**(2):1～7.

[YW12] 殷慰萍. 16 维 Cartan 例外域(I). 首都师范大学学报(校庆特刊), 1995 年 9 月:128～134.

[YW13] 殷慰萍. Cartan 例外域的对合及其有界域的形式. 数学进展, 1995, **24**(5):432～438. MR 97a:32044; Zbl:841.32018.

[YW14] Yin Weiping. On the exceptional Cartan domain of dimension 16. IC/93/127.

[YW15] Yin Weiping. On the exceptional Cartan domain of dimension 16. *Complex Variables*, 1995, **27**:317～334. MR 96e:32031.

[YW16] 殷慰萍. 对称典型域的解析自同胚最大群. 中国科学技术大学学报, 1987, **17**(3):291～303. Zbl:637.32025

[YW17] 殷慰萍. 齐性 Siegel 域的截曲率. 中国科学技术大学学报, 1987, **17**(1):1～16. MR 88j:32044; Zbl:619.32023.

[YW18] 殷慰萍. 扩充空间的若干注记. 中国科学技术大学学报, 1982, **12**(1):13～19 MR 85b:32050.

[YW19] 殷慰萍. 第一类非对称齐性 Siegel 域的西几何. 科学通报, 1981, **26**(20):1225～1229.

[YW20] 殷慰萍. 非对称第一类 Siegel 齐性域的西几何(I). 数学学报, 1981, **24**(5):753～764, MR84e:32032a, Zbl:567.32011.

[YW21] 殷慰萍. 非对称第一类 Siegel 齐性域的西几何(II). 数学学报, 1981, **24**(5):765～779, MR84e:32032a, Zbl:567.32011.

[YW22] 殷慰萍.非对称第一类 Siegel 齐性域的西几何(III).数学学报, 1981,**24**(6):879~891.MR84e:32032b,Zbl:502.32025.

[YW23] 殷慰萍.关于 Poisson 核的一点注记.科学通报,1981,**26**(10): 581~583.

[YW24] Yin Weiping. Some results on the nonsymmetric Siegel domains and explicit solutions of some partial differential equations. *Procs. of the* 1980 *Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*. Beijing: Science Press, 1982, 1681~1694, MR 84k:32041, Zbl:525.35051.

[YW25] Yin Weiping. A remark on Poisson kernels. Kexue Tongbao, Special Issue, 1983, 94~97.

[YW26] 殷慰萍.有界对称域的一个特征,科学通报,1986,**31**(12):888~890.

[YW27] Yin Weiping. The Kahler geometry on Reinhardt domains. *Chinese Science Bulletin*. 1987,**32**(17):876~877.

[YW28] Yin Weiping. Reinhardt 域的不变度量与群不变函数.科学通报,1988,**33**(5):329~332.

[YW29] 殷慰萍.一种域的曲率与群不变函数.中国科学(A辑),1987,**17**(12):1245~1257

[YW30] 殷慰萍.在 Aut(D)下不变的调和函数.数学年刊,1990,**11**A(3): 281~284,MR 91f:32002;Zbl:787.31008.

[YW31] 殷慰萍.一类 Reinhardt 域的全纯截曲率.中国科学(A辑), 1992,**22**(7):680~689,MR 94f:32048;Zbl:772.32020

[YW32] 殷慰萍.关于表示域的一个注记.数学学报,1993,**36**(3):302~305,MR 94i:32033;Zbl:779.32021.

[YW33] 殷慰萍.一类拟凸域的 Bergman 度量与 Kobayashi 度量的比较定理.数学进展,1997,**26**(4):323~334,MR 99e:32038;Zbl:899.32009.

[YW34] Yin Weiping. The Einstein-Kahler Metrica with Explicit forms on A Class of Egg Donains. *Complex Variables*, 1998,**36**:99~109, MR 99i:32034.

[YW35] Yin Weiping. Curvatures and invariant functions. *Scientia Sinica* (Series A), 1988,**31**(6):675~686, MR 89i:32064, Zbl:661.32004.

[YW36] Yin Weiping. Curvatures on a class of Reinhardt domains. *Science in China* (Series A), 1992, **35**(11):1281－1293, MR 94f: 32048. Zbl:774.32020.

[YW37] Yin Weiping. A comparison theorem on a class of Reinhardt domains. Procs. of Asian Math. Conference 1990. World Scientific Press, 1992, 531－538, MR 93b:00022.

[YW38] Yin Weiping. The comparison theorem for the Bergman and Kobayashi metrics on a class of pseudoconvex domains, 数学进展, 1996, **25**(3):277～278, Zbl:858.32020.

[YW39] Yin Weiping. The comparison theorem for the Bergman and Kobayashi metrics on certain pseudoconvex domains. *Complex Variables*, 1997, **34**: 351～373, MR 98j: 32025, Zbl: 920.32023.

[YW40] Yin Weiping. The Einstein-Kahler Metrica with Explict forms on A Class of Egg Domains. IC/95/111.

[YW41] Yin Weiping. The Bergman kernels on four types of Cartan-Hartogs domains. Classical Analysis Proceedings of the 10th International Symposium, Mazur T. ed Warsaw: Warsaw Agricultural University Press, 2001.

[YW42] 殷慰萍. 一类双曲型方程 Cauchy 问题的显式解. 数学学报, 1980, **23**(1):102～117. MR 81g:35094; Zbl:424.35060.

[YW43] 殷慰萍. 一类奇异双曲型方程的 Riemann 函数. 中国科技大学学报, 1980, **10**(2):10～14.

[YW44] Yin Weiping. A special function on nonselfdual cones. *J. China Univ. of Sci and Tech.*, 1986, **16**(4):367～384. MR 88k: 32080.

[YW45] 殷慰萍. 有界域 Bergman 核函数显式表示的最新进展. 数学进展, 2002, 31(4):295～312.

[YW46] Yin Weiping. A special function on nonselfdual cones. IC/84/148.

[YW47] Yin Weiping. A comparison theorem of the Kobayashi metric and the Bergman metric on a class of Reinhardt domains. IC/90/64.

[YW48] Yin Weiping. Some new phenomena on bounded nonhomogeneous domains. *Acta Math. Sinica N.S.*, 1989, **5** (1): 57～63, MR

90f:32003,Zbl:779.32025.

[YW49] Yin Weiping. Some remarks on Reinhardt domains. *Advances in Mathematics* (China), 1988, **17**(2):206～237.

[YW50] Yin Weiping. Aut(D)-invariant metrics and Aut(D)-invariant functions on Reinhardt domains. *Kexue Tongbao*, 1989, **34**(6): 441～443,MR 90k: 32073.

[YWA] Yin Weiping, Wang An. The Einstein-Kahler Metric with singularities on A Class of Egg Domains. 数学进展 1995,**24**(4):373～374. Zbl:834.32003.

[YWA1] 殷慰萍,王安. 超 Cartan 域的 Einstein-Kahler 度量,将出版.

[YWG] 殷慰萍,管冰辛.第四类华罗庚域的 Bergman 核函数.数学学报, 2003,46(1):85～94.

[YWR] Yin Weiping, Roos. New classes of domains with explicit Bergman kernel. To be published.

[YWS1] Yin Weiping, Su Jianbing. The Bergman kernels on generalized Hua domains. 自然科学进展,2002,12(12):893～899.

[YWS2] Yin Weiping, Su Jianbing. The explicit computations of Bergman kernels on generalized Hua domains. 数学进展,2001,**30**(5):473～476.

[YWZ] Yin Weiping, Wang Nan, Zhao Ling. Computations of Bergman kernel on Cartan Egg domains of second and third types. *Boundary Value Problems, Integral Equations and Related Problems*. Singapore: World Scientific, 2000, 253～260.

[YWZG] 殷慰萍,王男,赵玲,管冰辛.四类 Cartan-Egg 域的 Bergman 核函数.首都师范大学学报(自然科学版),2001.**22**(2):1～13.

[YWZx] Yin Weiping, Wang An, Zhao Xiaoxia. Comparison theorem for the Bergman and Koabyashi metrics on Cartan-Hartogs domain of tbe first type.数学进展,2000,**29**(1):86～88.

[YWZx1] 殷慰萍,王安,赵晓霞.第一类超 Cartan 域上的比较定理,中国科学(A 辑),2000,**30**(11):990～1001.

[YWZx2] Yin Weiping, Wang An, Zhao Xiaoxia. The comparison theorem for the Bergman and Kobayashi metrics on Cartan-Hartogs domains of the first type. *Science in China* (Series A),2001,**44**(5):587～598. MR 2002f: 32024

[YWZZG] 殷慰萍，王安，赵振刚，赵晓霞，管冰辛. 华罗庚域的 Bergman 核函数. 中国科学(A 辑)，2001，**31**(6)：503～516

[YWZZG1] Yin Weiping, Wang An, Zhao Zhengang, Zhao Xiaoxia, Guan Bingxin. The Bergman kernel functions on Hua domains. 数学进展，2001，**30**(2)：185～188

[YWZZG2] Yin Weiping, Wang An, Zhao Zhengang, Zhao Xiaoxia, Guan Bingxin. The Bergman kernel functions on Hua domains. *Science in China* (Series A)，2001，**44**(6)：727～741.

[YZg] Yin Weiping, Zhao Zhengang. Charactization on classical domain by its Caratheodory measure and Eisenman-Kobayashi measure. 中国科学将出版.

[YZg1] Yin Weiping, Zhao Zhengang. The computation of Bergman kernel. *Boundary Value Problems, Integral Equations and Related Problems*. Singapore: World Scientific, 2000, 297～305.

[YZg2] 殷慰萍，赵振刚. 第二类华罗庚域的 Bergman 核函数(II). 厦门大学学报，2001，**40**(6)：473～476.

[YZg3] Yin Weiping, Zhao Zhengang. The Bergman kernels on generalized exceptional Hua domains. Science in China (Series A), 2002, 45131：321～334.

[YZg4] Yin Weiping, Zhao Zhengang. The Bergman kernels on generalized exceptional Hua domains. 数学进展，2001，**30**(3)：279～282.

[YZg5] 殷慰萍，赵振刚. 广义例外华罗庚域的 Bergman 核函数. 中国科学(A 辑)，2001，**31**(11)：983～997.

[YZg6] Yin Weiping, Zhao Zhengang. Completeness of the Bergman metric. 数学进展，2000，**29**(2)：189～191.

[YZg7] 殷慰萍，赵振刚. Bergman 度量的完备性. 数学年刊，2001，**22A**(3)：349～354.

[YZx] 殷慰萍，赵晓霞. 第三类华罗庚域的 Bergman 核函数，数学年刊，2003，**24A**(1)：81～90.

[YZx1] Yin Weiping, Zhao Xiaoxia. The Bergman kernels and comparison theorem on Hua domain of the third type. 数学进展，2000，**29**(5)：473～476. MR 2002d：32008.

[YZx2] 殷慰萍，赵晓霞. 第三类超 Cartan 域的比较定理. 数学学报将发表

[YZx3] Yin Weiping, Zhao Xiaoxia. The comparison theorem on Cartan Hartogs domain of the third type. *Complex Variables*, 2002, **47** (3): 183～201.

[ZhJ] 钟家庆. 微分算子环的素理想. 数学年刊, 1980, **1A**(3-4): 359～374.

[ZhJ1] 钟家庆. 正定 Hermitian 锥上的 Siegel-Godement 变换. 数学学报, 1982, **25**(2): 236～243.

[ZhY] 赵振刚, 殷慰萍. 用体积元素来刻划典型域. 中国科学(A 辑), 2002, 32(7): 667～672.

[Zin] Zinovev B S. On reproducing kernels for multicircular domains of holomotphy. *Sib. Math. J.* 1974, **15**: 35～48.

[ZJY] 钟家庆, 殷慰萍. 非对称可递域的若干类型. 数学学报, 1981, **24** (4): 587～613. MR 83j: 32035a; Zhl: 554.32024.

[ZJY1] 钟家庆, 殷慰萍. 非对称典型域的扩充空间. 数学学报, 1981, **24** (5): 614～640. MR 83j: 32035b; Zhl: 554.32025.

[ZJY2] Zhong Jiaqing, Yin Weiping. Some types of nonsymmetric homogeneous domains. In: *Contemporary Geometry*, Hung-Hsi Wu ed. New York, London: Plenum Press, 1991, 263～303.

[ZJY3] Zhoug Jiaqing, Yin Weiping. The extension spaces of nonsymmetric classical domains. In: *Contemporary Geometry*, Hung-Hsi Wu ed. New York, London: Plenum Press, 1991, 305～345.

后　记

本书终于出版了.我首先要感谢首都师范大学校长出版基金的支持，没有这基金的支持，本书的出版是不可能的.同样我要感谢国家自然科学基金委员会基金、北京市自然科学基金委员会基金、中国科学院基金和国家教委博士点专项基金的支持.从中国科学院基金开始，到现在各种基金的设立，我的研究工作一直得到这些基金不同程度的资助，没有他们的资助，我就没法开展我的研究工作，也就谈不上出版本书了.当然我更要感谢我的导师陆启铿院士，没有他，我不会走上多复变的研究道路，也就不会有我的今天.我也要感谢我的爱人薛彩华，没有她的辛勤操劳和管教儿子，我根本就没有那么多的时间进行研究和出国访问.我还要感谢本书的责任编辑古丽娅和付作梅、校对科的王亚利、总编室的俞斌博士以及首都师范大学出版社为本书的出版出过力的同志们，感谢他们的辛勤劳动.作者特别要感谢高教出版社的丁鹤龄老先生，他的认真、负责、一丝不苟的校对为本书增色不少.

本书从开始具体写作到完成，花的时间并不多.但是，其内容从 1962 年的“斜对称矩阵双曲空间的解析自同胚最大群”开始，到最近的“广义华罗庚域的 Bergman 核函数”，跨越了整整 40 年.本书实质上是本人从事科研工作至今 40 年的结晶.在这 40 年中经历了风风雨雨，曲曲折折，辛辛苦苦，坎坎坷坷，至今为止完成和发表了 110 余篇学术论文，除了本书在参考文献引用的[GY, LGY, LY, YGD, YiT, YL, YL1, YLG, YLZ, YN, YW, YW1—YW50, YWA, YWA1, YWG, YWR, YWS1—YWS2, YWZ, YWZG, YWZx—YWZx2, YWZZG—YWZZG2, YZg—YZg7, YZx—YZx3, ZhY, ZJY—ZJY3]共计 93 篇外，还有如下的 19 篇论文，1 本专著和 4 种译著：

[01] MHD 平衡方程 Dirichlet 问题的显式解.中国科学技术大学学报，1980，**10**(1)：25～37.

[02] 自共轭非齐性锥上的调和函数(与陈方喜合作).中国科学技术大学学报，1980，**10**(4)：66～75，MR 84k：32042.

[03] On the automorphisms of homogeneous Siegel domains. IHES/M/84/9.

[04] Two Problems on Bounded Homogeneous Domains. 中国科技大学学报,16:**3**(1986),241～248,MR88e:32055.

[05] C^n中有界域的解析自同胚群.首都师范大学学报(自然科学版),1992,**13**(3):8～16.

[06] 著名数学家陆启铿学部委员(庆贺陆启铿教授65岁生辰).数学季刊,1992,**7**(3):1～8.

[07] 在第一届华罗庚数学奖授奖大会上介绍获奖人陆启铿院士的工作.中国数学会通讯,1992年第4期.

[08] Cartan例外域的Leray公式及$\bar{\partial}$-方程的解(与李希宽合作).数学年刊,1995(2):**16A**,212～216.MR 96h:32004.

[09] 一类有界拟凸域的双全纯不变量(与王安合作).首都师范大学学报(自然科学版),1995,**16**(4):1～4.

[10] 一类Egg域的不变Kahler度量和不变函数.首都师范大学学报(自然科学版),1995年数学特辑,1～8.

[11] On automorphisms of homogeneous Siegel domains. 首都师范大学学报(自然科学版),1996,**17**(2):1～24.

[12] Invariant Kahler metrics and curvatures on certain pseudoconvex domains (with Tong Wu). *Beijing Mathematica*, 1996,**2**(2):109～118.

[13] Invariant Kahler metrics and curvatures on a class of pseudoconvex domains(with Tong Wu)(in English). *Advances in Mathematics* (China), 1996, **25**(4):377～378,Zbl:911.32016.

[14] 关于超Cartan域上的Bloch函数(与苏简兵合作).中国科学技术大学学报,2002,32(4):390～398.

[15] 关于第四类超Cartan域上的Bloch函数(与苏简兵合作).中国科学技术大学学报,2002,**32**(1):7～18.

[16] 华罗庚域的Einstein-Kahler度量(与王安合作).已投出.

[17] Extremal problems on super-Cartan domain of the first type (with Su Jianbing), to be submited.

[18] Einstein-Kabler metric on Cartan Hartogs domain of the fourth type(with Wang An),to be submited.

[19] 第四类华罗庚域上的Bergman核函数Ⅱ(与管冰辛合作).首都师范大学学报(自然科学版),2002,23(3):1～5.

专著一本:复变函数的应用(与北京大学闻国椿教授合作).北京:首

都师范大学出版社,1999.

译著4种:

[01] 多复变函数(与同济大学陈志华教授合译).北京:科学出版社,1985.

[02] 量子场论与多复变数解析函数.数学译丛,1965,(2),1~26.

[03] 非紧复空间中的分析.数学译丛,1965,第2期,32~50.

[04] 自守函数和表示理论.数学译丛,1965,第1期,38~45.

上述这些工作绝大部分是在"文革"以后完成的.特别是在改革开放以来,遇到了前所未有的在"文革"前不敢想象的好时期.其中对我影响最大的,让我最受益的,就是知识分子可以出国访问进行国际合作研究、学术交流和讲学。我于1983年9月1日到12月8日访问了法国巴黎近郊的高等科学研究院(Institut Des Hautes Etudes Scientifiques, 简称IHES).然后从12月8日到23日顺访了德国波恩的马普数学所(Max-Planck-Institut für Mathematik, 简称MPIM)后,飞越大西洋到美国新泽西州的普林斯顿高级研究院(Institute of Advanced Study, 简称IAS),在钟家庆处呆了一个星期,于1984年元旦到5月21日在马里兰大学(University of Maryland)访问.接着就去意大利的特里雅斯特的国际理论物理中心(International Centre for Theoretical Physics,简称ICTP),直到1984年9月23日回国.原本还可以应A.Dold教授的邀请去海德堡大学的数学研究所访问3个月,一切手续都已办妥,但由于已出国满一年,就称病未去.出国期间,在马里兰大学和ICTP各作了一次学术报告.这是我的第一次出国访问.1988年7月6日到25日在印度孟买的塔塔研究所(Tata Institute for Fundamental Research,简称TIFr)访问,原计划在印度签证去法国,哪知道在印度不办理去第三国的签证,只好自己买机票回国签证.但是所带美元只够买经济舱的机票,而经济舱已满员.经协商,国泰航空公司以经济舱的价格给了我一张商务舱的机票.8月份参加了纪念华罗庚的国际会议后,应G.Roos教授的邀请从1988年8月20日到10月17日访问了普瓦捷大学(University of Poitiers).其中前一个月是参加CIMPA SCHOOL,后一个月是在该校访问.在法国得到了去美国的签证,接着应W.Stoll教授的邀请从1988年10月17日到1989年1月5日访问了美国的圣母大学(University of Notre Dame).这期间还顺访了普渡大学(Purdue University)一周(1988.11.7~12.),我在普渡大学复分析讨论班上作学术报告时,国际数学家大会(简称ICM)上做过45分钟报告的Steven R.Bell, David W.Catlin, L.Lempert和Eric D Bedford四位数学家

和在 ICM 做过 1 小时报告的 De Branges 教授都听了我的学术报告，并与之交谈．这之后，从 1989 年 1 月 5 日到 4 月 3 日访问了在加州 Berkeley 的美国国家数学所（Mathematical Sciences Research Institute，简称 MSRI）．这期间收到了 ICTP 的邀请，立即在旧金山的意大利驻美国领馆办好了去意大利的签证，办得相当顺利，准许我在 1989 年年底前入境都有效，而且没有收我的签证费．1989 年 4 月 4 日到 11 日，应韩国科学技术院应用数学科主任金泓五（Hong Oh Kim）的邀请，飞越太平洋到韩国汉城访问，该院院长李相洙（Sang Soo Lee）先生接见了我，给我赠送礼物并合影．我做了两个学术报告．从 1989 年 4 月 11 日到 7 月 10 日，应金行壮二（Soji Kaneyuki）教授的邀请，访问了日本东京的上智大学（Sophia University）并作演讲．在这期间，又在 9 所大学作了学术报告：5 月 13 日由 Toshio Oshima 教授邀请在东京大学（Tokyo University），5 月 29 日由 S. Murakami 教授邀请在大阪大学（Osaka University），5 月 30 日由 K. Azulkawa 教授邀请在富山大学（Toyama University），6 月 1 日由 T. Tsuji 教授邀请在三重大学（Mie University），6 月 5 日由 J. Noguchi 教授邀请在东京理工学院（Tokyo Institute of Technology），6 月 12 日由 T. Sunada 教授邀请在名古屋大学（Nagoya University），6 月 19 日由 I. Sadake 教授邀请在仙台的东北大学（Tohūku University），6 月 21 日由 K. Yamaguchi 教授邀请在北海道大学（Hokkaido University），7 月 7 日由 M. Obata 教授邀请在庆应大学（Keio University）分别作了学术报告．这样我已经绕了地球一圈，故于 1989 年 7 月 10 日回到合肥，准备休整一下再去 ICTP 访问．但是当时主管外事的副校长不同意我去 ICTP 访问，我在美国已经获得了去意大利的入境签证，ICTP 已经寄来了机票，按照一般的情况不管同意与否，我都可以赴意访问．但由于当时的"六·四"政治风波，从 1989 年 6 月 20 日开始要有出国证明（俗称出境卡）才能出境（两三年后才取消此规定），由于始终不批准给我出境卡，我没有办法，就给邀请方 ICTP 的 Director、第三世界科学院院长、诺贝尔奖获得者阿布杜斯·萨拉姆（Abdus Salam）写了一封信，说明我由于得不到出国证明不能前去访问，十分抱歉．谁知萨拉姆先生收信后十分认真，立即给当时的中国科学院院长周光召先生写信请他帮助解决．那时恰逢那位副校长到届，由接任者根据周光召院长的意见批准我去 ICTP 访问．最后我于 1989 年 12 月 20 日到 1990 年 4 月 18 日又一次访问了 ICTP．这期间，应 Klas Diederich 教授的邀请于 1990 年 2 月 12 日到 16 日在德国的 Wuppertal 参加"International Workshop on Complex Analysis"，以庆贺著名数学家 H. Grauert 的 60 岁

生日.随后应 H. Flenner 教授和 S. Kosarew 教授的邀请在哥廷根大学(Gottingen University)于 1990 年 2 月 20 日,应 P. Pflug 教授的邀请在 Osnabruck University 于 1990 年 2 月 22 日和在 Osnabruck University at Vechta 于 1990 年 2 月 23 日,各作了一次学术报告.又由 Fabrizio M. E. Catanese 教授邀请在意大利的比萨大学(Pisa University)于 1990 年 3 月 8 日作了一次学术报告.在回国途中,应 C. O. Kiselman 教授的邀请顺访了瑞典.1990 年 4 月 20 日在 Uppsala University 作了学术报告,应 Urban Cegrell 教授的邀请 1990 年 4 月 23 日上午在 Umea University 作了报告,随即乘飞机,应 Jaak Peetre 教授的邀请于当天下午在斯德哥尔摩大学(University of Stockholm)作了一次学术报告,于第二天启程回国.1990 年 8 月在香港参加了第一次亚洲数学大会,并作分组报告.其后便收到了萨拉姆先生的邀请信,聘请我为 ICTP 的 Associate Member,这样我便分别于 1993 年 7 月 27 日至 10 月 25 日,1995 年 6 月 4 日到 9 月 1 日,1997 年 12 月 8 日到 1998 年 3 月 8 日三次在 ICTP 做 Associate Visite.在第一次 Associate Visite 之前,曾收到土耳其的中东工业大学(Middle East Technical University)的邀请,请我在 1992/93 学年去该校访问一年,并提供每月 1650 美元的税后工资,一切手续都已办好,而且第三世界科学院提供我 1000 美元的旅费.但是为了申报博士生导师,这一切都只能放弃.我若选取去土耳其,虽然可比现在至少要多得12 000美元,但是在 1993 年我就不能成为博士导师,从而严重影响到首都师大基础数学博士学位授权点申请的成功.在第二次 Associate Visite 后、还以 Associate Member 的名义途经马来西亚的吉隆波访问了印度班加罗尔(Bangalore)的贾瓦哈拉尔·尼赫鲁现代科学研究中心(Jawahalal Nehru Centre for Advanced Scientific Research,简称 JNCASR)和印度科学研究院(Indian Institute of Science,简称 IISc),为时 6 周(从 1995 年 12 月 31 日到 1996 年 2 月 13 日).第 3 次 Associate Visite 后,又顺访了 IHES 一个月.至此,我累计出国访问 3 年半.自此以后,我已 60 岁有余,我自己规定不作长期出访,原则上是每年应邀离开大陆开一周的国际会议.1999 年 9 月去波兰一周,2000 年 5 月去香港一周,2001 年 12 月去台湾一周,2002 年 8 月去韩国一周,都是参加国际学术会议.2003 年 5 月访问香港中文大学数学所,接着在香港大学参加庆贺萧荫堂 60 大寿的国际会议.

我认为像上述那样 3 年多的出国访问、进行合作研究和学术交流是最为合算的,因为像我那样不但邀请方提供当地生活费用,而且经常不用我方负担国际旅费.我的那么多次的出访、国家自然科学基金委员会仅仅

资助了2次，第一次是在1988年到1989年的环球访问中提供8000元人民币的国际旅费，第二次是到波兰开会提供国际机票. 其余都由邀请方资助旅费或由其他途径解决. 例如在那次环球访问中，国际数学联盟(International Mathematical Union，简称IMU)资助了2250瑞士法郎，法国尼斯的国际纯粹与应用数学中心(International Center for Pure and Applied Mathematics，简称CIMPA)资助了700美元. 没有这些出访，就没有我本书所述的研究成果，而上述的这一切出访在改革开放前是不可想象的. 因此除了开头我感谢的以外，归根到底，我要感谢邓小平先生的改革开放的英明决策，以及中国共产党在邓小平理论指导下的治国方略.

殷慰萍

2003年2月于首都师范大学